CONJUNTOS DE SEGMENTOS SOBRE SUPERFICIES

por

L. A. SANTALO

SUMMARY. The sets of segments randomly distributed on the plane have been recently investigated by COLEMAN [1], [2], PARKER-COWAN [3] and SANTALO [8] among others. In the present paper, we consider some questions analogous to that of PARKER-COWAN for sets of "geodesic segments" on surfaces, in particular, sets of segments on the sphere and on the hyperbolic plane. We get the mean values of the total length of the part of segments which are interior to a convex set K and the mean value of the intersection points of pairs of segments that are interior to K. For the hyperbolic plane, we consider also the case of segments distributed on the plane according to a process of Poisson.

INTRODUCCION.

El estudio de conjuntos de segmentos en el plano y en el espacio euclidiano ha dado lugar recientemente a algunos trabajos (COLEMAN [1], [2], PARKER-COWAN [3], SANTALO [8]). El objeto del presente, es ver como algunos de los resultados obtenidos son válidos para conjuntos de "segmentos de geodésica" sobre una superficie, bajo ciertas restricciones. Dado un conjunto convexo K sobre la superficie, que definiremos más adelante, y segmentos de geodésica dados al azar, en el sentido de la Geometría Integral (probabilidad uniforme), se resuelven ciertos problemas de probabilidades geométricas y se calculan ciertos valores medios. En particular: dados al azar n segmentos S_i que tienen punto común con K, se calcula el valor medio de la suma de las longitudes de las partes de S_i que son interiores a K (1.12) y el valor medio del número de puntos N de intersección de segmentos S_i que son interiores a K (1.14).

Como superficies particulares se consideran luego los casos de la esfera y de los planos euclidiano e hiperbólico. Para estos últimos se puede suponer que el número de segmentos es infinito, de manera que se extienden sobre todo el plano, formando un proceso de Poisson. También en este caso se estudian los valores medios anteriores.

Es interesante observar ciertas diferencias que aparecen entre el plano euclidiano y el plano hiperbólico, que hacen pensar en la necesidad de un estudio detallado de los procesos de Poisson de segmentos en este último.

1. CONJUNTOS DE SEGMENTOS DE GEODESICA SOBRE UNA SUPERFICIE.

1.1. DENSIDAD PARA CONJUNTOS DE SEGMENTOS DE GEODESICA.

Supongamos una variedad de Riemann de dimensión 2: la llamaremos simplemente una superficie. Se sabe que sobre ella se puede definir una "densidad" para medir conjuntos de geodésicas. Representaremos esta densidad por dG^* si se trata de geodésicas orientadas y por dG si se trata de geodésicas no orientadas. Evidentemente $dG^* = 2dG$. Para esto se puede ver [4], [7]. Para el caso del plano, dG es la clásica densidad de rectas de la teoría de probabilidades geométricas.

Un segmento de geodésica, que representaremos por S^* si es orientado y por S si no lo es, queda determinado por uno de sus extremos P (el origen si es orientado) y el ángulo φ que forma con una dirección fija por P (además de la longitud s). También queda determinado por la geodésica G^* ó G que la contiene y la abscisa t del origen P sobre la misma. Se sabe entonces que para medir conjuntos de segmentos orientados de geodésica de lóngitud constante s (con ciertas condiciones de invariancia) se puede tomar cualquiera de las dos expresiones equivalentes

$$(1.1) \qquad dS_s^* = dP \wedge d\varphi = dG^* \wedge dt \quad ,$$

donde dP indica el elemento de área de la superficie en P. Si los segmentos no son orientados, basta dividir por 2 la expresión anterior, o tomar dG en vez de dG^*.

Si la longitud s del segmento es variable, con función densidad $F(s)$ tal que

$$(1.2) \qquad \int_0^\infty F(s)ds = 1 \quad , \quad \int_0^\infty sF(s)ds = E(s)$$

donde $E(s)$ indica la longitud media, la densidad para conjuntos de segmentos orientados de geodésica se escribe $dS^* = F(s)\ dS_s^* \wedge ds$ y para segmentos no orientados

$$dS = F(s) \quad dG \wedge dt \wedge ds \quad . \tag{1.3}$$

Como las medidas y densidades se consideran siempre en valor absoluto, el orden de las diferenciales en estas expresiones es inesencial.

1.2. SEGMENTOS DE GEODESICA QUE CORTAN A UN CONJUNTO CONVEXO.

Un conjunto K sobre una superficie se dice que es *convexo*, si es acotado y está limitado por una curva ∂K tal que toda geodésica cuya intersección con K no sea vacía, sólo puede tener uno (geodésica de apoyo), dos (geodésica secante) puntos comunes con ∂K, a no ser que tenga todo un segmento como parte de ∂K.

Las geodéscias de la superficie pueden ser cerradas y,por tanto, tener longitud finita (por ejemplo, en el caso de la esfera). Para que los resultados que siguen sean válidos también en este caso, debemos imponer la condición de que *consideraremos solamente conjuntos convexos* K *y segmentos* S *tales que el diámetro* D *de* K, *la longitud máxima* s_m *de* S *y la longitud mínima* L_G *de* G, *cumplan la condición*

$$D + s_m \leqq L_G \quad . \tag{1.4}$$

Naturalmente que si todas las geodésicas (salvo, si se quiere,un conjunto de medida nula) tienen longitud infinita y consideramos segmentos propiamente dichos (o sea, $s_m < \infty$), esta condición (1.4) se cumple siempre.

Con esta condición, si σ representa la longitud de la cuerda que la geodésica G determina en K, valen las fórmulas (ver [4] ó [7])

$$\mu(G\,;G \cap K \neq \emptyset) = L \quad , \quad \int \sigma\, dG = \pi F \quad , \tag{1.5}$$

donde μ indica la medida, con la densidad dG, de manera que la primera igualdad es el valor de la medida de las geodésicas que tienen punto común con K, L es la longitud de ∂K y F es el área de K. La segunda integral se puede considerar extendida a todas las geodésicas de la superficie, puesto que para las que no cor tan a K es $\sigma = 0$.

Para medir el conjunto de segmentos S que tienen punto común con K , aplicando (1.3), (1.2) y (1.5) se tiene

(1.6) $$\mu(S\,;S \cap K \neq \emptyset) = \int F(s)(s+\sigma)ds \; dG = E(s)L + \pi F \quad .$$

Si K se reduce a un segmento de geodésica de longitud α , considerándolo como un conjunto convexo aplastado, es $F = 0$, $L = 2\alpha$ y por tanto, la medida del conjunto de segmentos S que cortan a un segmento fijo S_α de longitud α , es

(1.7) $$\mu(S\;;\;S \cap S_\alpha \neq \emptyset) = 2\,\alpha E(s) \quad .$$

Sea nuevamente K un conjunto convexo cualquiera de la superficie y sea S la intersección $S \cap K$ (siendo α la longitud de S_α). Consideremos el conjunto de pares (G,S) (geodésica, segmento) tales que G corte a S_α . La integral

(1.8) $$I = \int dG \quad dS$$

extendida a este conjunto de pares, fijando primero S e integrando dG , aplicando la primera fórmula (1.5), vale $I = 2\int \alpha\, dS$. En cambio, fijando primero G , si σ es la longitud de la cuerda $G \cap K$, según (1.7), tenemos $I = 2\int \sigma E(s)dG = 2\,\pi F E(s)$. Por tanto, resulta

(1.9) $$\int \alpha dS = \pi F E(s) \quad .$$

Aquí también la integral del primer miembro se puede considerar extendida a todos los segmentos de la superficie, puesto que si S no corta a K es $\alpha = 0$.

Consideremos ahora dos segmentos S_1 , S_2 que cortan a K y sea n_{12} la función que vale 1 si S_1 , S_2 se cortan en el interior de K y vale 0 en caso contrario. Queremos calcular la integral

(1.10) $$J = \int n_{12} dS_1 \wedge dS_2$$

extendida a todos los segmentos S_1 , S_2 de la superficie.

Fijando primero S_1 y llamando α_1 a la longitud de la parte del mismo interior a K , según (1.7) es

$$J = 2\int \alpha_1\; E(s_2)dS_1$$

y aplicando (1.9)

$$(1.11) \qquad J = \int n_{12}\, dS_1 \wedge dS_2 = 2\pi F\, E(s_1)E(s_2) \quad ,$$

donde $E(s_i)$ indica la longitud media de los segmentos S_i .

De estos resultados se deduce:

a) Dados al azar n segmentos de geodésica $S_1, S_2, \dots, S_n$ que cortan a un conjunto convexo K , el valor medio de la suma de las longitudes $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ de sus intersecciones con K , vale

$$(1.12) \qquad E\left(\sum \alpha_i\right) = \pi F \sum_1^n \frac{E(s_i)}{\pi F + LE(s_i)} \quad .$$

En particular, si todos los segmentos tienen la misma longitud media $E(s)$, resulta

$$(1.13) \qquad E\left(\sum \alpha_i\right) = \frac{\pi F\, n\, E(s)}{\pi F + LE(s)} \quad .$$

b) Dados al azar, n segmentos de geodésica $S_1, S_2, \dots, S_n$ que cortan a un conjunto convexo K , el valor medio del número N de puntos de intersección de los segmentos S_i , que son interiores a K , (por ejemplo en la fig.1 es $N = 6$), es

$$E(N) = 2\pi F \sum_{i<j} \frac{E(s_i)\, E(s_j)}{(\pi F + LE(s_i))(\pi F + LE(s_j))} \quad .$$

Si todos los segmentos tienen la misma longitud media $E(s)$, resulta

$$(1.14) \qquad E(N) = \frac{n(n-1)\pi F[E(s)]^2}{(\pi F + LE(s))^2} \quad .$$

2. CONJUNTOS DE SEGMENTOS SOBRE LA ESFERA.

2.1. CASO DE LA ESFERA UNIDAD.

Lo anterior vale para segmentos de geodésica sobre cualquier superficie, siempre que se cumplan las condiciones dichas para K y s . Consideremos, en particular, el caso de la esfera de radio unidad.

En este caso, podemos considerar el conjunto de todos los segmentos, no sólo los que cortan a K . Su medida es (segmentos no orientados),

$$\mu(S) = \int F(s)ds \wedge dP \wedge d\varphi = 4\pi^2 \quad . \tag{2.1}$$

De aquí y de (1.6) se deduce la solución de los siguientes problemas de probabilidades geométricas:

a) Si K es un conjunto convexo fijo sobre la esfera unidad y S un segmento dado al azar sobre la misma (siempre con la densidad (1.3)), la probabilidad de que tenga punto común con K vale

$$p(S \cap K \neq \varnothing) = \frac{\pi F + L E(s)}{4\pi^2} \quad . \tag{2.2}$$

Se supone que se cumple la condición (1.4) que en este caso se escribe $D + s_m \leq 2\pi$.

De (1.9) y (1.11) se deduce también

b) Si K es un conjunto convexo fijo sobre la esfera unidad y se dan n segmentos de círculo máximo al azar sobre la misma, el valor medio de la suma de las longitudes de las partes de los mismos que resultan interiores a K vale

$$E\left(\sum \alpha_i\right) = \frac{F}{4\pi} \sum_1^n E(s_i) \quad . \tag{2.3}$$

Si todos los segmentos tienen la misma longitud media $E(s)$ es

$$E\left(\sum \alpha_i\right) = \frac{n\, E(s)\, F}{4\pi} \quad . \tag{2.4}$$

c) En las mismas condiciones anteriores, el valor medio del número de puntos de intersección de los n segmentos S_i que son interiores a K , vale

$$E(N) = \frac{F}{8\pi^3} \sum_{i<j} E(s_i)E(s_j) \quad . \tag{2.5}$$

En particular, si todos los segmentos tienen la misma longitud media $E(s)$, es

$$E(N) = \frac{n(n-1)F(E(s))^2}{16\pi^3} \quad . \tag{2.6}$$

Es fácil ver que esta fórmula vale sin la restricción (1.4). En particular vale cuando K se extiende a toda la esfera ($F=4\pi$), resultando entonces que el valor medio del número de puntos de intersección de n segmentos dados al azar, independientemente y según la densidad (1.3), sobre la esfera unidad, es

(2.7)
$$E(N) = \frac{n(n-1)(E(s))^2}{4\pi^2} .$$

3. EL CASO DEL PLANO EUCLIDIANO Y DEL PLANO HIPERBOLICO.

3.1. EL CASO DE SUPERFICIES ILIMITADAS: PROCESOS DE POISSON.

Supongamos el caso de una superficie ilimitada, en la cual el conjunto convexo K pueda extenderse, sin perder su condición de convexidad, hasta cubrir cualquier punto de la superficie. En este caso las geodésicas tienen longitud infinita y por tanto se cumple siempre (1.4). Para fijar las ideas, nos limitaremos al caso del plano euclideano y del plano hiperbólico.

Sea el conjunto convexo K y consideremos otro conjunto convexo K_0 que contiene a K. Dado un segmento S al azar tal que corte a K_0, la probabilidad (cociente de medidas) de que corte también a K, según (1.6) vale

(3.1)
$$p(S \cap K \neq \emptyset) = \frac{\pi F + E(s)L}{\pi F_0 + E(s)L_0}$$

donde F, F_0 son las áreas de K, K_0 y L, L_0 las longitudes de los contornos ∂K, ∂K_0 respectivamente.

Dados n segmentos S_i de la misma longitud media $E(s)$, que se sabe cortan a K_0, la probabilidad de que exactamente m de ellos corten a K (ley binomial), es

(3.2)
$$P_m = \binom{n}{m}\left(\frac{\pi F + E(s)L}{\pi F_0 + E(s)L_0}\right)^m \left(1 - \frac{\pi F + E(s)L}{\pi F_0 + E(s)L_0}\right)^{n-m} .$$

Supongamos que K_0 se extiende de manera que llega a cubrir cualquier punto del plano (euclidiano o hiperbólico), de manera que $F_0 \longrightarrow \infty$, $L_0 \longrightarrow \infty$. Aquí aparece una diferencia fundamental entre los planos. Si K cumple ciertas condiciones (h-convexidad), por ejemplo, si es un círculo, cuyo radio tiende a infinito, para el plano euclidiano es $L_0/F_0 \longrightarrow 0$, mientras que para el plano hiperbólico es $L_0/F_0 \longrightarrow 1$ (ver [10]). Para incluir en una sola fórmula los dos casos, introducimos la constante ε tal que $\varepsilon = 0$ para el caso euclidiano y $\varepsilon = -1$ para el caso del plano hiperbólico. Tendremos entonces que

(3.3) $$\frac{L_o}{F_o} \longrightarrow -\varepsilon \quad .$$

Supongamos ahora que, al mismo tiempo que $F_o \longrightarrow \infty$ de la manera dicha (K_o tiende a cubrir todo el plano), también el número de segmentos que cortan a K_o tiende a infinito, de manera tal que se cumpla

(3.4) $$\frac{n}{F_o} \longrightarrow \lambda \quad , \quad \lambda = \text{constante} \quad ,$$

o sea, λ viene a ser el número de segmentos por unidad de área del plano.

Con esta condición, por el paso al límite clásico que hace pasar de la ley binomial a la de Poisson, de (3.2) se deduce, para $n \to \infty$,

(3.5) $$p_m \longrightarrow \frac{(\lambda H)^m}{m!} \exp(-\lambda H) \quad , \quad H = \frac{\pi F + E(s)L}{\pi - \varepsilon E(s)} \quad .$$

Un conjunto de segmentos distribuidos en todo el plano (euclideano o hiperbólico) en las condiciones anteriores, se dice que constuye un *proceso de Poisson* de intensidad λ. Si $E(s) = 0$ es $H = F$ y se tiene un proceso de Poisson de puntos de intensidad λ. El valor medio del número de segmentos que tienen punto común con un conjunto convexo de prueba K colocado al azar en el plano, es λH, o sea, depende de λ (número de segmentos por unidad de área), de $E(s)$ (valor medio de las longitudes de los segmentos del proceso), que son características del proceso, y además del área F y del perímetro L de K.

Siguiendo a PARKER y COWAN [3], podemos observar que si D_r es la distancia del origen al r-ésimo segmento más próximo, la probabilidad de que D_r sea superior a x es igual a la probabilidad de que un círculo de radio x colocado al azar en el plano, no tenga punto común con más de $r-1$ segmentos, o sea

$$p(D_r > x) = \sum_{m=0}^{r-1} \frac{(\lambda H)^m}{m!} \exp(-\lambda H)$$

con H dado por (3.5) donde

$$F = \pi x^2 \quad , \quad L = 2\pi x$$

para el caso euclideano, y

$$F = \pi(\cosh x - 1) \quad , \quad L = 2\pi \operatorname{senh} x$$

en el caso hiperbólico.

Para $r = 1$ se tiene la probabilidad de que la distancia de un punto dado al azar al segmento más próximo sea mayor que x y por tanto, la función densidad para D_1 será la derivada, cambiada de signo, o sea, vale

$$2\lambda(\pi x + E(s)) \exp(-\lambda(\pi x^2 + 2xE(s))$$

para el caso euclideano (PARKER y COWAN [3]), y

$$2\lambda\pi(\pi + E(s))^{-1} (\pi \operatorname{senh} x + E(s) \cosh x) \exp(-\lambda H))$$

donde hay que poner

$$H = \frac{2\pi}{\pi + E(s)} (\pi(\cosh x - 1) + E(s) \operatorname{senh} x)$$

para el plano hiperbólico.

3.2. VALORES MEDIOS.

Queremos ver ahora que ocurre con los valores medios estudiados en 1.2 al pasar a un proceso de Poisson.

Para ello observamos que si el conjunto convexo K es interior al conjunto convexo K_0 y consideramos que los segmentos S_i considerados en 1.2 son segmentos que tienen punto común con K_0 (no necesariamente con K) las fórmulas (1.13) y (1.14) valen igualmente con solo sustituir los denominadores (medidas del conjunto de casos posibles) por $\pi F_0 + E(s)L_0$. Tenemos por tanto, par el caso finito de K y K_0 que lo contiene

$$(3.6) \qquad E\left(\sum \alpha_i\right) = \frac{n\pi F E(s)}{\pi F_0 + E(s)L_0}, \quad E(N) = \frac{n(n-1)\pi F(E(s))^2}{(\pi F_0 + E(s)L_0)^2} .$$

Si suponemos que K_0 se expande a todo el plano, al mismo tiempo que n crece según la expresión (3.4), resulta

$$(3.7) \qquad E\left(\sum \alpha_i\right) \longrightarrow \frac{\lambda\pi E(s)F}{\pi - \varepsilon E(s)}, \quad E(N) \longrightarrow \frac{\lambda^2\pi(E(s))^2 F}{(\pi - \varepsilon E(s))^2}$$

que serán los valores medios de $\sum \alpha_i$ (suma de las longitudes de las partes de segmentos del proceso que son interiores a K) y N (número de puntos de intersección entre segmentos del proceso, que son interiores a K).

Para el caso del plano euclidiano, estos valores son los mismos que han sido obtenidos, con un enfoque tal vez más general,por PARKER y COWAN en [3].

BIBLIOGRAFIA

[1] COLEMAN, R.: "*Sampling procedures for the lengths of random straight lines*", Biometrika, 59, 1972, 415-426.

[2] COLEMAN, R.: "*The distance from a given point to the nearest end of one member of a random process of linear segments*", Stochastic Geometry, ed. Harding and Kendall, Wiley, London, 1974.

[3] PARKER, Ph. — COWAN, R.: "*Some properties of line segment processes*", Journal Appl. Prob. 13, 1976, 96-107.

[4] SANTALO, L.A.: "*Integral Geometry on surfaces*", Duke Math. Journal, 16, 1949,361-375.

[5] SANTALO, L.A.: "*Integral geometry on surfaces of constant negative curvature*", Duke Math. Journal, 10, 1943, 687-704.

[6] SANTALO, L.A.: "*Convexidad en el plano hiperbólico*", Rev. Mat. y Fis. teórica Universidad Nacional de Tucumán, 19, 1969, 173-183.

[7] SANTALO, L.A.: "*Introduction to Integral Geometry*", Hermann, París, 1953.

[8] SANTALO, L.A.: "*Sobre segmentos al azar en* E_n ", Rev. Mat. y Fis. teórica, Universidad Nacional de Tucumán, (en prensa).

[9] SANTALO, L.A.: "*Integral Geometry and Geometric Probability*", Encyclopedia of Mathematics, Addison-Wesley, Reading, 1976.

[10] SANTALO, L.A. — YAÑEZ, I.: "*Averages for polygons formed by random lines in euclidean and hyperbolic planes*", J. Appl. Probab. 9, 1972, 140-157.