La Enseñanza de la Geometría en el Ciclo Secundario

(Alumnos de 12 a 16 años de edad)

Por L. A. Santaló *

1. LA GEOMETRIA Y LAS OTRAS RAMAS DE LA MATEMATICA

La Matemática se ha dividido tradicionalmente en diversas componentes, que en las enseñanzas elemental y media son la Geometría, la Aritmética y el Algebra, a las cuales en la enseñanza terciaria se añade el Análisis o Cálculo infinitesimal con todas sus aplicaciones. Los límites que separan esas componentes no son muy precisos y, además, ellas se influyen mutuamente, dando a la Matemática un carácter de unidad indisoluble a pesar de las grandes diferencias de detalle. De las distintas componentes es seguramente la Geometría la que más interviene sobre las demás, sobre todo en su aprendizaje, debido a que aporta la «interpretación geométrica» de muchos resultados, a través de la «intuición visual», que en la Geometría es una necesidad y en las demás partes de la Matemática una valiosa ayuda. En el Algebra, por ejemplo, la interpretación geométrica es fundamental para la mejor comprensión de sus ecuaciones y en el Análisis, el estudio geométrico de curvas y superficies, como representantes de funciones, ha sido siempre un apoyo esencial para comprender conceptos, aclarar comportacimientos y descubrir nuevas direcciones de estudio.

Con todo ello, la unidad de la Matemática se ha ido haciendo cada día más evidente. A pesar de su continuo crecimiento en distintas y divergentes direcciones, las diversas ramas terminan siempre entrelazándose entre sí, de manera que con toda su exuberante frondosidad, el árbol de la Matemática resulta cada vez más homogéneo y unificado.

Un primer problema didáctico que se presenta es decidir si conviene enseñar la Matemática como una unidad, con sus diversos capítulos tratados simultáneamente, o bien si conviene, para un mejor aprendizaje, desenmarañar las trenzas en que las distintas ramas se han ido entrelazando y presen-

* Universidad de Buenos Aires.

tarlas separadamente, dejando para más adelante, en un período posterior, el estudio de las analogías y coincidencias.

No hay unanimidad al respecto. En todos los niveles, hay la tendencia unificadora de estudiar la Matemática como una sola unidad (enseñanza integrada) y la tendencia, más clásica, de estudiar por separado las distintas componentes: geometría, aritmética, álgebra, análisis y sus aplicaciones (probabilidades, estadística, cálculo numérico y gráfico, computación...). Probablemente ninguno de los dos métodos, usados con exclusividad, sea óptimo. Cada rama de la Matemática tiene su «metodología» y un aprendizaje por separado parece recomendable para una mayor claridad y simplificación de las ideas. Pero en ningún momento hay que olvidar que todas las ramas proceden del mismo tronco y que cada una de ellas puede servir, en muchos aspectos, de guía y sostén de las otras. Ninguna clase de Matemáticas, sea de Geometría, Aritmética o Algebra, debe olvidar que las demás ramas existen y hay que acudir con mucha frecuencia a ellas, tanto para recordar conocimientos ya adquiridos y mostrarlos bajo distintos ángulos, como para ayudar y motivar la adquisición de nuevos conocimientos en la disciplina particular que se está tratando.

La presentación por separado, sin exagerar esta separación, tiene la ventaja de poner de manifiesto las peculiaridades de cada rama, de manera que los alumnos contemplan diversos aspectos y pueden reaccionar más libremente sobre ellos de acuerdo con su particular manera de ser. Un temperamento intuitivo, con fuerte tendencia visual, gustará más de la Geometría, que le enseñará a poner orden en el mundo que contempla y desea entender. Un temperamento más abstracto, puede resultar interesado por el formalismo del álgebra o las propiedades curiosas de los números de la Aritmética. Pero uno y otro irán constatando que se necesita la colaboración de todas las ramas para mejor iluminar y comprender el universo de la Matemática. El teorema de Pitágoras va unido a la raíz cuadrada y la geometría de las cónicas al álgebra de las formas cuadráticas. De esta manera la unificación se va haciendo a través de un aprendizaje diferenciado, pero con una exposición sin barreras e intercambio fluido de una rama a la otra.

2. OBJETIVOS DE LA ENSEÑANZA DE LA GEOMETRIA

Estamos, en la actualidad, en un mundo rápidamente cambiante y los educadores tenemos en nuestras manos el trascendental problema de estudiar la educación más conveniente, en metodología y contenidos, para que los futuros ciudadanos que hoy concurren a las aulas puedan desempeñarse, en el mundo distinto con el que se van a encontrar dentro de unos años, con la máxima eficiencia, para provecho propio y de toda la sociedad.

La enseñanza de la Matemática, en particular, está sujeta a grandes discusiones y dudas. En primer lugar ¿qué tendencia debe prevalecer, la enseñanza formativa, para educar, o la informativa, para impartir los conocimientos útiles en la vida diaria? Hay que hacer las dos cosas, pero el problema está en la proporción de las mismas. Las herramientas se vuelven obsoletas e inútiles con el tiempo, pero el método sólo, sin los ejemplos clarificadores, puede formar temperamentos demasiado alejados del mundo real y de sus necesidades cotidianas.

Hay que revisar los contenidos y las metodologías. En cuanto a los primeros, no hay duda de que el mundo actual exige conocimientos matemáticos muy distintos de los necesarios hasta mitad del siglo. Nociones de probabilidad y estadística, por ejemplo, son hoy día imprescindibles, así como muchas disciplinas con ellas relacionadas (análisis de mercados, encuestas de opinión, tablas de números al azar, conmutación, teoría de la decisión). Queda la parte formativa: ¿qué debe enseñarse y de qué manera, en cada nivel, que sea realmente adecuado para formar al hombre del año 2000, en estos años de fines de siglo? Corresponde a nosotros, en esta ponencia, examinar el caso de la Geometría.

Muchas veces se han expuesto los objetivos de la enseñanza de la Geometría. Sin grandes variantes, se mencionan siempre los siguientes:

2.1. Informar sobre el espacio exterior, mostrando una sistemática de la forma y de las figuras, así como sus propiedades.

2.2. Contribuir a la formación intelectual, ejercitando el método deductivo como medio para ordenar el pensamiento y adquirir los conocimientos necesarios para la vida contemporánea. Desarrollar el pensamiento crítico, la expresión verbal precisa y la capacidad de abstracción.

2.3. Desarrollar la imaginación y la creatividad, estimulando el pensar independiente y la elaboración y desarrollo de ideas propias, promoviendo el reconocimiento de la Geometría, igual que toda la Matemática como una disciplina abierta, en continua evolución y cambio.

2.4. Desarrollar la habilidad para resolver problemas, introduciendo en la construcción de modelos geométricos y en el uso de gráficos, como medios para visualizar, intuir y comprender mejor situaciones problemáticas.

2.5. Integrar las ideas geométricas con las otras ramas de la Matemática, para formar conciencia de la unidad de la misma.

Respecto de estos objetivos es difícil que haya discrepancia. Todo el mundo está de acuerdo. Las diferencias aparecen cuando se trata de la manera de lograrlos. Veamos un poco de historia.

En su origen, la geometría fue la aplicación del razonamiento matemático a las formas de la Naturaleza. En este sentido fue una ciencia física, intuitiva y visual, íntimamente ligada al mundo exterior. Posteriormente, con Euclides, se hizo de ella una ciencia puramente intelectual, totalmente en el mundo de las ideas. Surgió la axiomática como teoría matemática por excelencia. Los matemáticos se entusiasmaron por la potencia del razonamiento deductivo, que permite construir teorías y adquirir conocimiento a partir de axiomas y definiciones claramente establecidos. De esta manera nació la confusión, que ha durado siglos, entre la Geometría como disciplina para matemáticos, deseosos de poner a prueba su capacidad para elaborar preciosuras intelectuales, y la geometría para el hombre común, que solamente pretende razonar sobre figuras concretas que sus ojos ven, con el fin de satisfacer las necesidades que la vida de todos los días le presenta.

El problema básico de la didáctica de la Geometría consiste en decidir en qué proporción uno y otro de estos dos aspectos debe prevalecer en la enseñanza. Se trata de elegir el justo balance entre la geometría axiomática, construida en el mundo de las ideas siguiendo a Euclides o la versión moderna de Hilbert, y la geometría intuitiva, la de las lúnulas de Hipócrates, los poliedros de Platón, el teorema de Pitágoras, las cónicas de Apolonio, la perspectiva y división aurea de los pintores y arquitectos o los mosaicos y adornos geométricos de los árabes. Todo es geometría, pero su exposición, su estructura y su método de enseñanza son distintos.

La proporción entre una y otra tendencia depende de la edad. En la primera enseñanza, hasta los 12 años, no parece que haya duda en que la Geometría debe ser experimental e intuitiva. Hay que tomar ejemplos de la naturaleza y esquematizar los mismos como primeros pasos hacia la abstracción. Hay que dibujar e interpretar figuras: el alumno debe usar constantemente la regla, el compás, y el transportador. Esta parte es tradicional y más o menos están bien establecidos los contenidos en los textos clásicos, así como la metodología en base a dibujos y construcciones en cartulina o plastilina. Otros métodos didácticos, como los geoplanos, pueden ser útiles, pero deben dejarse a gusto del maestro quien decidirá su metodología propia, ya que el éxito de los materiales didácticos depende, esencialmente, del convencimiento del maestro de su utilidad.

En la otra punta, o sea, en la enseñanza terciaria, destinada a alumnos que ya han hecho una elección vocacional hacia carreras en que la Matemática es esencial, la tendencia axiomática es importante y tal vez fundamental. A este nivel superior hay que ver también la construcción de la Geometría por vía algebraica (espacios vectoriales) y comparar distintos sistemas axiomáticos.

El problema está en la enseñanza secundaria, para alumnos entre 12 y 16 años. A este ciclo vamos a referirnos con detalle.

3. LOS DOS CICLOS DE LA ENSEÑANZA MEDIA

La enseñanza para las edades de 12 a 16 años comprende en general dos ciclos. Un ciclo básico de tres años, que forma parte de la enseñanza obligatoria y común a todos los alumnos, y un ciclo superior de dos años, que es conveniente sea diversificado, destinado a alumnos cuya mayoría seguirá luego estudios terciarios.

La máxima preocupación debe ser para el ciclo básico. Si el Estado impone su obligatoriedad debe procurar que su enseñanza sea verdaderamente útil a los alumnos, tanto en su aspecto formativo, cosa no fácil de evaluar, como en su aspecto informativo, más fácil de decidir a través de los contenidos. Estos contenidos, que deben ser adaptados a las necesidades de la sociedad ambiente, deben revisarse periódicamente y son rápidamente cambiantes, de manera que un primer obstáculo a vencer es la inercia usual de los enseñantes, que quisieran enseñar siempre lo que ellos aprendieron, y de los responsables de la enseñanza, casi siempre misoneístas y temerosos de introducir cambios con demasiada frecuencia, sin tener en cuenta que la escuela no debe distanciarse demasiado del mundo exterior a ella. Cuando lo que se enseña en el aula es muy distinto de lo que se aprende en la calle, el sistema educativo se desequilibra.

En las clases de geometría de hoy deben ser de uso corriente presentaciones gráficas, transformaciones geométricas, coordenadas, máximos y mínimos, ecuaciones e inecuaciones y el manejo de calculadoras y computadoras. Hay que introducir en el ciclo básico todo lo necesario para comprender y actuar en el mundo de hoy, sin miedo a que la capacidad de los alumnos no lo permita, sino más bien tomando como un reto a los educadores, la búsqueda de metodologías adecuadas para que estos conocimientos puedan ser absorbidos.

Si se piensa, como a veces se ha hecho, que todo lo que se enseña debe deducirse de la nada, suponiendo que se parte de cero y que el alumno debe realizar su aprendizaje paso a paso y rigurosamente, recorriendo los caminos que han seguido los matemáticos para llegar al estado actual de su ciencia, evidentemente no es posible llegar muy lejos y los tres años del ciclo básico se pierden en definiciones y enunciados triviales e insustanciales. Si se considera en cambio, que el aprendizaje puede hacerse a saltos y que con una presentación adecuada el alumno puede comprender y asimilar muchos conceptos tenidos por difíciles y superiores, es mucha la información, y a su través la formación, que el alumno puede recibir en este período de la enseñanza secundaria. No hay que pretender que el alumno de 12 a 14 años comprenda, ni tan sólo vea la necesidad, de las sutilezas que los matemáticos descubrieron en el siglo pasado. Hay muchas cosas que el profesor debe conocer, pero debe también saber callar para no confundir al alumno.

Para el ciclo superior, alumnos de 15 y 16 años, se puede iniciar una mayor sistematización puesto que se trata de alumnos que ya han elegido seguir con estudios terciarios y posiblemente alguna carrera en que la matemática es importante.

4. PREMISAS FUNDAMENTALES

Los contenidos y la metodología correspondiente de la Geometría en la escuela media son variables con el lugar y con el tiempo. Deben depender, en gran parte, de las particularidades de la escuela y del medio ambiente en que se mueven los alumnos. Es muy posible que convenga diferenciar a las escuelas de zonas rurales de aquellas de zonas industriales, pues las necesidades de los alumnos en unas y otras pueden ser diferente. No se trata de una diferencia de nivel, sino de una diferencia en el enfoque y en la selección de ejemplos y aplicaciones. Sin embargo, creemos que en cualquier tipo de escuela hay que tener siempre en cuenta los siguientes postulados.

4.1. La Geometría debe ser una ayuda para comprender el mundo exterior

En este sentido hay que proseguir con la clasificación de las formas de los objetos reales iniciada en la escuela primaria, e insistir en las medidas de longitudes, ángulos, áreas y volúmenes. Algunas fórmulas deben demostrarse (como las de las áreas del triángulo y trapecio a partir de la del rectángulo) y otras justificarse de manera experimental e intuitiva (como el área del círculo). Hay que operar con figuras irregulares, dejando que el alumno decida sobre las medidas a tomar para poder calcular el área. Hay que dar medios aproximados para los cálculos de áreas y volúmenes de figuras y cuerpos irregulares, que son los más frecuentes en la vida real. Un plano de la ciudad y un mapa del país debe estar en el aula para medir distancias, ángulos y áreas y derivar problemas de significado real.

4.2. La presentación axiomática de la Geometría no es posible en la enseñanza media

La fundamentación axiomática de la Geometría es complicada y engorrosa. Durante el siglo pasado se vio que los axiomas de Euclides, base de la enseñanza de la Geometría durante veinte siglos, no eran suficientes, y después de varias tentativas de matemáticas ilustres, David Hilbert en 1899 publicó sus *«Fundamentos de la Geometría»*, de gran importancia conceptual. El sistema fue de extraordinario valor para la investigación matemática al nivel superior, pero su aplicabilidad a la enseñanza media resultó siempre un fracaso, por ser imposible su transcripción completa y perder todo su valor al ser recortado y simplificado al «alcance de los alumnos». Se trata, al decir de Dieudonné, de un «venerable diplodocus» imposible de usar como libro de texto para aprender Geometría (6).

Otros sistemas que se han ensayado, como los de Choquet (2), Bachman (1), Levi (10), Dieudonné (5), citados en la Bibliografía, tienen el mismo defecto. Sin discutir su valor matemático al nivel de investigación, que es mucho, resultan inadecuados para la enseñanza elemental y media. La creencia de que los fundamentos de una disciplina es la parte más fácil y comprensible de la misma, es un grave error. Se trata de sutilezas y virtuosismos lógicos que solamente se pueden comprender y valorizar cuando se tiene una elevada preparación matemática.

La conclusión es que es preferible dejar del todo la axiomatización, en este ciclo básico, y limitarse a elaborar sistemas «locales» a partir de definiciones e hipótesis intuitivas, establecidas de manera clara y precisa, pero sin pretensiones de que sean completos ni de que tengan todo el rigor que se exige al nivel terciario: el rigor es una función de la edad, como ha sido función del tiempo en la historia de la matemática. Más que en sutilezas lógicas hay que insistir en teoremas como «uniendo ordenadamente los puntos medios de un cuadrilátero se obtiene un paralelogramo», «las alturas de un triángulo concurren en un punto», «la suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a dos rectos»,... que no son evidentes y su demostración hace comprender al alumno la potencia del método deductivo del razonamiento matemático y el paso de una propiedad «particular» a un enunciado «general» válido para todos los casos de un cierto conjunto.

4.3. Hay que educar en la solución de problemas

Enseñar matemáticas debe ser equivalente a enseñar a resolver problemas. Estudiar matemáticas no debe ser otra cosa que pensar en la solución de problemas. En una conferencia pronunciada en 1968 en S. Agustín (Trinidad), George Polya decía: «Está bien justificado que todos los textos de matemáticas, empezando con el Papyrus Rhind, del siglo XVIII antes de nuestra era, contenga problemas. Los problemas pueden incluso considerarse como la parte más esencial de la educación matemática».

Obsérvese que no es lo mismo hacer «ejercicios» para practicar una rutina, que resolver «problemas» para ejecitar y poner a prueba las habilidades discursivas. Naturalmente que nos referimos a problemas en el sentido amplio, incluyendo la demostración de propiedades geométricas de las figuras y el establecimiento de relaciones entre ellas. Lo importante es que haya algo que buscar o un enigma que aclarar dentro de un contexto bien planteado.

Es interesante buscar problemas que interesen al alumno, para que llegue a preocuparse por su tratamiento y llegue a sentir la satisfacción y goce que produce su solución cuando se consigue. La habilidad del profesor consiste en buscar problemas adaptados al nivel de la clase, o a cada grupo de alumnos de la misma, con enunciados atractivos. No interesa tanto que sean de interés práctico como que llamen la atención y muevan la curiosidad del alumno. Pueden elegirse ejemplos en los abundantes libros de recreaciones matemáticas o en los hermosos libritos de De Finetti (3) o Miguel de Guzmán (4) citados en la Bibliografía. Naturalmente que no toda la enseñanza debe reducirse a un conjunto de curiosidades ni a una colección de problemas ingeniosos, pero una colección de ellos, bien organizada y dosificada a lo largo del curso, puede ser de gran utilidad para el aprendizaje de las distintas partes de la Geometría.

En este sentido es útil la organización o la participación en Olimpiadas Matemáticas, para estimular a los alumnos más interesados. Estas Olimpiadas, que muchas veces se celebran a nivel regional, nacional e internacional, tienen muchas ventajas. Hay colecciones de problemas propuestos en ellas (9), (16), que pueden ser muy útiles para comparar niveles de enseñanza y para canalizar las inquietudes de los alumnos de mayor capacidad y vocación. Más que para alumnos, muchos de estos libros son útiles para los profesores, que podrán elegir en ellos algunos problemas y adaptarlos y modificarlos para ponerlos al nivel de la clase. La experiencia de otros lugares no debe ser nunca despreciada para la conducta propia.

Sobre la enseñanza de la matemática a través del planteo y solución de problemas se puede ver el Capítulo 9 dedicado a «Problem solving» de los Proceedings del Congreso Internacional de Berkeley, 1980 (7), en particular los artículos de J. Pascual Ibarra y Diana Burkhart. Todo problema lleva consigo una serie de preguntas y consideraciones que contribuyen mucho a su interés didáctico, como ser: ¿el problema tiene solución?, ¿tiene suficientes datos?, ¿la solución será única?, ¿recuerda algún problema parecido?, ¿se le ocurre alguna generalización? Sobre la teoría de la «solución de problemas» en educación ha publicado interesantes trabajos A. H. Schoenfeld (7, pág. 454).

4.4. El aprendizaje muchas veces no es lineal, sino que opera «a saltos»

Una cosa es la exposición sistemática de la Geometría, hecha por y para matemáticos ya formados, y otra cosa enseñar Geometría para que el alumno aprenda de la mejor manera posible, la mayor cantidad de conocimientos posible, en el mínimo tiempo posible. En la enseñanza de la Geometría la intuición debe jugar un papel fundamental y puede ayudar mucho a la adquisición rápida de conocimientos y también a su afianzamiento y dominio. Se ha insistido mucho sobre los peligros de la intuición, pero de ninguna manera ello significa que deba suprimirse de raíz. Lo que debe hacerse es cultivarla y educarla para que sea un poderoso auxiliar del razonamiento, permitiéndole avanzar con rapidez sobre zonas no trilladas y ariscas. Como ha dicho H. Freudenthal (7, pág. 4) «nadie intenta demostrar una cosa si no tiene la sospecha de que es cierta, y esta sospecha proviene de su intuición y también la demostración suele estar guiada por la intuición».

En la enseñanza de la Geometría hay que usar constantemente dibujos y modelos, y hay que educar en la búsqueda de situaciones geométricas en la naturaleza y en el medio ambiente. Según una frase afortunada de De Finetti, en geometría hay que «saber ver» (3). Hay conceptos que en una exposición rigurosa y sistemática de la Geometría aparecen en una etapa bastante avanzada, como ser los de «longitud de una curva», «área de una superficie curva», «medida de ángulos», pero que sin embargo, por ser de uso común desde la primera enseñanza y aún en la via de relación fuera de la escuela, pueden y deben usarse en la enseñanza secundaria sin ningún temor de que falte una definición precisa, que en esta etapa no sería comprendida, pues la intuición es suficiente para entender de qué se trata y difícilmente conducirá a error.

Hace un par de décadas se puso de moda anteponer la geometría afín a la geometría métrica, por el hecho de que en la construcción de la Geometría a partir de los espacios vectoriales, los espacios afines son más simples que los métricos (que suponen la existencia de una forma cuadrática invariante). Sin embargo, para la enseñanza es mucho mejor empezar con la geometría métrica, pues el alumno está acostumbrado a «medir» y a clasificar las figuras por «congruencias», más que por «afinidades». Para un alumno de enseñanza media es una curva más fácil y simple la circunferencia que la elipse, a pesar de ser ambas equivalentes por afinidades. Nuestro intelecto, moldeado por la intuición, comprende mejor la geometría métrica que la afín, a pesar de su mayor complejidad en la construcción sistemática de la Geometría. De igual manera como el estómago digiere sin saber química ni desmenuzar previamente los alimentos en sus componentes químicos elementales, así la inteligencia asimila directamente conocimientos complicados y aunque es interesante su análisis a un nivel superior, al nivel elemental y medio puede seguirse adelante con estos conocimientos complejos sin necesidad de su disección en partes simples.

4.5. Vincular la Geometría con la Aritmética y el Algebra

Las clases de Matemática no son compartimentos estanco, sin comunicación entre sí. Al contrario, siempre que haya oportunidad hay que mostrar las relaciones entre las distintas partes de la matemática, para evidenciar la unidad de la misma. El teorema de Pitágoras, por ejemplo, es una buena oportunidad para repasar todo lo referente a la raíz cuadrada y las propiedades de los números cuadrados perfectos. El estudio de las cónicas debe servir para repasar las ecuaciones de segundo grado y los sistemas de ecuaciones e inecuaciones de primero y segundo grado. La geometría de los puntos de coordenadas enteras se vincula con la combinatoria (número de camino mínimos para ir de un punto a otro). No importa que algunos temas se vean en el curso de Geometría y luego se repitan en los de Aritmética o Algebra, o al revés. La repetición de hechos importantes desde puntos de vista diferentes es bueno para ir fijando las ideas sobresalientes de la matemática; solamente los hechos triviales se encuentran una sola vez.

4.6. No olvidar la geometría del espacio

En muchos países ha ido desapareciendo en los últimos años la geometría del espacio. Conviene revertir la situación. Puesto que vivimos en un mundo tridimensional, su conocimiento es indispensable. Hay que estudiar los cuerpos y las superficies y sus representaciones planas. Hay que desarrollar la intuición visual, para «saber ver» el espacio y las relaciones entre sus formas. Es instructiva la «banda de Moebius» y una idea elemental de la clasificación topológica de las superficies. Tampoco hay que olvidar la geometría de la esfera, que es la forma de nuestro planeta: la idea de geodésicas y la comparación de los diversos tipos de mapas, son conceptos importantes al alcance de la enseñanza media.

4.7. Aprovechar todos los conocimientos del alumno

Al llegar a la enseñanza secundaria el alumno conoce ya muchas cosas de la escuela elemental y de su vida familiar y de relación con la sociedad en que vive. Hay que utilizarlas y aprovecharlas para adquirir nuevos conocimientos, sin pretender empezar de nuevo, repitiendo cosas conocidas, con el pretexto de que «ahora lo vamos a ver en forma rigurosa». Esta revisión debe dejarse para etapas más avanzadas y para alumnos que ya hayan elegido estudiar disciplinas científicas. A este respecto coincidimos plenamente con las siguientes ideas de Arnold Kirsch en el Congreso de Karlsruhe sobre educación matemática (1976) (8): «Estamos en contra de la tendencia, muy extendida, de desarrollar la matemática *ab ovo*, o de retroceder al principio y empezar de nuevo sin suponer nada conocido, tendencia que se encuentra no solamente en matemáticos sistematizadores (cuando, por ejemplo, dicen a sus alumnos que se olviden de todo lo que han aprendido en la escuela elemental) sino también en didácticos de orientación genética. Nosotros preferimos alentar a los alumnos a hacer uso de todos sus conocimientos previos, aún de los que proceden de campos ajenos a la matemática. Los alumnos tienen una experiencia considerable que puede ser usada en la geometría elemental. En particular pensamos en su familiaridad con la existencia y propiedades de las medidas de longitudes, ángulos y áreas. Esta familiaridad procede de afuera de las clases de matemáticas y a veces de afuera de la escuela, lo que debemos considerar como una situación particularmente afortunada.

Hoy en día no se debe insistir más en querer desarrollar la geometría elemental de manera completamente rigurosa, y va entrando la costumbre de hacer uso de esas medidas sin ningún comentario sobre ellas».

5. UN LISTADO TENTATIVO DE CONTENIDOS

Para ejemplificar las ideas anteriores, vamos a dar un listado tentativo de contenidos, que convenientemente ordenados y rellenados con los detalles que el profesor estime necesarios, pueden constituir el esquema de la geometría de la escuela media. No hay que considerarlos demasiado rígidos, sino más bien con suficiente elasticidad para ser adaptados a cada escuela y aún al criterio de cada profesor particular. El campo de la geometría es inmenso y en gran manera «enseñar» es «elegir» los temas y la metodología que más se adaptan a cada grupo de alumnos, para que adquieran una útil y correcta visión del mundo y adquieran conciencia de la potencia del razonamiento matemático para medir y establecer relaciones entre sus formas. Lo esencial es que el profesor no pierda de vista que la capacidad de aprendizaje de los alumnos es inmensa, pero que también lo es la cantidad de conocimientos necesarios para entender y actuar en el actual mundo tecnológico, por lo cual, conviene elegir bien y no perder el tiempo en definiciones insustanciales, ni en trivialidades disfrazadas con ropaje más o menos científico. Las clases de geometría, en cualquier nivel y para cualquier escuela, deben tener fondo y substancia y nunca ser una mera exposición, en lenguaje difícil, de cosas que el alumno ya sabe de manera fácil. Lo que sea intuitivamente evidente para el alumno debe aceptarse como tal, para poder seguir adelante en la adquisición de conocimientos menos evidentes.

Primer año

Construcciones en el plano (mediatrices, bisectrices, triángulos, circunferencias). Vectores en el plano. Polígonos. Convexidad. La circunferencia y el círculo: ángulos inscritos, arco capaz.

Coordenadas cartesianas ortogonales en el plano. Representación de la función lineal. Ecuaciones e inecuaciones lineales: solución gráfica.

Puntos del plano de coordenadas enteras: la ciudad cuadriculada. Distancia efectiva entre dos puntos. Caso de calles con dirección única: distancia del taxímetro.

Cuerpos del espacio. Los 5 poliedros regulares. Cuerpos redondos: definiciones y propiedades.

Indicaciones. Se insistirá en el uso de la regla, el compás y el transportador para hacer construcciones geométricas. Las áreas de figuras planas se suponen conocidas de la escuela primaria y se utilizarán de entrada en los ejercicios, aunque la exposición y el repaso sistemático se posterga para el segundo año. La definición de ángulo como par de semirectas del mismo origen es preferible a la definición como intersección de semiplanos, que es obligada desde el punto de vista conjuntista, pero no es intuitiva ni se usa a este nivel elemental. De todas maneras el profesor puede elegir la que más le guste, siempre que insista en que cualquiera es buena y deje al alumno libertad de elección.

En el plano cuadriculado se puede observar que el número de caminos posibles para ir de un punto A (m,n) al origen O (0,0) es el número combinatorio $C_{m}^{m\,n}$ (combinaciones de m n objetos tomados n a n). Vincularlo con el triángulo de Pascal. Buscar el lugar geométrico de los puntos que equidistan de otro fijo.Llamando «rectas» a los caminos mínimos siguiendo lados de los cuadrados, hallar propiedades de la geometría correspondiente.

Segundo año

Transformaciones en el plano: traslaciones, rotaciones, simetrías, homotecias y semejanzas. Composición de transformaciones: inversas. Teorema de Thales. Triángulos semejantes. Grupos de transformaciones. La inversión.

Areas de figuras planas. Areas de polígonos irregulares por descomposición en triángulos: medidas necesarias. Teorema de Pitágors: solución con números enteros. Areas de figuras circulares. Gráficos estadísticos.

Funciones trigonométricas. Ecuación de la circunferencia. Paralelismo y perpendicularidad de rectas.

Areas y volúmenes de poliedros y cuerpos redondos.

Indicaciones. Dado un polígono irregular (por ejemplo un terreno) preguntar qué medidas hay que tomar para poder calcular el área. Aprovechar el teorema de Pitágoras para calcular raíces cuadradas por tablas o computadora. Cálculo de distancias inaccesibles.

Dibujar y calcular el área de figuras curiosas limitadas por arcos de circunferencia, como las lúnulas de Hipócrates. Dibujar polígonos regulares: ¿por qué el lado del exágono es igual al radio?

El cálculo de volúmenes de cuerpos irregulares que se pueden definir de manera simple, da lugar a problemas curiosos e instructivos. Por ejemplo, calcular el volumen del cuerpo engendrado por rotación de un trapecio alrededor de una de sus bases: discusión según el tipo de trapecio y la base alrededor de la cual se hace girar.

Tercer año

La Geometría y el Arte. Descubrimiento de simetrías, rotaciones y semejanzas en cuadros, ornamentos y edificios. Razón aurea o divina proporción. Cubrimiento del plano por polígonos convexos congruentes.

La elipse, la hipérbola y la parábola como lugares geométricos y como secciones de un cono de revolución.

Fórmulas de adición para senos y cosenos: aplicaciones.

Area y volumen de la esfera. Area y volumen del toro.

Problemas de máximos y mínimos geométricos.

Indicaciones. Se trata, en esencia de repasar conocimientos de geometría ya adquiridos, a través de modelos de la vida real. Los ejemplos de la división aurea y del cubrimiento del plano por baldosas convexas congruentes no deben ser exclusivos y pueden variar con el profesor y el interés que note en los alumnos. La idea es tratar algunos temas ilustrativos de cómo la geometría se proyecta en la naturaleza. Se podrían tratar, por ejemplo, propiedades de grafos o analizar distintas formas que aparecen en biología (forma y distribución de las hojas en las ramas de las plantas, simetrías en los caparazones de ciertos moluscos, geometría de algunas moléculas cristalinas vistas al microscopio). Al respecto se puede ver el libro de K. L. Wolf y D. Kuhn (17), o el más superior, pero atractivo de B. B. MANDELBROT, *Fractais: Form, Chance and Dimension*, San Francisco, W. H. Freeman and Co. 1977.

Los tres años anteriores constituyen el Ciclo Básico, común a todos los alumnos. Los dos años restantes constituyen el Ciclo Superior. Es posible que este ciclo sea también el mismo para todos los alumnos, pero se trata ya de alumnos que piensan seguir estudios terciarios y por tanto la enseñanza puede ser algo más formal, introduciendo un nivel de abstracción que permita al alumno seguir adelante con bases más firmes y poderosas, aunque momentáneamente parezca una enseñanza un poco apartada de la realidad ambiente. Sería recomendable, sin embargo, que después del Ciclo Básico, la enseñanza se diversificará y hubiera unas cuantas asignaturas «electivas», entre las cuales podría estar la Geometría, para que el alumno eligiera según su particular vocación.

Dentro de la matemática del Ciclo Superior, creemos que la Geometría ocupa un lugar secundario y que debe reservarse para los alumnos que piensen seguir estudios superiores de matemática o por lo menos alguna carrera científica. Para el resto, es mucho más importante destinar el tiempo dedicado a la matemática a estudiar computación y probabilidades y estadística, que son ramas de mucha mayor trascendencia en la vida actual.

Vamos a dar un ejemplo de contenidos posibles, pero pensando siempre en alumnos que de alguna manera han decidido seguir estudios en que la matemática juega un papel primordial. Estos contenidos, por otra parte, deberían darse conjuntamente con otros conceptos matemáticos, completando y puliendo todo lo visto en el Ciclo Básico.

Cuarto año

Espacios vectoriales sobre un cuerpo, especialmente sobre los reales. El plano afín. Producto escalar: el plano euclidiano. Geometría en coordenadas del plano y del espacio.

Geometría de la esfera: área del triángulo esférico.

Indicaciones. Muchas cuestiones de la geometría en coordenadas del plano ya se han visto en los años anteriores. Como es importante su conocimiento fluido, aquí se repasará todo y se ordenará sistemáticamente. La geometría de la esfera es interesante como modelo de geometría no euclidiana. Observar que en ella no hay semejanza.

Quinto año

Aplicaciones lineales y afines entre planos. Matrices. Composición de aplicaciones y producto de matrices. Aplicaciones y matriz inversas. Determinantes.

Alguna geometría finita como modelo de construcción axiomática. Nociones de topología de superficies cerradas: teorema de Euler y orientabilidad de superficies.

Indicaciones. Se trata únicamente de unos ejemplos de temas que pueden variar de un año a otro, según los intereses y el nivel de los alumnos. No son temas fundamentales, sino modelos para ejercitar todos los conocimientos adquiridos en el Ciclo Básico, que al mismo tiempo abren horizontes y perspectivas a los alumnos con mayores inquietudes. En la segunda parte, junto con las geometrías finitas, se puede dar una idea de los cuadrados latinos y ortogonalres y sus aplicaciones al diseño de experimentos.

6. LA GEOMETRIA Y LA COMPUTACION

Digamos, finalmente, que lo mismo que en cualquier otra clase de Matemáticas, el uso de las computadoras no debe olvidarse en las clases de Geometría. Su uso depende del tipo de computadora disponible, pero siempre hay que tender a que el alumno se acostumbre al «pensar informático». Seymour Papert con su LOGOS y su tortuga pretende desarrollar en los niños de manera rápida y profunda el sentir geométrico. Ver los libros de Papert (11) y Horacio Reggini (15). A un nivel superior, pero siempre dentro de la enseñanza media, hay el «pensar algorítmico» de A. Engel (7, pág. 312) y el uso de las computadoras como complementos para el dibujo y la obtención de formas indicado por A. A. Di Sessa (7, pág. 632). Estamos todavía en una etapa experimental, pero conviene prestar al problema la máxima atención.

BIBLIOGRAFIA

1. BACHMAN, F.: *Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff,* Springer, Berlín, 1959.
2. CHOQUET, G.: *L'Enseignement de la Géométrie,* Herman, París, 1964.
3. DE FINETTI, B.: *Il «saper vedere» in Matematica,* Loescher Editore, Torino, 1967.
4. DE GUZMAN, M.: *Mirar y ver,* Ed. Alhambra, Madrid, 1977.
5. DIEUDONNE, J.: *Algebre Lineaire et Géométrie Elementaire,* Hermann, París, 1969.
6. DIEUDONNE, J.: *Pour une revision des programmes de mathématiques,* I et II, Gazette des Mathematiciens, n.º 4, Mai 1964.
7. ICME: *Proceedings of the Fourth International Congress on Mathematical Education,* Birkhauser, Boston, 1983.
8. KIRSCH, A.: *Aspects of simplification in mathematics teachin,* Proceedings third International Congress of Mathematical Education, Karlsruse, 1976, págs. 98-120.
9. KURSCHAK, J.: *Hungarian problem book* (2 vols.), Randon House, New York, 1963.
10. LEVI, H.: *Foundations of Geometry,* Prentice Hall, New York, 1960.
11. PAPERT, SEMOUR: *Desafío a la mente, Computadoras y Educación,* Ediciones Galápago, Buenos Aires, 1981. Traducción del original inglés titulado *Mindstorms, Children, Computers and powerful ideas.*
12. POLYA, G.: *Hou to solve it?* Doubleday-Anchor book, New York, 1957.
13. POLYA, G.: *Mathematics and plausible reasoning* (2 vols.), Princeton University Press, Princeton, N. Y., 1954.
14. POLYA, G.: *Mathematical Discovery* (2 vols.), Wiley, New York, 1962-64.
15. REGGINI, H: *Alas para la mente: LOGO, un lenguaje de computadoras y un estilo de pensar,* Ediciones Galápago, Buenos Aires, 1982.
16. SHKLARSKY Y OTROS: *The USSR olympiad problem book,* Freeman, San Francisco, 1962.
17. WOLF, K. L. y KUHN, D.: *Forma y Simetría,* EUDEGA, Buenos Aires, 1959. Traducción del original alemán *Gestalt und Symmetrie,* Tübingen, 1952.