Separata de *MATHEMATICAE NOTAE*
UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL
ROSARIO — REPUBLICA ARGENTINA
Volumen I — Año 1962

SOBRE LA FORMULA FUNDAMENTAL CINEMATICA DE LA GEOMETRIA INTEGRAL EN ESPACIOS DE CURVATURA CONSTANTE

POR

L. A. SANTALÓ

SUMMARY. This note gives a proof of the fundamental kinematic formula of the Integral Geometry for spaces of constant curvature and n dimensions. The result is formula (1.2) and it was given in [8]. The proof is a more detailed and direct version of that given by the author in [7]; some misprints that there occur have here been corrected.
At the end we indicate some applications.

1. *Introducción.* Sean Q_0 y Q_1 dos cuerpos del espacio n-dimensional de curvatura constante K. Supongamos que sus contornos ∂Q_0, ∂Q_1 sean dos hipersuperficies de clase C^2, de manera que las integrales (2.1) permiten definir las llamadas integrales de curvatura media de orden r, que representaremos por $M_r\ (Q_0)$ y $M_r\ (Q_1)$ respectivamente. Si los contornos presentan singularidades, muchas veces pueden definirse las integrales $M_r\ (Q_i)$ como valor límite de las mismas para el cuerpo paralelo exterior a distancia ϵ, cuando $\epsilon \longrightarrow 0$.

Supongamos a Q_0 *fijo* y a Q_1 móvil. Sea dQ_1 la densidad cinemática para Q_1 en el sentido de la geometría integral. Ella se define de la siguiente manera: para fijar la posición de Q_1 hay que fijar uno de sus puntos, sea x, y un n-edro formado por n vectores unitarios ortogonales entre si, sean $e_1, e_2, \ldots, e_n$ de vértice x. Una vez fijado x, para fijar el n-edro hay que fijar e_n por su extremo sobre la esfera O_{n-1} de dimensión n—1 y radio unidad; luego e_{n-1} por su extremo sobre la esfera O_{n-2} de radio unidad y dimensión n—2 ortogonal a e_n; luego e_{n-2} sobre O_{n-3} ortogonal a e_n y a e_{n-1} y así sucesivamente hasta fijar e_2 por su extremo sobre la circunferencia O_1 ortogonal a $e_n, e_{n-1}, \ldots, e_3$. Llamando

dO_i al elemento de area sobre la esfera unidad O_i correspondiente al extremo de e_{i+1} y dx al elemento de volumen del espacio en el punto x, la densidad cinemática vale

$$(1.1) \qquad dQ_1 = dx \wedge dO_{n-1} \wedge dO_{n-2} \wedge \ldots \wedge dO_1.$$

Es una forma diferencial de grado $1 + 2 + 3 + \ldots + n = n(n+1)/2$, como debe ser, pues la posición de un cuerpo Q_1 en el espacio de n dimensiones depende de ese número de parámetros.

Sea $\chi(Q)$ la característica de Euler-Poincaré del cuerpo Q. Suponiendo, como hemos dicho, Q_0 fijo y Q_1 móvil, la fórmula cinemática fundamental de la geometría integral en espacios de curvatura constante K es la siguiente

$$(1.2) \qquad \int \chi(Q_0 \frown Q_1)\, dQ_1 =$$

$$O_1 O_2 \ldots O_{n-1} \left(-\frac{2\,\epsilon_n}{O_n} K^{n/2} V_0 V_1 + V_1 \chi_0 + V_0 \chi_1 \right)$$

$$+ O_1 O_2 \ldots O_{n-2} \frac{1}{n} \sum_{h=0}^{n-2} \binom{n}{h+1} M_h^0 M^1_{n-2-h}$$

$$+ 2\, O_1 O_2 \ldots O_{n-2} \sum_{s=0}^{n-4} \frac{O_{n-s}}{O_s} M_s^0 \left\{ \sum_{t=[(s-\epsilon_n)/2]+1}^{(n-3-\epsilon_n)/2} c_{stn} M^1_{2t+\epsilon_n-s-1} \right.$$

donde V_0, V_1 son los volúmenes de Q_0, Q_1 y se ha puesto

$$O_i = \frac{2\pi^{\frac{i+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{i+1}{2}\right)}, \quad \epsilon_n = \frac{1}{2}\left(1 + (-1)^n\right)$$

(1.3)

$$c_{stn} = \binom{n-1}{2t+\epsilon_n} \binom{2t+\epsilon_n}{s}$$

$$\frac{O_{n+s-2t-\epsilon_n+1}}{O_{2t+1+\epsilon_n-s}\, O_{n-2t-\epsilon_n}\, O_{n-2t-1-\epsilon_n}} K^{(n-2t-1-\epsilon_n)/2}$$

La integración, en el primer miembro, está extendida a todas las posiciones de Q_1 en las que corta a Q_0.

Se ha puesto también, para abreviar,

$$M_h^0 = M_h(Q_0),\ M_h^1 = M_h(Q_1),\ \chi_0 = \chi(Q_0),\ \chi_1 = \chi(Q_1).$$

Para el espacio euclidiano ($K = 0$) y $n = 2,3$ esta fórmula se encuentra, por ejemplo, en Blaschke [2]. Para $K = 0$ fue dada en 1940 por Chern-Yien [4] y con una demostración más detallada en 1952 por Chern [5].

Para el caso general del espacio de curvatura constante K, la fórmula anterior fue demostrada por nosotros en [7]; ver también [8]. Para $n = 3$ una demostración directa se encuentra en [12] y para el espacio elíptico $n = 3$, $K > 0$, también en Ta-Jen-Wu [15]. Para $n = 2$, con varias aplicaciones, ver [13].

El objeto de esta nota es hacer una exposición más directa y detallada de la demostración dada en [7], corrigiendo al mismo tiempo algunas erratas que allí se deslizaron y dando al resultado final una forma más compacta. Al final hacemos, además, algunas aplicaciones.

2. *Definiciones y fórmulas conocidas.* Vamos a recopilar algunas definiciones y fórmulas integrales que necesitaremos y que han sido obtenidas en otros lugares.

Indicaremos el espacio euclidiano por E_n y el espacio n-dimensional de curvatura constante K por $S_n(K)$.

Sea Q un cuerpo convexo de E_n. Suponiendo que la hipersuperficie ∂Q que lo limita sea de clase C^2 y llamando R_i ($i = 1, 2, \ldots, n-1$) a los radios principales de curvatura en el punto cuyo elemento de área sea $d\sigma$, se llama *integral de curvatura media de orden r* de ∂Q a la integral

$$M_r = \frac{1}{\binom{n-1}{r}} \int_{\partial Q} \left\{ \frac{1}{R_1}, \frac{1}{R_2}, \ldots, \frac{1}{R_r} \right\} d\sigma \tag{2.1}$$

donde el paréntesis del integrando indica la función simétrica elemental de orden r formada con las curvaturas principales $1/R_i$. En particular, se tiene

$$M_0 = F = \text{área de } \partial Q \tag{2.2}$$
$$M_{n-1} = O_{n-1}$$

donde O_{n-1} indica el volumen de la esfera euclidiana $(n-1)$-dimensional de radio unidad. Es decir, de manera general, pondremos

$$(2.3) \qquad O_i = \frac{2\pi^{\frac{i+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{i+1}{2}\right)}$$

para $i = 0, 1, 2, \ldots,$

La definición (2.1) para los invariantes $M_r(Q)$ supone que ∂Q es de clase C^2. Esta definición tiene la ventaja de servir aun cuando Q no sea convexo, con tal de que ∂Q sea de clase C^2 Para los casos en que esta condición no se cumple, si Q es convexo, los $M_r(Q)$ pueden sustituirse por otros invariantes, equivalentes salvo un factor, los cuales se definen para cuerpos convexos cualesquiera. Ellos son:

a) Las *integrales de sección* $W_r(Q)$ (en alemán "Quermassintegrale"; en francés "travers exterieurs") ligados con los $M_r(Q)$ por la relación (Ver Bonnesen-Fenchel [3, pág. 63]),

$$(2.4) \qquad M_{r-1} = n\, W_r.$$

b) Las medidas H_r de los conjuntos de subespacios lineales L_r de E_n que cortan a Q, medidas tomadas en el sentido de la geometría integral (ver [9]). Su relación con los M_r es

$$(2.5) \qquad M_{r-1} = \frac{2\,(n-r)\, O_1\, O_2 \ldots O_{r-1}}{O_{n-r-1}\, O_{n-r} \ldots O_{n-2}}\, H_r.$$

Interesa considerar el caso de un cuerpo convexo Q "aplastado", es decir contenido en un subespacio lineal L_q de E_n $(1 \leqslant q \leqslant n-1$. Lo indicaremos con Q^q. Si Q^q se considera como cuerpo convexo del espacio euclidiano E_q tiene unas integrales de curvatura media que representaremos por M_r^q $(0 \leqslant r \leqslant q-1)$. En cambio, considerado como cuerpo convexo aplastado de E_n, sus integrales de curvatura media serán las $M_r = M_r^n$, calculables por cualquiera de las fórmulas (2.4), (2.5).

Las relaciones entre ambas integrales de curvatura media son las siguientes (ver [11] y para $q = n-1$ también Hadwiger [6, pág. 215]

1. Si $r \geqslant n-q$, es

$$M_r^n = \frac{\binom{q-1}{r-n+q}}{\binom{n-1}{r}} \frac{O_r}{O_{r-n+q}} M^q_{r-n+q}. \tag{2.6}$$

2. Si $r = n-q-1$, es

$$M_r^n = \frac{1}{\binom{n-1}{r}} O_{n-q-1}\, \sigma_q\,(Q^q) \tag{2.7}$$

donde $\sigma_q\,(Q^q)$ indica el volumen de Q^q.

3. Si $r < n-q-1$, es

$$M_r^n = 0. \tag{2.8}$$

Sea ahora un cuerpo convexo Q de E_n y supongamos que se corte por subespacios lineales L_q. Las intersecciones $Q \frown L_q$ serán cuerpos convexos aplastados de dimensión q. Considerando todos los L_q que cortan a Q y llamando dL_q a la densidad para conjuntos de L_q en E_n, vale la fórmula integral

$$\int\limits_{Q \cap L_q \neq 0} M_r^q\,(Q \frown L_q)\, dL_q = \frac{O_{n-2} \ldots O_{n-q}}{2\, O_1\, O_2 \ldots O_{q-2}} \frac{O_{n-r}}{O_{q-r}} M_r^n\,(Q) \tag{2.9}$$

La demostración puede verse en [9].

Para $r = q-1$, según (2.2) es $M^q_{q-1} = O_{q-1}$ y por tanto (2.9) da la medida de todos los L_q que cortan a Q, a saber

$$\int\limits_{Q \cap L_q \neq 0} d\,L_q = \frac{O_{n-2} \ldots O_{n-q}\, O_{n-q-1}}{2\, O_1 \ldots O_{q-1}\,(n-q)} M^n_{q-1}\,(Q) \tag{2.10}$$

donde se ha utilizado la relación

$$2\,\pi\, O_{n-q-1} = (n-q)\, O_{n-q+1}. \tag{2.11}$$

Si $\sigma_q (Q \frown L_q)$ indica el volumen q — dimensional de la intersección $Q \frown L_q$, vale también la fórmula

$$(2.12) \qquad \int\limits_{Q \cap L_q \neq 0} \sigma_q (Q \frown L_q)\, d\, L_q = \frac{O_n\, O_{n-1} \ldots O_{n-q}}{2\, O_1 \ldots O_q} \frac{O_q}{O_n}\, V(Q)$$

siendo $V(Q)$ el volumen de Q.

3. *La fórmula fundamental cinemática para el espacio euclidiano* E_n *y aplicaciones.* Sea Q un cuerpo no necesariamente convexo de E_n cuyo contorno ∂Q sea de clase C^2. En tal caso están definidas las integrales de curvatura media por las fórmulas (2.1).

Sea $\chi(Q)$ la característica de Euler-Poincaré de Q. Recordemos que para n par es siempre

$$(3.1) \qquad \chi(\partial Q) = 0 \quad (n \text{ par})$$

y para n impar

$$(3.2) \qquad \chi(\partial Q) = 2\, \chi(Q) \quad (n \text{ impar})$$

valiendo también, para cualquier n, la fórmula de Gauss-Bonnet

$$(3.3) \qquad M_{n-1}(Q) = O_{n-1}\, \chi(Q)$$

que generaliza la segunda fórmula (2.2) por ser

$$(3.4) \qquad \chi(Q) = 1 \text{ si } Q = \text{esfera topológica.}$$

Sean ahora Q_0, Q_1 dos cuerpos de E_n cuyos contornos sean de clase C^2. Supongamos a Q_0 fijo y a Q_1 móvil con la densidad cinemática $d\,Q_1$ dada por (1.1). La fórmula fundamental cinemática para E_n es entonces

$$(3.5) \qquad \int\limits_{Q_0 \cap Q_1 \neq 0} \chi(Q_0 \frown Q_1)\, d\, Q_1 = O_1 \ldots O_{n-2} \left\{ O_{n-1} (\chi_0 V_1 + \chi_1 V_0) + \frac{1}{n} \sum_{h=0}^{n-2} \binom{n}{h+1} M_h^0\, M^1_{n-2-h} \right\}$$

donde V_0 y V_1 son los volúmenes de Q_0 y Q_1 respectivamente y para abreviar se ha puesto $M_h^0 = M_h(Q_0)$, $M^1_{n-2-h} = M_{n-2-h}(Q_1)$.

La demostración de esta fórmula (3.5) puede verse en Chern [5].

Consideremos el caso particular de ser $Q_0 = Q_0^q$ un cuerpo aplastado contenido en un L_q de E_n y Q_1 un cuerpo convexo cualquiera de E_n. En este caso es

$$(3.6) \qquad \chi(Q_0^q \frown Q_1) = \chi(Q_0^q) = \chi(Q_1) = 1$$

y teniendo en cuenta (2.6), (2.7), (2.8) resulta

$$(3.7) \quad \int dQ_1 = O_1 \ldots O_{n-2} \left\{ O_{n-1} V_1 + \frac{\binom{n}{n-q}}{n\binom{n-1}{q}} O_{n-q-1} \sigma_q(Q_0^q) M^1_{q-1} \right.$$
$$\left. + \frac{1}{n} \sum_{h=n-q}^{n-2} \binom{n}{h+1} \frac{\binom{q-1}{h+q-n}}{\binom{n-1}{h}} \frac{O_h}{O_{h+q-n}} M^q_{h+q-n} M'_{n-2-h} \right\}$$

donde la integral está extendida a todas las posiciones de Q_1 en que corta a Q_0^q.

Esta fórmula permite calcular las integrales de curvatura media $M_q(Q_0 \frown Q_1)$ extendidas a todas las posiciones de Q_1. Para ello consideremos la integral

$$(1.8) \qquad I = \int dQ_1 \, dL_q$$

extendida a todas las posiciones de Q_1 y de L_q para las cuales es $Q_0 \frown Q_1 \frown L_q \neq 0$.

Fijando primero Q_1, según (2.10) es

$$(3.9) \qquad I = \frac{O_{n-2} \ldots O_{n-q-1}}{2(n-q) O_1 \ldots O_{q-1}} \int M_{q-1}(Q_0 \frown Q_1) \, dQ_1.$$

En cambio, fijando L_q, según (3.7) es

$$(3.10) \quad I = O_1 \ldots O_{n-2} \int \left\{ O_{n-1} V_1 + \frac{\binom{n}{n-q}}{m\binom{n-1}{q}} \right.$$
$$O_{n-q-1} \sigma_q(Q_0^q) M^1_{q-1}$$
$$\left. + \frac{1}{n} \sum_{h=n-q}^{n-2} \binom{n}{h+1} \frac{\binom{q-1}{h+q-n}}{\binom{n-1}{h}} \frac{O_h}{O_{h+q-n}} M^1_{n-2-h} M^q_{h+q-n} \right\} dL_q$$

De aquí, aplicando (2.10), 2.12) y (2.9),

$$(3.11)\quad I = O_1 \ldots O_{n-2} \Big\{ O_{n-1} V_1 \frac{O_{n-2} \ldots O_{n-q-1}}{2\,(n-q)\, O_1 \ldots O_{q-1}} M^0_{q-1}$$

$$+ \frac{\binom{n}{q}}{n\binom{n-1}{q}} O_{n-q-1} \frac{O_{n-1} \ldots O_{n-q}}{2\, O_1 \ldots O_{q-1}} M^1_{q-1} V_0$$

$$+ \frac{1}{n} \sum_{h=n-q}^{n-2} \frac{\binom{n}{h+1}\binom{q-1}{q+h-n}}{\binom{n-1}{h}} \frac{O_{n-2} \ldots O_{n-q} O_{2n-h-q}}{2\, O_1 \ldots O_{q-2} O_{n-h}} \frac{O_h}{O_{h+q-n}}$$

$$M^1_{n-2-h} M^0_{h+q-n} \Big\}.$$

Igualando con (3.9) y simplificando, resulta

(3.12)

$$\int M_{q-1} (Q_0 \frown Q_1)\, dQ_1 = O_1 \ldots O_{n-2} \Big\{ O_{n-1} (V_1 M^0_{q-1} + V_0 M^1_{q-1})$$

$$+ \frac{(n-q)\, O_{q-1}}{O_{n-q-1}} \frac{O_h}{O_{h+q-n}} \sum_{h=n-q}^{n-2} \frac{\binom{q-1}{q+h-n} O_{2n-h-q}}{(h+1)\, O_{n-h}} M^1_{n-2-h} M^0_{h+q-n} \Big\}$$

Esta fórmula vale para $0 < q \leqslant n-1$. Para $q = n$, ella debe sustituirse por la fundamental (3.5), teniendo en cuenta (3.3).

4. *Validez de* (3.12) *para cuerpos no convexos y espacios de curvatura constante.* Sean ahora Q_0, Q_1 dos cuerpos no necesariamente convexos de E_n, pero cuyos contornos sean siempre de clase C^2. Sea x un punto de la intersección $\partial Q_0 \frown \partial Q_1$ y llamemos $d\sigma_0$ = elemento de área de ∂Q_0 en x, $d\sigma_1$ = elemento de área de ∂Q_1 en x, $d\sigma_{01}$ = elemento de área de $\partial Q_0 \frown \partial Q_1$ en x. Sea, además, ϕ el ángulo que forman las normales a ∂Q_0 y ∂Q_1 en x. Llamando $dQ_1\,[x]$ a la densidad cinemática de Q_1 "alrededor de x", o sea, suponiendo x fijo, debe existir una relación de la forma

$$(4.1)\qquad d\sigma_{01} \wedge dQ_1 = \Phi(\phi)\, d\sigma_0 \wedge d\sigma_1 \wedge dQ_1\,[x].$$

La existencia de esta relación es evidente observando que ambos miembros determinan la posición de Q_1 mas la del punto x.

La forma explícita de la función $\Phi(\phi)$ es un poco complicada, pero no hace falta obtenerla. Ella podría deducirse fácilmente de la fórmula equivalente dada por Chern en [5], fórmula (24).

Para calcular ahora la integral (3.12) observemos que $M_{q-1}(Q_0 \frown Q_1)$ se compone de tres partes: *a*) La parte correspondiente al contorno de Q_0 que es interior a Q_1; b) La parte correspondiente al contorno de Q_1 es en interior a Q_0; *c*) La parte **correspondiente** a $\partial Q_0 \frown \partial Q_1$.

Las integrales de las dos primeras partes se calculan inmediatamente por el método usual en geometría integral de tomar un punto fijo en el contorno de uno de los cuerpos e integrando el otro a todas las posiciones en que contiene a este punto, el cual se hace luego variar a todo el contorno del primer cuerpo. Se obtienen así, independientemente de la convexidad de Q_0 y Q_1, los dos primeros términos de (3.12), o sea la expresión $O_1 O_2 \ldots O_{n-1} (V_1 M^0_{q-1} + V_0 M^1_{q-1})$.

La contribución de la intersección $\partial Q_0 \frown \partial Q_1$ a la curvatura media $M_{q-1}(Q_0 \frown Q_1)$ puede obtenerse tomando el cuerpo para lelo exterior a distancia ϵ, calculando luego la integral de la $(q—1)$—ésima curvatura media correspondiente a la parte paralela a $\partial Q_0 \frown \partial Q_1$ y hallando el valor límite de la misma para $\epsilon \rightarrow 0$. Este valor límite será de la forma $F(x, \Theta_h, R^0{}_i, R^1{}_i)\, d\sigma_{01}$ siendo F una función (cuya forma explícita no interesa) del punto x de la **intersección** $\partial Q_0 \frown \partial Q_1$, de los ángulos Θ_h $(h = 1, 2, \ldots, \frac{1}{2} n\,(n\text{-}1))$ que fijan la posición de Q_1 alrededor de x y de los radios principales de curvatura $R_i{}^0$ y $R_i{}^1$ de ∂Q_0 y ∂Q_1 respectivamente, en el punto x. Para el cálculo explícito de F bastaría aplicar los teoremas generalizados de Euler y de Meusnier a la intersección de variedades $(n\text{-}1)$-dimensionales y las fórmulas de Olinde Rodrigues a la misma intersección. Multiplicando la integral última por dQ_1, aplicando (4.1) e integrando respecto de $dQ_1[x]$ a todas las posiciones de Q_1 alrededor de x, resulta una función $F_1(x, R_i{}^0, R_i{}^1)$ sólo de x, $R_i{}^0$, $R_i{}^1$. La forma explícita de esta función no interesa; basta observar que habiendo llegado a ella exclusivamente por consideraciones "locales" alrededor del punto x, ella es independiente de si Q_0 y Q_1 son o no convexos.

El resultado de integrar después el producto de esta función F_1 por $d\sigma_0 \wedge d\sigma_1$, sabemos que en el caso de ser Q_0, Q_1 convexos nos da la suma que aparece en el segundo miembro de (3.12).

Por tanto, siendo F_1 (x, R_i^0, R_i^1) independiente de la convexidad y aún de la conexión de Q_0, Q_1 el resultado final (3.12) será siempre el mismo en todos los casos.

Observemos ahora que todos los razonamientos locales que acabamos de hacer son válidos, con las mismas funciones F, F_1 que en ellos aparecen, para cuerpos Q_0, Q_1 de un espacio de curvatura constante K. En efecto, tanto la fórmula (4.1), como las de Euler, Meusnier y Olinde Rodrigues que ha sido necesario utilizar, valen lo mismo en todos los casos. Se tiene así el resultado importante: *las fórmulas* (3.12) *para* $1 \leqslant q < n$-1, *valen para cualquier par de cuerpos* Q_0, Q_1, *no necesariamente convexos y para cualquier espacio de curvatura constante* K.

Para $q = n$ ya hemos dicho que (3.12) debe sustituirse por la fórmula fundamental (3.5), en la cual se sustituya $\chi(Q_0 \frown Q_1)$ por $(1/O_{n-1})\, M_{n-1}\, (Q_0 \frown Q_1)$, de acuerdo con (3.3). Queda así, como complemento de las fórmulas (3.12) la siguiente

$$(4.2) \quad \int M_{n-1}\,(Q_0 \frown Q_1)\, dQ_1 = O_1 \ldots O_{n-1} \Big\{ M^0{}_{n-1} V_1 + M^1{}_{n-1} V_0 + \frac{1}{n} \sum_{h=0}^{n-2} \binom{n}{h+1} M^0{}_h M^1{}_{n-2-h} \Big\}$$

la cual, por las mismas razones expuestas, es válida para cuerpos cualesquiera (con ∂Q_0 y ∂Q_1 de clase C^2) y para espacios de curvatura constante cualquiera.

5. *La fórmula fundamental cinemática en espacios de curvatura constante.* Ya tenemos todos los elementos necesarios para escribir la fórmula fundamental cinemática para espacios de curvatura constante K. Unicamente necesitamos, todavía, recordar la fórmula de Glauss Bonnet generalizada por Allendoerfer-Weil-Chern, que liga las integrales de curvatura media del contorno de un cuerpo Q_1, del espacio de curvatura constante K (ver por ejemplo [10]) a saber:

Para n par es

$$(5.1) \quad \binom{n-1}{n-1} c_{n-1} M_{n-1} + \binom{n-1}{n-3} c_{n-3} M_{n-3} + \ldots \binom{n-1}{1} c_1 M_1 + K^{n/2}\, V = \frac{1}{2} O_n\, \chi(Q)$$

y para n impar

$$(5.2) \qquad \binom{n-1}{n-1} c_{n-1} M_{n-1} + \binom{n-1}{n-3} c_{n-3} M_{n-3} + \ldots + c_0 M_0 =$$

$$= \frac{1}{2} O_n \chi(Q)$$

siendo c_i constantes de valor

$$(5.3) \qquad c_i = \frac{O_n}{O_i O_{n-1-i}} K^{(n-1-i)/2}$$

y siendo V el volumen de Q.

Apliquemos (5.1) o (5.2), según la paridad de n, a la intersección $Q_0 \frown Q_1$, multipliquemos luego ambos miembros por dQ_1 e integremos a todas las posiciones de Q_1 en las cuales tiene punto común con Q_0. En el segundo miembro aparece la integral de $\chi(Q_0 \frown Q_1)$, cuyo valor es precisamente lo que busca la fórmula fundamental cinemática. En el primer miembro aparecen las integrales (3.12) y (4.2) ya conocidas, mas la integral del volumen $V(Q_0 \frown Q_1)$ de la intersección de Q_0 y Q_1. Esta integral se calcula inmediatamente por el método usual de considerar la integral de $dx \wedge dQ_1$ extendida a todos los puntos x contenidos en el interior de $Q_0 \frown Q_1$ y a todas las posiciones de Q_1 en las que corta a Q_0. Si se fija primero Q_1, resulta la integral buscada. En cambio, fijando primero el punto x, la integral de dQ_1, da $O_1 O_2 \ldots O_{n-1} V_1$. Como luego x puede variar a todo el interior de Q_0, resulta

$$(5.4) \qquad \int V(Q_0 \frown Q_1)\, dQ_1 = O_1 O_2 \ldots O_{n-1} V_0 V_1.$$

Con esto y (3.12) y (4.2) se tienen ya las integrales de todos los sumandos de los primeros miembros de (5.1) y (5.2). Despejando la integral del segundo miembro se tiene la fórmula cinemática fundamental buscada.

Introduciendo las abreviaturas (1.3) para poder juntar en una sola fórmula los casos de n par e impar, resulta la fórmula (1.2) que se quería demostrar.

6. *Aplicaciones.* La mayoría de los resultados de la geometría integral en espacios de curvatura constante están contenidos, como casos particulares, en la fórmula general (1.2). Vamos a citar como ejemplo, dos aplicaciones:

a) *La fórmula de Steiner en espacios de curvatura constante.* Pongamos, para abreviar la escritura,

$$K = k^2 \tag{6.1}$$

Sea Q_1 una esfera de radio ρ. Será $\chi(Q_1) = 1$ y además

$$\begin{aligned} M_i\,(Q_1) &= O_{n-1}\; k^{(i+1-n)}\; \mathrm{sen}^{n-1-i} k\rho\, \cos^i k\rho \\ V(Q_1) &= O_{n-1}\; k^{-(n-1)} \int_0^\rho \mathrm{sen}^{n-1} k\rho\; d\rho. \end{aligned} \tag{6.2}$$

En la expresión (1.1) de dQ_1, tomando por punto x el centro de Q_1, para toda posición de Q_1 se podrá integrar la expresión $dO_{n-1} \wedge \ldots \wedge dO_1$ dando por resultado el producto $O_{n-1}\, O_{n-2} \ldots O_1$. Dividiendo ambos miembros de (1.2) por este factor, el resultado será el volumen del dominio cubierto por los puntos x cuya distancia a Q_0 es igual o menor que ρ, o sea, *el volumen del cuerpo paralelo exterior a Q_0 a distancia ρ.*

La expresión de este volumen en función de V_0, M_i ($i = 0, 1 \ldots, n-1$) constituye precisamente la generalización a espacios de curvatura constante de la fórmula de Steiner del caso euclidiano. La expresión general para la dimensión n toma una forma complicada, que no vale la pena escribir, pero que resulta de (1.2) con las sustituciones (6.2). Vamos a limitarnos a escribir los primeros casos $n = 2, 3, 4$.

$n = 2$. En este caso, poniendo

$$V_0 \longrightarrow F_0 \quad , V_1 \longrightarrow F_1 \ , M_0^0 \longrightarrow L_0 \ , M_0^1 \longrightarrow L_1$$

donde F_0, F_1 son las áreas y L_0, L_1 las longitudes de los contornos de las figuras bidimensionales Q_0, Q_1, la fórmula (1.2) se escribe

$$\int \chi\,(Q_0 \frown Q_1)\; d\,Q_1 = 2\,\pi\,(F_1\,\chi_0 + F_0\,\chi_1 - \\ - \frac{k^2}{2\,\pi}\,F_0\,F_1 + \frac{1}{2\,\pi}\,L_0\,L_1) \tag{6.3}$$

Si Q_1 es una esfera de radio ρ es

(6.1) $$F_1 = 2\pi k^{-2}(1 - \cos k\rho), \quad L_1 = 2\pi k^{-1} \operatorname{sen} k\rho$$

con lo cual, sustituyendo en (6.3) y dividiendo ambos miembros por 2π, el primer miembro representa el área F_ρ del dominio paralelo exterior a Q_0 a distancia ρ, que resulta valer

(6.5) $$F_\rho = F_0 \cos k\rho + L_0 k^{-1} \operatorname{sen} k\rho + 2\pi k^{-2}(1 - \cos k\rho)\chi_0,$$

de acuerdo con el valor obtenido por Vidal Abascal [14].

$n = 3$. La fórmula general (1.2) toma la forma

(6.6) $$\int \chi(Q_0 \frown Q_1)\, dQ_1 = 8\pi^2 (V_1 \chi_0 + V_0 \chi_1) + $$
$$+ 2\pi (F_0 M_1 + F_1 M_0).$$

Si Q_1 es una esfera de radio ρ, es

$$V_1 = 2\pi k^{-3}(k\rho - \operatorname{sen} k\rho \cos k\rho)$$
$$F_1 = M_0{}^1 = 4\pi k^{-2} \operatorname{sen}^2 k\rho$$

(6.7) $$M_1 = M_1{}^1 = 4\pi k^{-1} \operatorname{sen} k\rho \cos k\rho$$
$$\chi_1 = 1$$

Sustituyendo en (6.6) y dividiendo ambos miembros por $8\pi^2$, resulta que el volumen del cuerpo paralelo exterior a Q_0 a distancia ρ, vale

(6.8) $$V_\rho = V_0 + F_0 k^{-1} \operatorname{sen} k\rho \cos k\rho + M_1 k^{-2} \operatorname{sen}^2 k\rho$$
$$+ 2\pi k^{-3}(k\rho - \operatorname{sen} k\rho \cos k\rho)\chi_0$$

de acuerdo con el resultado obtenido por Allendoerfer [1].

$n = 4$. La fórmula general (1.2) toma la forma

(6.9) $$\int \chi(Q_0 \frown Q_1)\, dQ_1 = 16\pi^4 \left(-\frac{3}{4\pi^2} k^4 V_0 V_1 + V_1 \chi_0 + V_0 \chi_1\right)$$
$$+ 4\pi^2 \left(2 F_0 M_2{}^1 + 3 M_1{}^0 M_1{}^1 + 2 F_1 M_2{}^0 + \frac{4}{3} k^2 F_0 F_1\right).$$

Si Q_1 es una esfera de radio ρ, es

$$V_1 = \frac{2}{3} \pi^2 k^{-4} \left(- \operatorname{sen}^2 k \rho \cos k \rho + 2 (1 - \cos k \rho)\right)$$

$$F_1 = 2 \pi^2 k^{-3} \operatorname{sen}^3 k \rho$$

$$(6.10) \qquad M_1{}^1 = 2 \pi^2 k^{-2} \operatorname{sen}^2 k \rho \cos k \rho$$

$$M_2{}^1 = 2 \pi^2 k^{-1} \operatorname{sen} k \rho \cos^2 k \rho$$

$$\chi_1 = 1.$$

Sustituyendo en (6.9) y dividiendo ambos miembros por $O_1 O_2 O_3 = 16 \pi^4$, resulta que el volumen del cuerpo paralelo exterior a distancia ρ de Q_0 vale

$$\begin{aligned} V_\rho = {} & V_0 \left(\frac{1}{2} \operatorname{sen}^2 k \rho \cos k \rho + \cos k \rho\right) \\ & + F_0 \left(\operatorname{sen} k \rho \cos^2 k \rho + \frac{2}{3} \operatorname{sen}^3 k \rho)\right) k^{-1} \\ (6.11) \qquad & + M_1{}^0 \frac{3}{2} k^{-2} \operatorname{sen}^2 k \rho \cos k \rho \\ & + M_2{}^0 k^{-3} \operatorname{sen}^3 k \rho \\ & + \frac{2}{3} \pi^2 k^{-4} (2 - 2 \cos k \rho - \operatorname{sen}^2 k \rho \cos k \rho) \chi_0. \end{aligned}$$

En todos los casos, si se quisiera el área de la superficie del cuerpo paralelo exterior a distancia ρ, bastaría derivar el volumen respecto de ρ.

b) *Una fórmula integral referente a cuerpos convexos del espacio elíptico.* Consideremos el espacio elíptico de n dimensiones. Es $K = 1$. Las geodésicas del mismo son líneas cerradas de longitud π. Ellas pueden considerarse como un cuerpo Q_1 para el cual es

$$\chi_1 = 0, V_1 = 0, \ M_0 = M_1 = \ldots = M_{n-3} = M_{n-1} = 0,$$

$$(6.12) \qquad M_{n-2} = \frac{\pi}{n-1} O_{n-2}.$$

Basta, para verlo, considerar la superficie paralela exterior a distancia ϵ y hacer luego $\epsilon \rightarrow 0$.

Sea Q_0 un cuerpo convexo del espacio elíptico. En la expresión (1.1) de dQ_1 sea x un punto de Q_1. Al aplicar (1.2), en el primer miembro es $\chi(Q_0 \frown Q_1) = 1$. Además, si x es interior a Q_0, al integrar dQ_1 resulta $O_1 O_2 \ldots O_{n-1} V_0$.

Si x es exterior a Q_0, al integrar dQ_1 resulta

$$2\, O_1 O_2 \ldots O_{n-2} \int \omega\, dx$$

siendo ω el ángulo sólido que forman todas las geodésicas que parten de x y cortan a Q_0. Se ha introducido un factor 2, puesto que cada punto x es vértice de dos ángulos ω opuestos por el vértice. Sustituyendo en el segundo miembro de (1.2) los valores (6.12) e igualando, resulta

$$O_1 O_2 \ldots O_{n-1} V_0 + 2\, O_1 \ldots O_{n-2} \int \omega\, dx$$

$$= O_1 \ldots O_{n-2} \frac{\pi}{n-1} O_{n-2} M_0^1$$

y como $M_0^1 = F_0 =$ área de Q_0, resulta la fórmula integral

$$\int \omega\, dx = \frac{\pi}{2(n-1)} O_{n-2} F_0 - \frac{O_{n-1}}{2} V_0 \qquad (6.13)$$

donde la integración está extendida a todo el espacio elíptico exterior a Q_0.

Ejemplos. Para $n = 2$ se tiene

$$\int \omega\, dx = \pi L_0 - \pi F_0$$

siendo L_0 la longitud y F_0 el área de Q_0.

Para $n = 3$, resulta

$$\int \omega\, dx = \frac{1}{2} \pi^2 F_0 - 2 \pi V_0.$$

No parece fácil obtener estas fórmulas integrales de manera directa.

BIBLIOGRAFIA

[1] C. B. ALLENDOERFER, *Steiner's formulae on a general* S^{n+1}, Bull. Am. Math. Soc. 54, 1948, 128-135.

[2] W. BLASCHKE, *Vorlesungen über Integralgeometrie*, tercera edición, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1955.

[3] T. BONNESEN - W. FENCHEL, *Theorie der konvexen Körper*, Ergebnisse der Mathematik, Berlin, 1934.

[4] S. S. CHERN - T. YIEN, *Sulla formula principale cinematica dello spazio ad n dimensioni*, Boll. della Unione Matematica Italiana (2), 2, 1940, 432-437.

[5] S. S. CHERN, *On the kinematic formula in the euclidean space of n dimensions*, American J. of Math. 74, 1952, 227-236.

[6] H. HADWIGER, *Vorlesungen über Ingalt, Oberfläche und Isoperimetrie*, Springer, Berlin, 1957.

[7] L. A. SANTALÓ, *Geometría Integral en espacios de curvatura constante*, Publicaciones de la Com. Nac. de Energía Atómica, vol. 1, nº 1, Buenos Aires, 1952.

[8] — — *On the kinematic formula in spaces of constant curvature*, Proceedings of the International Congress, Amsterdam, 1954, (Abstract, vol. 2, pág. 251).

[9] — — *Sur la mesure des espaces linéaires qui coupent un corps convexe et problèmes qui s'y rattachent*, Colloque sur les questions de réalité en Géometrie, Liege, 1955, págs. 177-190.

[10] — — *Cuestiones de geometría diferencia e integral en espacios de curvatura constante*, Rendiconti del Sem. Mat. Torino, 14, 1954-55, 277-295.

[11] — — *On the mean curvatures of a flattened convex body*, Revue de la Fac. Sciences Univ. Istanbul, (A), 21, 1956, 189-194.

[12] — — *Geometría integral en los espacios tridimensionales de curvatura constante*, Math. Notae, IX, 1949-50.

[13] — — *Introduction to Integral Geometry*, Hermann, Paris, 1952.

[14] E. VIDAL ABASCAL, *A generalization of Steiner's formulae*, Bull. Am. Math. Soc. 53, 1947, 841-844.

[15] TA-JEN-WU, *Ueber elliptische Geometrie*, Math. Zeits. 43, 1938, 495-521.

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
Universidad de Buenos Aires.