FUNDAÇÃO GETÚLIO VARGAS

SUMMA BRASILIENSIS MATHEMATICÆ

SÔBRE FIGURAS PLANAS HIPERCONVEXAS

POR

L. A. SANTALÓ

- FASC. 11

ANO I OUTUBRO DE 1946 VOL. I

1. A SUMMA BRASILIENSIS MATHEMATICÆ tem por objetivo a publicação de trabalhos originais, nacionais ou estrangeiros, sôbre qualquer ramo das ciências matemáticas.

2. Os trabalhos só serão publicados após o pronunciamento da comissão de redação, que não se responsabiliza, entretanto, pelas opiniões ou conclusões defendidas nos trabalhos aprovados.

3. Para tornar mais rápida e eficiente a publicação dos trabalhos, a SUMMA BRASILIENSIS MATHEMATICÆ circulará em fascículos que sairão independentemente de prazos prefixados, contendo cada qual apenas um artigo. Os fascículos serão reunidos em volumes de 400 a 500 páginas, e a tiragem efetiva será de 2 000 exemplares.

Aos autores serão oferecidos gratuitamente 150 exemplares do seu trabalho e uma coleção completa da SUMMA BRASILIENSIS MATHEMATICÆ.

4. Os originais enviados para publicação devem obedecer às normas seguintes. Textos dactilografados em espaço 2, de um só lado do papel. Logo abaixo do título, que deve ser sintético e significativo, citar o nome do autor (es), o da instituição em que foi feito o trabalho e o número de figuras. Escrever em fôlha separada as legendas das figuras. As ilustrações (fotografias ou desenhos a nanquim) e gráficos ou tabelas devem ser numerados e trazer no verso o nome do autor, o título do trabalho e a legenda respectiva. Se for desejo do autor que as ilustrações sejam intercaladas no texto, devem ser assinalados neste os locais onde devem ficar. Sendo preferível reuni-las em estampas fora do texto, poderá o autor enviá-las já paginadas e com indicação das reduções a serem feitas. A página útil de estampa é de 18 cm x 11 cm.

5. Os trabalhos redigidos em português, italiano ou espanhol serão resumidos em inglês; os redigidos em francês, inglês ou alemão, em português.

6. As indicações bibliográficas deverão ser reunidas no fim do trabalho, em ordem alfabética por autores; ano de publicação; título completo e textual; nome do periódico grifado; número do volume, do fascículo, da primeira e da última páginas e número de estampas, figuras ou gráficos. Citações de livros deverão incluir também o número da edição (quando não for a primeira) e os nomes do editor e da cidade de publicação.

7. A SUMMA BRASILIENSIS MATHEMATICÆ é distribuída por venda, ou permuta com instituições científicas de matemática de todo o mundo. Serão aceitas, com agrado, críticas ou sugestões que visem o aprimoramento desta série científica. Tôda correspondência deve ser endereçada ao *Departamento de Pesquisas e Documentação da Fundação Getúlio Vargas*, Caixa Posta 4 081, Rio de Janeiro, Brasil.

SOBRE FIGURAS PLANAS HIPERCONVEXAS(¹)

por
L. A. SANTALÓ

Dedicado a mi querido maestro PROF. JOSÉ G. ALVAREZ UDE, en ocasión de su 70° aniversario

O. INTRODUCCIÓN. A. E. MAYER introdujo en 1935 [6] (²) la noción de conjuntos de puntos hiperconvexos (*überkonvex*) del plano. Su definición es la siguiente:

Sea dada en el plano una curva convexa y cerrada E con centro de simetria, que no contenga puntos angulosos ni segmentos rectilineos. Toda curva del plano deducida de E por una traslación paralela se llama una *curva unitaria* y todo arco de curva unitaria que contenga, a lo sumo, un par de puntos opuestos, se dice un *arco unitario*. Con estas definiciones, un conjunto H se dice que es hiperconvexo respecto E, cuando dos cualesquiera de sus puntos pueden unirse por un arco unitario y cualquier arco unitario que une dos puntos de H está totalmente contenido en H.

El nombre de conjuntos "hiperconvexos" está justificado, pues se demuestra inmediatamente [6], que todo conjunto hiperconvexo es convexo.

Naturalmente que la condición de hiperconvexidad depende esencialmente de la curva convexa E de referencia. Se demuestra que cualquier conjunto convexo es hiperconvexo respecto curvas unitarias convenientes [1, pág. 15].

El objeto de este trabajo es estudiar ciertas propiedades de los conjuntos hiperconvexos cerrados de puntos del plano, a los cuales llamaremos de manera general "figuras hiperconvexas". En I damos una definición de la hiperconvexidad distinta de la de MAYER y que a veces es mas útil que esta última para ciertas aplicaciones, por ejemplo para obtener la desigualdad (2.8) que relaciona el área de toda figura hiperconvexa con el área limitada por la curva unitaria y el área mixta de Minkowski entre ambas. En II nos referimos en particular a las figuras hiperconvexas respecto las circunferencias de radio r como curvas unitarias, a las cuales llamaremos, abreviadamente, figuras r-hiperconvexas. De estas figuras damos en el n. 4 las fórmulas integrales (4.6) y en el n. 5 algunos problemas de máximos y mínimos referentes a las mismas.

---

(1) Manuscrito recebido pela F. G. V. em 12 de Junho de 1946.

(2) Los paréntesis cuadrados [ ] se refieren a la bibliografia al final.

I. UNA DEFINICION Y UNA DESIGUALDAD PARA FIGURAS HIPERCONVEXAS

1. **Una definición de figuras hyperconvexas**. La definición de MAYER recordada anteriormente de conjuntos hiperconvexos, es la generalización natural de la definición de conjuntos convexos que dice: un conjunto de puntos del plano se dice que es convexo, cuando contiene el segmento de recta que une dos cualesquiera de sus puntos.

Si en lugar de considerar conjuntos de puntos en toda su generalidad, se consideran unicamente regiones limitadas del plano, se demuestra que un conjunto convexo puede definirse también como una región limitada del plano tal que toda recta encuentra al contorno de la misma a lo sumo en dos puntos o bien en un segmento [1,pág. 5].

En esta definición y en todo lo que sigue, se entiende por "región" un dominio simplemente conexo, más los puntos de su frontera; los puntos de la frontera de la región diremos que forman su "contorno". A una región limitada del plano que forme un conjunto de puntos hiperconvexo (según MAYER), la llamaremos una "figura hiperconvexa". La última definición de convexidad puede entonces generalizarse a la definición de figuras hiperconvexas mediante el siguinte

TEOREMA. *Para que una región H del plano sea una figura hiperconvexa respecto un sistema de curvas unitarias E, es necesario y suficiente que se cumplan las dos condiciones*: (*a*) *Ninguna curva unitaria E puede estar contenida en H*: (*b*) *El contorno de H no puede ser cortado en mas de dos puntos por una curva unitaria. E, excepto en el caso en que contenga un arco de E.*

Dividiremos la demostración en dos partes:

1. *Las condiciones son necesarias*. Supongamos que la figura H sea hiperconvexa. Vamos a demostrar que se cumplen las condiciones (*a*) y (*b*).

a) Si $E \neq H$ y pudiera ser $E \subset H$, quedarian puntos de H cuya distancia entre si seria superior al diámetro de E y por tanto no podrian unirse por un arco unitário, como exige la hiperconvexidad.

b) Supongamos que E tuviera n puntos $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ $(n > 2)$ comunes con el contorno de H. No pudiendo ser $E \subset H$, alguno de los arcos en que los puntos Ai dividen a E es exterior a H; sea el arco A_nA_1. Siendo H hiperconvexa, este arco A_nA_1 debe ser mayor que $\frac{1}{2}E$, representando por $\frac{1}{2}E$ a un arco de E que contenga dos puntos opuestos de E. Vamos a demostrar entonces que todos los arcos A_1A_2, $A_2A_3, \ldots$ $A_{n-1}A_n$ de E formam parte del contorno de H. En efecto, supongamos que A_iA_{i+1} fuera interior a H; tomemos un punto $P \subset A_iA_{i+1}$; por ser P interior a H, se puede trazar un círculo C_P de centro P y radio suficientemente pequeño para que todos sus puntos sean interiores a H. Tomemos analogamente un punto Q del arco A_nA_1, exterior a H, y tracemos um círculo C_Q de centro Q y radio suficientemente pequeño para que todos sus puntos sean exteriores a H. Como se supone $n > 3$, o bien será $i \neq 1$, o bien $i + 1 \neq 3$; supongamos $i \neq 1$. Tomemos un punto X interior a H y próximo a A_1 y un punto Y exterior a H y próximo a A_i. Tomando X suficientemente próximo a A_1 y Y suficientemente próximo a A_i, existe una curva unitaria E que pasa por X e Y y corta a C_P y C_Q. Sea M un punto de esta curva unitaria E contenido en C_P y N otro punto de E contenido en C_Q. Uno de los dos arcos MYX o MNX es igual o mayor que $\frac{1}{2}E$ y por tanto, por suponer que H es hiperconvexo, deberia estar totalmente contenido en H. Como esto no ocurre, por ser Y, N exteriores, llegamos a una contradicción. Por tanto, o bien es $n \leq 2$, o bien todos los arcos consecutivos $A_1A_2, A_2A_3, \ldots,$ $A_{n-1}A_n$ pertenecen al contorno de H, de acuerdo con la condición (b).

2. *Las condiciones son suficientes*. Supongamos que se cumplan las condiciones (a) y (b). Queremos demostrar que H es hiperconvexa. Procederemos por reducción al absurdo.

Si H no es hiperconvexa, o bien existen dos puntos de H cuya distancia es mayor que el diámetro de E, o bien existe un arco de E, igual o menor que $\frac{1}{2}$ E, cuyos extremos pertencen a H y no está contenido en H. En el primer caso, por ser H una región y por tanto conexo, habria dos puntos interiores a H cuya distancia seria igual al diámetro de E; los arcos de E que unen estos dos puntos, e no son ambos interiores a H (caso segundo), o bien, los dos son interiores a H; pero esto último no es posible, pues entonces E seria interior a H, contra la condición (a).

Queda el caso en que exista un arco de E, igual o menor que $\frac{1}{2}$ E, cuyos extremos pertenecen a H y no esté contenido en H.

De este arco se puede tomar una parte AB tal que los extremos A, B pertenezcan al contorno de H y todos los demás puntos sean exteriores. Los puntos A, B dividen a E en dos arcos, uno $\alpha \leq \frac{1}{2}E$ y otro $\beta > \frac{1}{2}E$, siendo todos los puntos de α (menos los extremos A, B) puntos exteriores a H. Por la condición (b) los puntos de β son también o todos exteriores o todos interiores a H. Distinguiremos estos dos casos:

1. Los puntos del arco β, excepto los extremos A, B, son todos exteriores a H. Tomemos un punto P de α y un punto Q de β,

exteriores a H. Con centros P y Q se pueden trazar dos cículos C_P y C_Q de radios suficientemente pequeños para que todos sus puntos sean exteriores a H. Tomemos un punto X próximo a A e interior a H y otro Y, próximo a B y también interior a H. Tomando X, Y suficientemente próximos a A, B respectivamente, existirá una curva unitaria E que pasará por X, Y y cortará a C_P y C_Q. Sea M un punto de esta E contenido en C_P y N un punto de E contenido en C_Q. En cada uno de los arcos XM, MY, YN, NX de E deberá esta curva tener por lo menos un punto común con la frontera de$H$, contra la condición (b).

2. Los puntos del arco β, excepto los extremos A, B, pertenecen a H. En este caso consideremos el segmento de recta AB y la recta $A'B'$ paralela a AB tal que toque al arco AB del contorno de H, dejando el mismo de un mismo lado que el segmento de recta

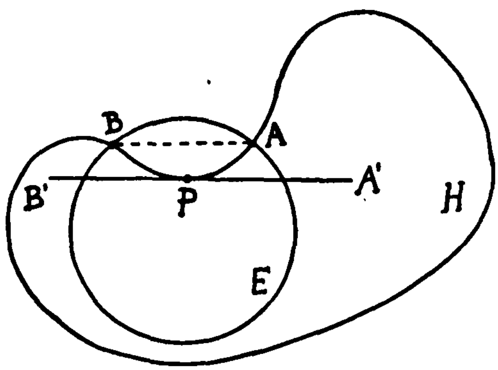

FIG. 1

AB (fig. 1). Sea P el punto de apoyo de $A'B'$ con el contorno de H ó uno de ellos si hay varios. Como el segmento AB es exterior a H, toda la figura limitada por este segmento AB mas el arco APB del contorno de H, quedará a un mismo lado de la recta $A'B'$ y como esta figura es externa a H, en un entorno de P, en el lado opuesto, todos los puntos serán interiores a H. Trasladando E hasta ser tangente en P a $A'B'$ del lado opuesto de AB, o bien resultará toda E interior a H (lo cual no es posible por (a) o bien cortará al contorno de H en otros dos puntos, lo cual contradice (b).

Queda con esto demostrado el teorema enunciado.

Utilizando la propiedad ya enunciada en la introducción, de que toda figura hiperconvexa es también convexa, resulta que por cada punto del contorno de una figura hiperconvexa H, tal como ocurre para las figuras convexas [3, pág. 6], pasará por lo menos una recta de apoyo, o sea, una recta que tiene punto común con H dejando toda la figura de un mismo lado.

En consecuencia, dado un punto cualquiera P del contorno de H, colocando E de manera que tenga en P una recta de apoyo común con el contorno de H y no pudiendo ser E totalmente interior a H ni cortar a su contorno en mas de dos puntos, deberá quedar E en posición tal que contenga a H en su interior. Se tiene por tanto otro teorema fundamental de MAYER: *Por cada punto del contorno de una figura hiperconvexa H respecto las curvas uniarias E, pasa una E que contiene a H.*

2. **Una desigualdad para figuras hiperconvexas.** Sea H una figura hiperconvexa respecto las curvas unitarias E (recordemos que las curvas E tienen centro de simetria). La propiedad demostrada anteriormente de que el contorno de H no puede tener con cada curva E mas de dos puntos comunes, va a servirnos para obtener algunas relaciones referentes a figuras hiperconvexas.

Recordemos que toda figura convexa plana puede definirse por su "función de apoyo" $p = p(\varphi)$, siendo $p(\varphi)$ la distancia desde un punto fijo interior a la figura a la recta de apoyo perpendicular a la dirección. . El área de la figura convexa, expresada por medio de la función de apoyo $p = p(\varphi)$, se escribe

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(p^2 - p'^2)\, d\varphi \qquad (2.1)$$

siendo $p' = dp/d\varphi$ [2, pág. 29], [3, pág. 66].

La figura hiperconvexa H podrá, por tanto, definirse también por su función de apoyo $p = p(\varphi)$ y analogamente la curva unitaria E por otra función de apoyo $p_1 = p_1(\varphi)$. Sea O el centro de simetria de E.

Queremos hallar el área cubierta por los puntos O para todas las posiciones de E en que el área que ella limita tiene algún punto común con la figura H. Para ello, observemos que, para cada dirección φ, la máxima distancia de O a la recta de apoyo de H normal a la dirección φ es $p_1(\varphi+\pi)$ (fig. 2). Por tanto el área cubierta por los puntos O será el área de la figura convexa cuya función de apoyo es $p(\varphi)+p_1(\varphi+\pi)$. Esta área, según (2.1) vale.

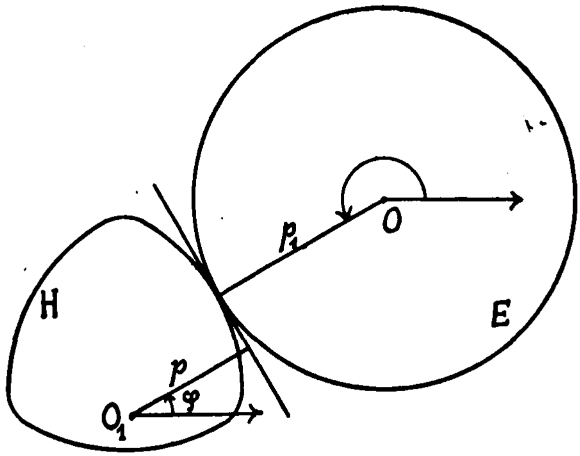

FIG. 2

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[\left(p(\varphi)+p_1(\varphi+\pi)\right)^2-\left(p'(\varphi)+p'_1(\varphi+\pi)\right)\right]d\varphi$$

$$= F_H + F_E + 2\,F_{HE} \tag{2.2}$$

siendo F_H el área de H, F_E el área de E y habiendo puesto

$$F_{HE} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[\,p(\varphi)p_1(\varphi+\pi)-p'(\varphi)\,p'_1(\varphi+\pi)\right]d\varphi. \tag{2.3}$$

Esta integral es la llamada *área mixta* de Minkowski entre H y la figura simétrica de E respecto un punto; como E tiene centro de simetiia, equivale al área mixta de H y E [2, pág. 34].

El área anterior (2.2) cubierta por los puntos O en todas las posiciones en que la figura limitada por E tiene puntos comunes con H, se compone de dos partes: el área M_0 correspondiente a las posiciones de E en que no tiene ningún punto común con el contorno de H (posiciones en las que $H \subset E$) y el área M_2 correspondiente a las posiciones de E en que corta al contorno de H en 2 puntos. Las posiciones en que E tiene un solo punto común con el contorno de H, posiciones de contacto, son excepcionales, es decir, los puntos O forman un conjunto de área cero. La fórmula (2.2) se puede por tanto escribir

$$M_0 + M_2 = F_H + F_E + 2\,F_{HE}. \tag{2.4}$$

Por otra parte, es sabido que de manera general, si el contorno de una figura H puede tener 2, 4, 6,... puntos comunes con una curva convexa E con centro de simetria, y se representa por M_i el área cubierta por el centro de E en las posiciones de esta curva en que tiene i puntos comunes con el contorno de H, vale [2, pág. 35],

$$M_2 + 2\,M_4 + 3\,M_6 + \dots = 4\,F_{HE}. \tag{2.5}$$

En nuestro caso es $M_4 = M_6 = \dots = 0$ y por tanto se tiene

$$M_2 = 4\,F_{HE}. \tag{2.6}$$

De (2.4) y (2.6) de deduce

$$\begin{aligned} M_0 &= F_H + F_E - 2\,F_{HE} \\ M_2 &= 4\,F_{HE}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Ya dijimos que por cualquier punto del contorno de H se puede hacer pasar una E tal que contenga a H en su interior; como se supone que E no contiene segmentos rectilineos, al recorrer E estas posiciones de "contacto", su centro de simetria O describirá una curva cerrada, la cual limitará una curva de área $M_0 \geq 0$; unicamente será $M_0 = 0$ cuando E coincida con H. Por tanto se tiene:

TEOREMA. *Si H es una figura hiperconvexa respecto las curvas unitarias E, llamando F_{HE} al área mixta de Minkowski entre H y E, y siendo F_H y F_E las áreas respectivas de H y E, vale la desigualdad*

$$F_{HE} \leq \frac{1}{2}\,(F_H + F_E) \tag{2.8}$$

donde el signo de igualdad vale unicamente para el caso de ser H y E figuras congruentes.

Supongamos, en particular, que E sea un circulo de radio r. Entonces es sabido que siendo L_H da longitud del contorno de H, es

$$F_{HE} = \frac{1}{2}\,r\,L_H.$$

Por tanto la desigualdad (2.8) equivale a

$$F_H - r\,L_H + \pi r^2 \geq 0, \tag{2.9}$$

que se puede escribir

$$F_H - rL_H + \pi r^2 = \frac{1}{4\pi}\left[(2\pi r - L_H)^2 - (L_H^2 - 4\pi F_H)\right] \geq 0$$

de donde

$$L_H^2 - 4\pi F_H \leq (2\pi r - L_H)^2. \tag{2.10}$$

El primer miembro de esta desigualdad se llama el "déficit isoperimétrico" de la figura H. Se tiene por tanto

TEOREMA. *El déficit isoperimétrico de una figura hiperconvexa H respecto las circunferencias de radio r, está acotado superiormente por la desigualdad (2.10).*

II. FIGURAS HIPERCONVEXAS RESPECTO LAS CIRCUNFERENCIAS DE RADIO r

3. **Definiciones**. Para abreviar, *llamaremos figuras r-hiperconvexas a las figuras hiperconvexas respecto las circunferencias de radio r.*

En particular, para $r = \infty$, las figuras r-hiperconvexas serán simplesmente las figuras convexas ordinarias, puesto que las curvas unitarias se reducen a las rectas del plano.

Según el teorema del n. 1, las figuras r-hiperconvexas serán todas aquellas que: (*a*) no pueden contener a ninguna circunferencia de radio r en su interior (*b*) su contorno no puede ser cortado en mas de dos puntos por una circunferencia de radio r.

Es conocido que para el contorno de una figura convexa no pueda tener mas de dos puntos comunes (excepto el caso de tener todo un arco común) con una circunferencia de radio r, es condición necesaria y suficiente que el radio de curvatura del contorno de la figura sea siempre mayor o siempre menor que r [5]. En el caso de ser H una figura r-hiperconvexa, como puede estar contenida en el interior del círculo de radio r, no puede ser que el radio de curvatura de su contorno sea en todo punto mayor que r y por tanto se tiene: *la condición necesaria y suficiente para que una figura H sea r-hiperconvexa, es que el radio de curvatura de su contorno sea en todo punto* $\leq r$.

Consecuencia inmediata de esta propiedad es que: *si H es r-hiperconvexa y es $r_1 \geq r$, también H es r_1-hiperconvexa.*

4. Unas fórmulas integrales para las figuras r-hiperconvexas. Sea H una figura r-hiperconvexa. Supongamos dos puntos P_1, P_2 de H (fig. 3). Puesto que cualesquiera que sean estos puntos

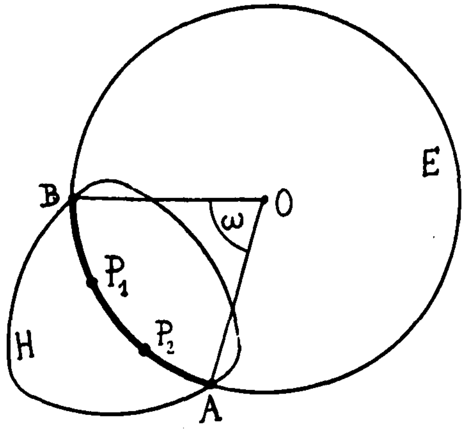

FIG. 3

P_1 (x_1, y_1), P_2 (x_2, y_2) siempre existe una circunferencia E de radio r que passa por ellos, dichos puntos P_1, P_2 pueden determinarse dando el centro O (ξ, ζ) de E y los ángulos Θ_1, Θ_2, que fijan P_1, P_2 sobre la circunferencia; es decir, Θ_1, Θ_2 son los ángulos que forman los radios OP_1 y OP_2 con una dirección fija por O.

Indicando por $dP_i = dx_i\, dy_i$ $(i = 1,2)$ a los elementos de área del plano, correspondientes a los puntos P_i, queremos expresar el producto $dP_1\, dP_2$ por medio de las coordenadas ξ, ζ, Θ_1, Θ_2. Para ello se tienen las seguientes fórmulas de transformación:

$$x_i = \xi + r \cos \Theta_i\ , \quad y_i = \zeta + r \operatorname{sen} \Theta_i \quad (i = 1,2)$$

de las cuales se puede calcular facilmente el determinante funcional

$$\left| \frac{\partial\ (x_1,\ y_1,\ x_2,\ y_2)}{\partial\ (\xi,\ \zeta,\ \Theta_1,\ \Theta_2,} \right| = r^2 \,|\operatorname{sen}\,(\Theta_1 - \Theta_2)|\, d\Theta_1\, d\Theta_2\, dO$$

habiendo puesto $dO = d\xi\, d\zeta$.

Se tiene por consiguiente

$$d\,P_1 .\, d\,P_2 = r^2\, |\operatorname{sen}\,(\Theta_1 - \Theta_2)|\, d\Theta_1\, d\Theta_2\, d\,O. \qquad (4.1)$$

Integremos esta expresión a todos los pares de puntos P_1, P_2 contenidos en H. En el primer miembro resulta F_H^2. Para calcular la integral del segundo miembro, basta observar que para cada posición de O, los ángulos θ_1, θ_2 pueden variar entre cero y el ángulo ω que formam los dos radios de E que unem O con los puntos A, B en que E corta al contorno de H, o sea, $\omega = \widehat{AOB}$. Se tiene, además,

$$\int_0^\omega \int_0^\omega |\text{sen}\,(\theta_1 - \theta_2)|\, d\theta_1\, d\theta_2 = 2\,(\omega - \text{sen}\,\omega). \tag{4.2}$$

Por consiguiente, se llega a la fórmula integal

$$\int (\omega - \text{sen}\,\omega)\, dO = \frac{1}{r^2} F_H^2, \tag{4.3}$$

habiendo multiplicado el segundo miembro por 2, puesto que a cada par P_1, P_2 corresponden dos posiciones simétricas de O. La integración en (4.3) está extendida a todos los puntos O del plano, siendo $\omega = O$ para aquellos puntos que son centros de circunferencias E que no cortan al contorno de H.

Por outra parte, tiene lugar una fórmula integral conocida, válida para cualquier figura plana de área F_H, según la cual, suponiendo una circunferencia móvil de centro variable O y radio constante r, si λ es la longitud del arco de circunferencia que en cada posición de O es interior a la figura dada, se tiene

$$\int \lambda\, dO = 2\pi r\, F_H \tag{4.4}$$

extendida la integración a todo el plano, siendo $\lambda = 0$ para los puntos O que son centros de circunferencias de radio r que no cortan a la figura dada [2, pág. 33].

Aplicando esta fórmula (4.4) a nuestro caso de una figura hiperconvexa H respecto las circunferencias de radio r, será $\lambda = \omega\, r$ y por tanto queda

$$\int \omega\, dO = 2\pi\, F_H. \tag{4.5}$$

De (4.3) y (4.5) se deduce el siguiente

TEOREMA. *Dada una figura hiperconvexa H respecto las circunferencias E de radio r como curvas unitarias, llamando ω al ángulo central correspondiente al arco de E que es interior a H en cada posi-*

ción del centro O (ξ, ζ) de E (fig. 3), y siendo $dO = d\xi\, d\zeta$, se verifican las fórmulas integrales

$$\int \omega \, dO = 2\pi F_H$$
$$\int \operatorname{sen} \omega \, dO = 2\pi F_H - \frac{F_H^2}{r^2} \tag{4.6}$$

siendo F_H el área de H y estando las integraciones extendidas a todos los puntos O del plano.

Cuando $r \to \infty$, las circunferencias E tienden a las rectas del plano y las figuras r-hiperconvexas H son todas las figuras convexas. Veamos como se transforman las fórmulas (4.6) para este caso límite.

El punto O (ξ, ζ) puede determinarse por el punto $A(x,y)$ del contorno de H, mas el ángulo θ que forma la tangente al contorno de H en A con la normal al radio AO. Además, el punto A queda determinado, sobre el contorno de H, por el arco s del mismo. Queremos expresar $dO = d\xi\, d\zeta$ en función de las coordenadas s, θ (fig. 4.)

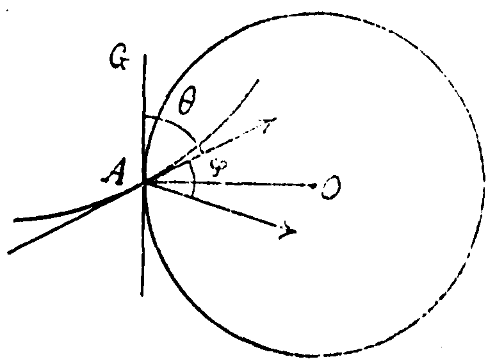

FIG. 4

Tenemos

$$\xi = x(s) + r \operatorname{sen}(\varphi + \theta), \quad \zeta = y(s) - r \cos(\varphi + \theta) \tag{4.7}$$

siendo φ el ángulo que forma la tangente al contorno de H en A con la dirección del eje x. De (4.7) se deduce

$$\left| \frac{\partial(\xi,\zeta)}{\partial(s,\theta)} \right| = r \; x' \operatorname{sen}(\varphi + \theta) - y' \cos(\varphi + \theta)$$

y como $x' = \cos \varphi$, $y' = \operatorname{sen} \varphi$,

$$\left| \frac{\partial(\xi,\zeta)}{\partial(s,\theta)} \right| = r \operatorname{sen} \theta$$

y por consiguiente

$$dO = r \operatorname{sen}\Theta \, d\Theta \, ds. \tag{4.8}$$

Recordemos ahora que para medir conjuntos de rectas del plano se toma la integral de una expresión diferencial de segundo orden dG que en el caso de ser la recta G la indicada en la fig. 4, que forma en A un ángulo Θ con la tangente al contorno de H, vale [2, pág. 10].

$$dG = \operatorname{sen}\Theta \cdot d\Theta \, ds. \tag{4.9}$$

Por consiguiente, haciendo corresponder a cada circunferencia E que corta al contorno de H, la recta G tangente a E en uno de los puntos de intersección, es

$$dO = r d\, G. \tag{4.10}$$

Volvamos ahora a las fórmulas (4.6). En lugar de w se puede introducir la longitud $\sigma = \omega y$ del arco de E que queda interior a H. Queda entonces, según (4.10),

$$\int \sigma \, dG = 2\pi \, F_H. \tag{4.11}$$

Cuando $r \to \infty$, σ pasa a ser igual a la longitud de la cuerda que la recta G determina en H. Esta fórmula (4.11) coincide entonces con una fórmula conocida de geometria integral [2, pág. 19] o probabilidades goemétricas. Hay que observar que en la fórmula (4.11) aparece el factor 2 debido a que se consideran las rectas orientadas, puesto que cada recta es posición limite de dos circunferencias, una de cada lado.

La fórmula (4.3), para $r \to \infty$, se puede escribir

$$\int r\left(\frac{\sigma}{r} - \operatorname{sen}\frac{\sigma}{r}\right) dG = \int \left(\frac{\sigma^3}{3!\, r^2} - \frac{\sigma^4}{4!\, r^3} + \cdots + \right) dG = \frac{1}{r^2} F_H^2$$

y para $r = \infty$, resulta

$$\int \sigma^3 \, dG = 6 F_H^2 \tag{4.12}$$

Esta es una fórmula notable debida a Crofton [2, pág. 20], [4, pág. 84], la cual es válida para cualquier figura convexa, siendo

σ la longitud de la cuerda que la recta G determina en ella. Igual que antes, en (4.12) se consideran las rectas "orientadas", es decir, cada una aparece contada dos veces correspondientes a sus dos sentidos: si se quiere prescindir de esta orientación, hay que dividir por 2 el segundo miembro.

5. Unos problemas de máximos y mínimos referentes a figuras r-hiperconvexas. Muchos problemas clásicos de máximos y minimos referentes a figuras convexas, se pueden estudiar para el caso de considerar unicamente figuras hiperconvexas respecto las circunferencias de radio r. Em muchos casos el resultado es el mismo, es decir, la condición restrictiva de la hiperconvexidad no influye en el resultado; esto ocurrirá siempre que la figura convexa extremal sea hiperconvexa. Hay casos, sin embargo, en que la figura convexa extremal no es hiperconvexa respecto las curvas unitarias consideradas y entonces aparece natural de plantearse el problema de buscar las figuras extremales, si las hay, entre las del conjunto de todas las figuras hiperconvexas.

Limitándonos al caso de figuras r-hiperconvexas, vamos a ver algunos ejemplos de problemas de este tipo.

1. *Entre todas las figuras r-hiperconvexas que tienen un mismo circulo circunscrito, hallar las de minimo diámetro.* Recordemos que se llama "círculo circunscrito" a una figura convexa al circulo de radio mínimo que puede contener a la figura [3, pág. 54]. Para las figuras convexas, el diámetro mínimo de las figuras que tienen un mismo circulo circunscrito es el correspondiente al triángulo equilátero [3, pág. 78]. Veamos que ocurre para las figuras r-hiperconvexas.

Sea H una figura general r-hiperconvexa cuyo círculo circunscrito C_R sea de radio R. Puesto que C_R es el mínimo círculo que contiene a H, al colocar H en el interior de C_R, el contorno de H deberá tener o bien dos puntos diametralmente opuestos comunes con la circunferencia de C_R o bien deberá tener con ella por lo menos tres puntos comunes formando un triángulo que contiene al centro de C_R, puesto que de no ocurrir ninguno de estos casos el radio R se podria disminuir. En el primer caso, el diámetro de H es $2R$ y vamos a ver que no es ningun valor extremal, puesto que hay figuras r-hiperconvexas con el mismo circulo circunscrito y diámetro $< 2R$.

En el segundo caso, si A, B, C son tres de los puntos comunes del contorno de H con C_R, tales que el triángulo ABC contiene el centro O de C_R, por ser H r-hiperconvexa, H contendrá los arcos de circunferencia de radio r que unen entre si A, B, C, o sea, los arcos AB, BC, CA,. Queda así formado un triángulo curvilineo ABC, cuyos lados son arcos de circunferencia de radio r, el cual está contenido en H. Como este triángulo tiene el mismo círculo circunscrito C_R que H y, por estar contenido en H, tiene el diámetro igual o menor que el de H, se deduce que para el problema propuesto de hallar el diámetro mínimo, basta limitarse a considerar triángulos curvilineos *inscritos en* C_R.

Para abreviar llamaremos triángulo r-curvilineo a todo triángulo convexo formado por arcos de circunferencia de radio r. Evidentemente todo triángulo r-curvilineo es r-hiperconvexo. Un triángulo r-curvilineo con sus tres lados iguales se dirá equilátero. Para terminar con el problema propuesto bastará demostrar ahora que: entre todos los triángulos r-curvilineos que tienen a C_R como circulo circunscrito, el equilátereo es el de mínimo diámetro.

Sea ABC un triángulo r-curvilineo equilátero inscrito en C_R. Distinguiremos dos casos:

a) $r \geq \overline{AB}$, representando por $\overline{AB}$ el segmento de recta que tiene por extreos A y B y por $\widehat{AB}$ la longitud del arco de radio r que une los mismos puntos. En este caso el diámetro del triángulo r-curvilineo ABC es $\overline{AB}$. Cualquier otro triángulo r-curvilineo que tenga a C_R como circulo circunscrito,colocándolo con un vértice coincidente con A, debe tener un vértice en el arco BC de C_R o bien uno en el arco AB y otro en el arco AC; en el primer caso, si B' es el vértice contenido en el arco BC, es $\overline{AB} < \overline{AB'}$; en el segundo caso es $\overline{B'C'} > \overline{BC} = \overline{AB}$. Por tanto, en los dos casos el diámetro es mayor que el diámetro del triángulo equilátero r-curvilineo ABC.

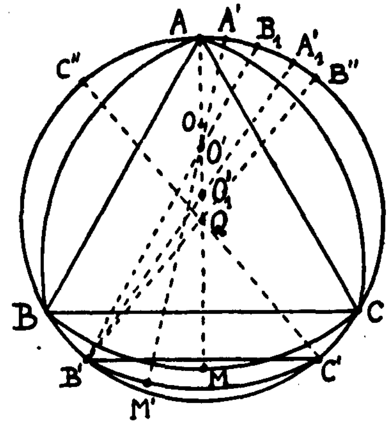

FIG. 5

b) $r < AB$. En este caso el diámetro del triángulo r-curvilineo equilátero ABC es igual a la distancia de A al punto medio M

del arco BC, o sea, si O es el centro del círculo de radio r que pasa por B, C el diámetro es $\overline{AM} = r + \overline{OA}$. Vamos a demostrar que también en este caso este diámetro es el mínimo entre los diámetros de todos los demás triángulos r-curvilineos que tienen el circulo circunscrito C_R. Otro triángulo r-curvilineo $A'B'C'$ que tenga C_R como circulo circunscrito, si no es equilátero, tendrá un lado $\widehat{B'C'} < \widehat{BC}$. Coloquemos este lado de manera que la recta $B'\,C'$ sea paralela a BC (fig. 5). Sea O' el centro del arco $B'\,C'$ de radio r, y Q el centro de C_R. Por ser C_R el menor círculo que contiene $A'B'C'$, el vértice A' debe estar contenido en el arco $B''C''$ de C_R, siendo B'', C'' los puntos opuestos de B', C' respectivamente. Sea B_1 el nuevo punto en que la recta $B'O'$ corta a C_R. Si A' está contenido en el arco $B_1\,A$ de C_R, el diámetro de $A'\,B'\,C'$ es $A'\,M' = A'\,O' + r$, siendo $r = O'\,M'$; como $\overline{A'\,O'} > \overline{O'\,A}$, resulta que en este caso el diámetro del triángulo r-curvilineo $A'\,B'\,C'$ es superior al del triángulo ABC.

Si A' está contenido en el arco B_1B'' de C_R, siendo por ejemplo el punto A'_1, el diámetro de $A'\,B'\,C'$ es ahora $\overline{A_1'\,B'}$; sea O'_1 el punto en que la recta $A_1'B'$ corta a AM; es

$$O'_1\,A'_1 > O'_1\,A \quad , \quad O'_1\,B' > O_1'\,M$$

de donde, sumando

$$A'_1\,B' > A\,M$$

es decir, también en este caso, el diámetro del triángulo r-curvilineo $A'\,B'\,C'$ resulta superior al del triángulo equilátero r-curvilineo ABC.

Para un triángulo r-curvilineo equilátero ABC inscrito en un círculo de radio R, se calcula inmediatamente que el diámetro D vale

$$\text{para} \quad r \geq R\sqrt{3} \quad , \quad D = \sqrt{3}\;R.$$

$$\text{para} \quad R \leq r \leq R\sqrt{3} \quad , \quad D = \frac{3}{2}R + r - \sqrt{r^2 - \frac{3}{4}R^2}.$$

Por tanto se puede enunciar el siguiente resultado:

Entre todas las figuras r-hiperconvexas cuyo circulo circunscrito C_R *tiene un radio dado R, el diámetro minimo es el correspondiente al triángulo r-curvilineo equilátero inscrito en* C_R. *Entre el diámetro D* *de toda figura r-hiperconvexa y el radio R de su circulo circunscrito existen, por tanto, las desigualdades*

$$D \geq R\sqrt{3} \quad para \quad r \geq R\sqrt{3} \tag{5.1}$$

$$D \geq \frac{3}{2} R + r - \sqrt{r^2 - \frac{3}{4} R^2} \quad para\, R\sqrt{3} \geq r \geq R.$$

Los triángulos r-curvilíneos equiláteros no son las únicas figuras r-hiperconvexas que tienen el diámetro mínimo; cualquier otra figura r-hiperconvexa inscrita en C_R y con el mismo diámetro, es también una figura extremal.

Las figuras convexas ordinarias coinciden con las r-hiperconvexas para el caso $r = \infty$. Por tanto, para cualquier figura convexa, entre el diámetro D y el radio R de su círculo circunscrito debe existir la relación $D \geq \sqrt{3}\, R$, lo cual es conocido [3, pág. 78].

2. *Hallar el valor máximo del espesor de las figuras r-hiperconvexas que tienen un circulo inscrito dado.* Se llama "circulo inscrito" de una figura convexa, al círculo, o a uno cualquiera de ellos si hay varios, de radio máximo que puede estar contenido en la figura y "espesor" de una figura convexa es la mínima distancia entre dos rectas paralelas que contienen a la figura.

Para las figuras convexas el problema de hallar el máximo espesor Δ dado el radio ρ del círculo inscrito es conocido, y la solución corresponde al espesor del triángulo equilátero. [3, pág.78].

Limitándonos a figuras r-hiperconvexas, el problema admite una solución análoga a la del caso anterior. La demostración puede también hacerse siguiendo los pasos anteriores, si bien transfor-

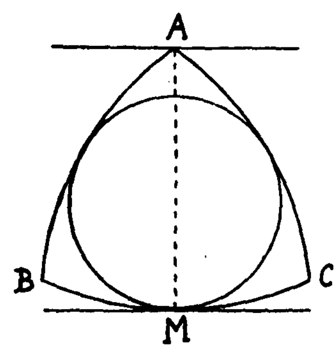

FIG. 6

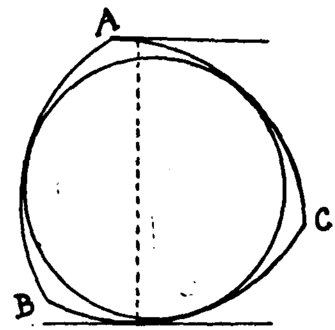

FIG. 7

mándolos por una especie de dualidad. Unicamente hay que observar que para los triángulos r-curvilíneos equiláteros, cuando $r \geq AB$ (fig. 6) el espesor es igual a la distancia $\overline{AM}$ de un vértice al lado opuesto, mientras que cuando $r \leq AB$ el espesor es igual a la distancia entre la recta tangente a uno de los arcos concurrentes en un vértice y la tangente al lado opuesto paralela a ella (fig. 7). Con esta observación, la demonstración no ofrece dificultad y basta seguir el camino de la anterior, por lo cual nos limitaremos a dar el resultado:

Entre las figuras r-hiperconvexas cuyo circulo inscrito C_ρ tiene un radio dado ρ, el espesor máximo es el correspondiente al triángulo equilátero r-curvilineo circunscrito a C_ρ. Entre el espessor Δ de toda figura r-hiperconvexa y el radio ρ de su circulo inscrito, existen las siguientes desigualdades

$$\Delta \leq \frac{1}{2}\left[3\rho - r + \sqrt{r^2 + 6r\rho - 3\rho^2}\right] \; para \; r \geq \frac{3+\sqrt{3}}{2}\,\rho$$

y

$$\Delta \leq r + \frac{1}{4r}\left[\sqrt{r^2 + 6r\rho - 3\rho^2} - 3\,(r-\rho)\right]\sqrt{r^2 + 6r\rho - 3\rho^2}$$

para

$$r \leq \frac{3+\sqrt{3}}{2}\,\rho.$$

Para las figuras convexas, correspondientes a $r = \infty$, habrá que tomar la primera de las desigualdades anteriores y, observando que.

$$\lim_{r \to \infty} \frac{1}{2}\left[3\rho - r + \sqrt{r^2 + 6r\rho - 3\rho^2}\right] = 3\rho$$

queda

$$\Delta \leq 3\rho$$

que es una acitación conocida. [3, pág. 79].

3. *Valores máximo y minimo del area de las figuras r-hiper convexas, dado su diámetro.* Este problema es mucho mas simple que los anteriores. Observemos que si A, B son los extremos de un diámetro de la figura hiperconvexa H, o sea $AB = D$, el huso formado por los dos arcos de circunferencia de radio r que pasan por A y B, debe estar contenido en H; por consiguiente el área F_H de H debe ser igual o mayor que el área de este huso. Por tanto.

$$F_H \geq 2r^2\left(\text{arc sen}\,\frac{D}{2r} - \frac{D}{4}\sqrt{4r^2 - D^2}\right).$$

Además, para cualquier figura convexa de diámetro D, se sabe que es $F \leq \pi D^2/4$ [3, pág. 76], siendo F el área. Resumiendo las dos desigualdades se tiene:

Dado el diámetro D de una figura r-hiperconvexa, el área minima corresponde al huso formado por los dos arcos de circunferencia de radio r que unen los extremos de un segmento de longitud D y el área máxima al circulo de diámetro D. Por tanto, entre el área F_H de cualquier figura r-hiperconvexa y su diámetro D valen las desigualdades

$$\frac{\pi}{4} D^2 \geq F_H \geq 2 r^2 \left(\text{arc sen } \frac{D}{2r} - \frac{D}{4} \sqrt{4 r^2 - D^2}\right).$$

Aprovechando la propiedad anterior de que toda figura r-hiperconvexa de diámetro D contiene en su interior al huso formado por dos arcos de circunferencia de radio r que unen los extremos de un segmento de longitud D, se obtiene inmediatamente que el espesor Δ de cualquier figura r-hiperconvexa de diámetro D será siempre igual o mayor que el correspondiente al mencionado huso. Por tanto:

Entre el diámetro D y el espesor Δ de toda figura r-hiperconvexa existen las relaciones.

$$\Delta \leq D \leq \sqrt{4r\,\Delta - \Delta^2} \quad , \quad 2r - \sqrt{4r^2 - D^2} \leq \Delta \leq D$$

de las cuales se deduce.

$$\frac{D^2 + \Delta^2}{\Delta} \leq 4r.$$

BIBLIOGRAFIA

Bibliografia citada:

[1]. BERETTA, L. y MAXIA, A. — *Insiemi convessi e orbiformi*, Rendiconti di Matematica, R. Università di Roma, Serie V, Vol. 1, fasc., 1. 1940.

[2]. BLASCHKE, W. — *Vorlesungen über Integralgeometrie I*, Hamburger Mathematische Einzelschriften, 20 Heft, 1936.

[3]. BONNESEN, T. y FENCHEL, W. — *Theorie der Konvexen Körper*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Berlin, 1934.

[4]. DELTHEIL, R. — *Probabilités géométriques*, París 1926.

[5]. KUBOTA, T. — *Ein Satz über Eilinien*, Tohôku Mathematical Journal, vol. 47, 1940.

[6]. MAYER, A. E. — *Eine Uberkonvexitat*, Mathematische Zeitschrift, Vol. 40, 1935.

Otra bibliografia referente a figuras hiperconvexas:

[7]. BUTER, J. — *Ueberkonvexe Mengen in der Ebene*, Ak. Wetensch. Amsterdam, Proc. Vol. 41, 1938.

[8]. VAN DER CORPUT, J. G. — *Ueberkonvexe Mengen in der Ebene*, Ak. Wetensch. Amsterdam, Proc. Vol. 41,1938.

[9]. VINCENSINI,P. — *Sur les figures superconvexes planes*, Bulletin de la Soc. Math de France, Vol. 64, 1936.

ABSTRACT

In this paper we give a new characterization of hyperconvex sets on the plane (introduced by MAYER [6]) and apply it to obtain certain properties concerning the mentioned sets. Particular attention is devoted to the hyperconvex sets with respect to the circles of radius r (r-hyperconvex sets); referring to these sets we give two integral formulas in n. 4 and solve certain extremal problems in n. 5.

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL, Rosario, Argentina.

1948
IMPRENSA NACIONAL
RIO DE JANEIRO — BRASIL

PUBLICAÇÕES DA FUNDAÇÃO

Estudos Brasileiros:

Estudos Brasileiros de Administração
» » » Demografia
» » » Economia
» » » Educação
» » » Higiene

Boletim Informativo — (*mensal*)

Séries Científicas:

Summa Brasiliensis Mathematicæ
» » *Biologiæ*
» » *Geologiæ*
» » *Physicæ*

Obras científicas e técnico-educativas.

Fascículos, da SUMMA BRASILIENSIS MATHEMATICÆ

EM CIRCULAÇÃO:

La notion de fonction continue	*Antônio Monteiro e Hugo Ribeiro*
Sôbre uma modificação da fórmula de Cauchy	*Omar Catunda*
On linear expansions II	*Leopoldo Nachbin*
Sur quelques résultats de Siegel	*André Weil*
Classical theory of the point electron (Part I)	*Mario Schönberg*
Classical theory of the point electron (Part II)	*Mário Schönberg*
Limites d'ensembles dans les espaces abstraits	*Lelio I. Gama*
Generalized semi-local rings	*Oscar Zariski*
El problema de los 3 cuerpos en los casos de Lagrange y de Euler, tratados en la teoria general de la relatividad	*Godofredo Garcia*
Sobre uma formula de Cipolla	*Fernando Furquim de Almeida*

PREÇO DÊSTE FASCÍCULO: Cr$ 6,00