APLICACIONES DE LA MATEMATICA EN LA ESCUELA ELEMENTAL Y MEDIA (2a. parte)

per Luis A. Santaló

7 La escuela y la ciudad.

Es interesante analizar las relaciones de la escuela con la ciudad y sus habitantes. ¿Está bien situada? ¿Tiene el tamaño adecuado? ¿Cómo han evolucionado las condiciones de su alrededor desde que se creó? Para estas y otras preguntas que surjan durante el estudio conviene tener, como actividades iniciales del proyecto:

a) Distancia de cada alumno de la clase a la escuela. La media aritmética nos dará la distancia promedio casa-escuela de los alumnos. Si se puede hacer para todos los alumnos de la escuela, mejor. Construir un gráfico indicando el número de alumnos cuya distancia casa-escuela está comprendida entre x y $x+1$ cuadras o manzanas.

b) Se señalan en un mapa de la ciudad o en un mapa parcial de la misma dibujando expresamente, las casas de los alumnos y la escuela. Se pide buscar en qué punto debería estar situada la escuela para que la suma de las distancias, en linea recta, de la misma a los domicilios de los distintos alumnos fuera mínima. No es un problema fácil. Si se dispone de calculadoras de bolsillo se puede calcular por tanteos sucesivos.

Si la ciudad es cuadriculada, el camino para ir de la casa a la escuela no es la linea recta, sino un poligonal formada por las distintas calles. En este caso, tomando unos ejes coordenados ortogonales x,y paralelos a las calles, y llamando x_i, y_i a las coordenadas de los domicilios de los alumnos, las coordenadas del punto cuya suma de distancias (poligonales) a los mismos es mínima, tiene por coordenadas las "medianas" respectivas de los puntos x_i e y_i. Aquí la "mediana" tiene el significado con que se usa en estadística, es decir, la mediana de las abscisas x_i, es el valor x_m, que una vez ordenadas las x_i en orden creciente tiene igual número de ellas que son iguales o inferiores, que iguales o mayores. Si el número de las x_i es par, se toma el valor medio entre los dos valores que ocupan la posición media. Haciendo lo mismo con las ordenadas y_i se tiene el punto x_m, y_m para el cual la suma de distancias a los distintos domicilios es mínima. La demostración es, en este caso, simple y empezando con pocos valores de x_i, y_i los alumnos la descubrirán. Calculado x_m, y_m, los alumnos podrán calcular el ahorro de camino total si la escuela estuviera en el punto obtenido y también el ahorro total en dinero teniendo en cuenta el precio del transporte.

c) En ciudades cuadriculadas se presentan varios problemas cuyo estudio pone en juego distintos capítulos de la matemática elemental. En primer lugar la distancia entre dos puntos no puede ser la distancia en linea recta, sino la distancia mínima que hay que recorrer realmente para ir de un punto a otro, que si las coordenadas de los puntos son (x_1, y_1), (x_2, y_2) se expresa por $d = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$ y se llama la "distancia del taxista" aunque en realidad debería llamarse la "distancia del peatón", puesto que si las calles tienen cierta dirección única, la distancia que debe recorrer un automóvil es casi siempre mayor, por no poder ir en dirección contraria a la asignada a cada calle.

Hay numerosos problemas curiosos que surgen al considerar en el plano la "métrica del peatón" mencionada: se puede desarrollar toda una geometría en coordenadas basada en ella. Si se considera que las calles tienen sentido único, con lo cual algunos sentidos quedan prohibidos, se tiene la "métrica del taxista" cuya geometría es más complicada, pero siempre curiosa.

Podemos mencionar algunos problemas que surjen de estas consideraciones:

i) Para ir de un punto A (por ejemplo el domicilio del alumno) a otro B (por ejemplo la escuela) ¿cuántos caminos posibles hay que tengan todos la longitud mínima? (Fig. 4).

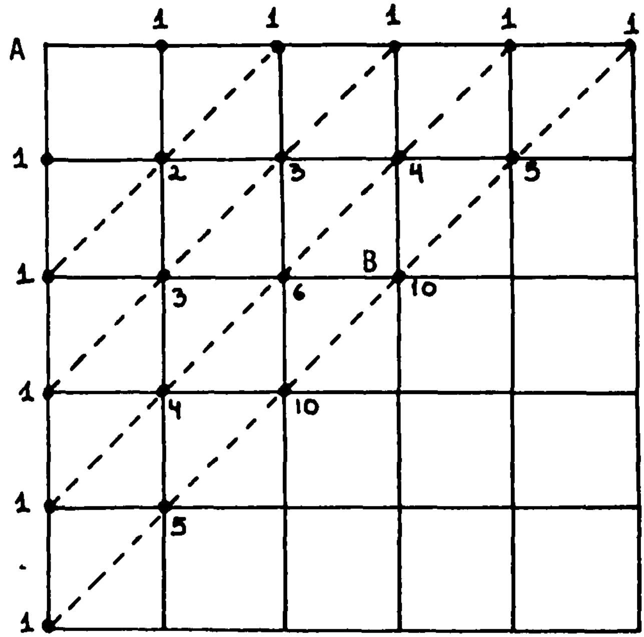


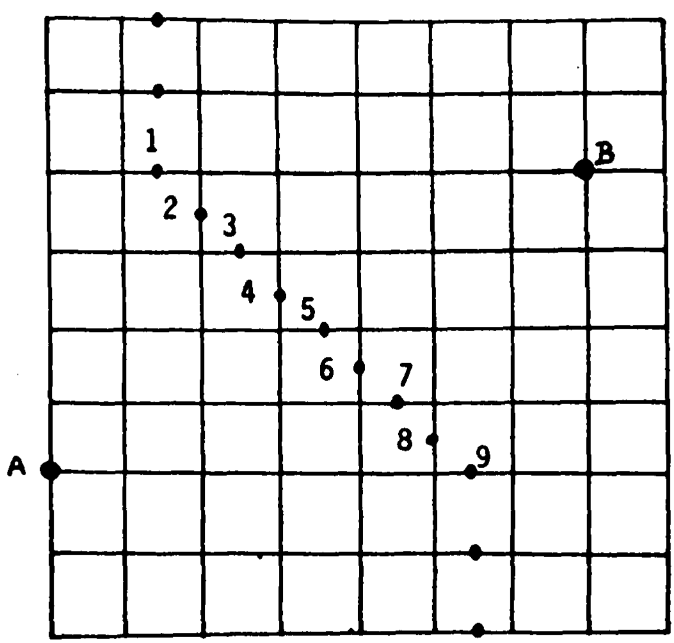
Fig. 4

Se observa facilmente, por cálculo directo e inducción a partir de A que los números de caminos posibles forman el triángulo de Pascal de vértice A y lados paralelos a las diagonales. Es decir, si B está separado de A por m manzanas horizontales y n manzanas verticales, el número de caminos posibles para ir de A a B (todos de longitud mínima m+n) es

$$N(A,B) = \binom{m+n}{m}$$

ii) ¿Cuál es el conjunto de los puntos que equidistan de A y de B?

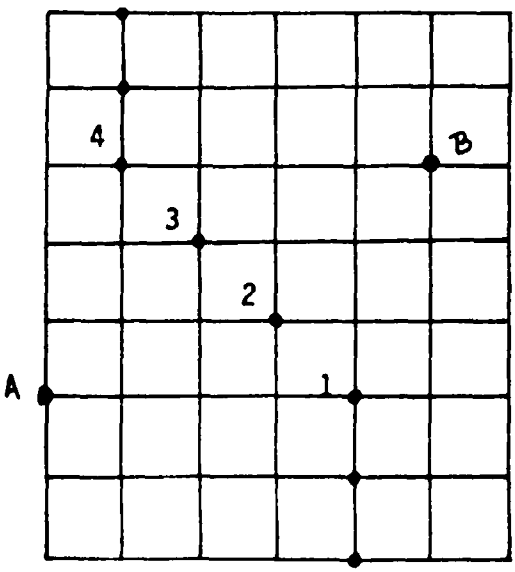
Si m+n es par el conjunto está formado por las esquinas indicadas en la figura 5 (a). Si m+n es impar el conjunto tiene forma análoga, pero está formado por los puntos situados a la mitad de manzana que se indican en la figura 5(b).



b) $m = 7$, $m = 4$

Fig. 5

iii) En el mismo momento y con la misma velocidad con que sale el hijo de la escuela B para ir a la casa A, sale el padre de la casa A para ir a la escuela a buscar al hijo. Si no se han puesto de acuerdo previamente en el camino que seguirán (siempre alguno de los de distancia mínima) ¿cuál es la probabilidad de que se encuentren?



a) $m = 5$, $n = 3$

Fig. 5

La solución cambia según que $m+n$ sea par o impar. Supongamos primero el caso $m=5$, $n=3$ de la figura 5(a). Los puntos en que puede tener lugar el encuentro son los 4 indicados, cuyas coordenadas suponiendo que A es el origen, son 1(4,0), 2(3,1), 3(2,2) y 4(1,3). Estos cuatro puntos no son igualmente posibles, puesto que los numeros de caminos que desde A o B conducen a ellos varía de uno a otro. El número de caminos que desde A van a cada uno de los cuatro puntos son

$$n_1(a) = 1, \quad n_2(A) = 4, \quad n_3(A) = 6, \quad n_4(A) = 4 \quad \text{total } n(A) = 15$$

y los caminos desde B son

$$n_1(B) = 4, \quad n_2(B) = 6, \quad n_3(B) = 4, \quad n_4(B) = 1 \quad \text{total } n(B) = 15$$

La probabilidad de que se encuentren en el punto 1 será

$$Pp_1 = (1/15)(4/15) = 4/225$$

que es el producto de las probabilidades de que el padre pase por 1 y el hijo también.

Análogamente las probabilidades de encuentro en los puntos 2, 3 y 4 son

$$p_2 = 24/225, \quad p_3 = 24/225, \quad p_4 = 4/225$$

Por tanto la probabilidad total de que se encuentren es

$$p = p_1+p_2+p_3+p_4 = 56/225 = 0{,}24$$

Consideremos ahora el caso de la figura 5(b), m=7, n=4. El número de puntos de encuentro posibles son los 9 indicados en la figura y los números de caminos que van a ellos son:

desde A : 1 , 1 , 5 , 5 , 10 , 10 , 10 , 10 , 5

desde B : 5 , 10 , 10 , 10 , 10 , 5 , 5 , 5 , 1

en total son 57 caminos para cada caso. Por tanto las probabilidades de encuentro en cada uno de los 9 puntos son

$$p_1 = p_9 = 5/3249,\ p_2 = p_8 = 10/3249,\ p_3 = p_4 = p_6 = p_7 = 50/3249,\ p_5 = 100/3249$$

La probabilidad total de encuentro resulta ser

$$p = p_1 + p_2 + ...+ p_9 = 330/3229 = 0{,}102$$

Obsérvese que la idea de probabilidad aparece aquí tan solo como creciente de casos favorables y posibles y por tanto puede tomarse como definición y plantear el problema, en casos simples, aún sin haber estudiado probabilidades. El problema puede, incluso, tomarse como una motivación para el estudio de las probabilidades y de la combinatoria.

Para el caso general, con valores cualesquiera de m y n la solución del problema no es tan simple, pero cabe dentro de los últimos años de la enseñanza media. Es un ejercicio interesante hacer que los alumnos, por inducciones sucesivas, lleguen a las fórmulas generales. Estas son:

Para m+n par, poniendo m+n = 2s y suponiendo m≥n y que las coordenadas de los extremos son A(0,0) y B(m,n), los puntos de encuentro posibles son 1(s,0), 2(s-1,1), 3(s-2,2),..., (n+1) ((m-n)/2,n) y las probabilidades de encontrarse en cada uno de ellos son, respectivamente

$$p_1 = \binom{s}{1} T^{-2},\quad p_2 = \binom{s}{1}\binom{s}{n-1} T^{-2},\quad p_3 = \binom{s}{2}\binom{s}{n-2} T^{-2},\ \dots\ p_{n+1} = \binom{s}{n} T^{-2}$$

siendo

$$T = 1 + \binom{s}{1} + \binom{s}{2} + \dots + \binom{s}{n}$$

y la probabilidad total de encuentro resulta

$$p = \left[\binom{s}{n} + \binom{s}{1}\binom{s}{n-1} + \dots + \binom{s}{n}\right] T^{-2}$$

Para m+n impar, suponiendo m≥n y poniendo m+n−1=2s se obtiene

$$p_1 = \binom{s}{n} T^{-2}\qquad p_2 = \binom{s}{n-1} T^{-2},\quad p_3 = \binom{s}{1}\binom{s}{n-1} T^{-2},$$

$$p_4 = \binom{s}{1}\binom{s}{n-2} T^{-2},\ \dots\ p_{2n-1} = \binom{s}{n-1}\binom{s}{1} T^{-2},\quad p_{2n} = \binom{s}{n-1} T^{-2}$$

$$p_{2n+1} = \binom{s}{n} T^{-2}$$

y la probabilidad total de que se encuentren resulta

$$p = \left[\binom{S}{n}+\binom{S}{n-1}+\binom{S}{1}\binom{S}{n-1}+\dots+\binom{S}{n-1}\binom{S}{1}+\binom{S}{n-1}+\binom{S}{n}\right] T^{-2}$$

siendo en este caso

$$T = 2 \quad 1 + \genfrac{}{}{0pt}{}{S}{1} + \dots + \genfrac{}{}{0pt}{}{S}{n-1} + \genfrac{}{}{0pt}{}{S}{n}$$

Se puede discutir para qué valores de m , n esta probabilidad es mínima dentro de una distancia $m+n$ dada. El valor máximo corresponde de manera evidente a $n = 0$, en cuyo caso $p = 1$, o sea, el encuentro es seguro.

El problema se complica si el padre viaja en automóvil y algunas calles tienen dirección única.

La introducción de la "distancia del peatón" puede dar origen a algunos problemas en los que se ejercita la geometría en coordenadas, por ejemplo el conjunto de puntos equidistantes de un centro se comprueba facilmente que es un cuadrado de diagonales paralelas a las calles. Llamando "geodésica" a cualquier camino que proporcione la distancia mínima entre dos cualesquiera de sus puntos, sabemos que el número de geodésicas entre A y B es el número N(A,B) antes calculado. ¿Cómo definir la geodésica perpendicular a otra? ¿Cuáles serán las geodésicas paralelas? ¿Cuántas geodésicas paralelas a otra pasan por un punto?

Estos problemas se relacionan con el clásico "camino al azar" de la teoria de probabilidades. Por ejemplo, el problema del camino al azar sobre una recta, con pasos de longitud unidad igualmente probables a la derecha o a la izquierda a partir de un punto 0, se puede interpretar como una geodésica en el sentido anterior a partir de 0 construida en el cuadrante $x \geqslant 0$, $y \leqslant 0$; basta representar los movimientos a la derecha como avances paralelos al eje x y los movimientos a la izquierda como retrocesos paralelos al eje y. El problema de las barreras absorbentes a distancias m, n de 0, equivale al estudio de las geodésicas a partir de 0 que no salen de la banda de plano limitado por las rectas $x + y = m$, $x - y = n$.

Lo importante de estos problemas es que admiten una gran variedad de tratamientos, desde el muy elemental (ver por ejemplo, Glaymann-Varga, *Les probabilités à l'école*, CEDIC, 1973; traducción castellana de Editorial Teide, Barcelona, 1975) hasta el más superior). Según los recursos matemáticos disponibles por los alumnos se plantean y resuelven problemas adecuados.

8 Cuadrados latinos y geometrías finitas.

A veces conviene partir de un problema concreto y proponer luego como proyecto encontrar o discutir posibles generalizaciones. Vamos a mencionar un ejemplo relativamente reciente, que en su forma general ha sido estudiado por R.K.BRAYTON - D. COPPERSMITH - A.J. HOFFMAN, *Self-orthogonal latin squares of all orders* $\neq$ 2,3,6, Bulletin of the Amer. Math. Soc. vol.80, 1974, 116-121. Nosotros nos vamos a limitar a casos simples, posibles de tratar en la enseñanza media, pero que hacen comprender la existencia de problemas todavía no resueltos. Sea el problema siguiente:

Cuatro matrimonios de un club desean organizar una serie de partidas de tennis dobles (dos contra dos) mixtos, es decir, cada equipo compuesto de un hombre y una mujer, de manera que se cumplan las siguientes condiciones: a) Marido y mujer nunca juegan en un mismo partido, ni como compañeros ni como contrincantes; b) Dos jugadores cualesquiera del mismo sexo juegan como contrincantes una sola vez; c) Los componentes de cada pareja de distinto sexo que no son matrimonio, deben jugar exactamente un partido como compañeros y un partido como contrincantes.

Se trata de planificar estos encuentros.

Representando por H_1, H_2, H_3, H_4 a los hombres y por M_1, M_2, M_3, M_4 a las correspondientes esposas, de acuerdo con las condiciones impuestas, por sucesivos tanteos es fácil obtener que deberán jugar 6 partidos de la siguiente manera:

(I) $H_1M_2 - H_3M_4$, $\quad H_1M_3 - H_4M_2$, $\quad H_2M_1 - H_4M_3$
$H_2M_3 - H_1M_4$, $\quad H_2M_4 - H_3M_1$, $\quad H_3M_2 - H_4M_1$

Si se trata de un número mayor de matrimonios el problema se complica. Para su análisis conviene sacar consecuencias del caso simple considerado de 4 matrimonios. Formemos los siguientes cuadros: Cuadro II: el elemento diagonal a_{ii} se pone igual a i y el elemento a_{ij} se pone igual al número de la mujer que según (I) juega con H_i en el único partido que H_i juega contra H_j. El cuadro III es el transpuesto del cuadro II.

(II)

1	4	2	3
3	2	4	1
4	1	3	2
2	3	1	4

(III)

1	3	4	2
4	2	1	3
2	4	3	1
3	1	2	4

Estos cuadrados tienen en cada fila y en cada columna los números 1, 2, 3, 4 de manera tal que no hay dos elementos iguales en ninguna fila ni en ninguna columna. El resultado es una consecuencia de la condición (c), pues si la fila i de (II) tuviera dos elementos iguales, significaria que H_i tendria dos veces una misma pareja, contra la hipótesis. Los cuadrados de este tipo se llaman **cuadrados latinos**.

Superponiendo los cuadrados anteriores resulta el nuevo cuadrado

(IV)

1 1	4 3	2 4	3 2
3 4	2 2	4 1	1 3
4 2	1 4	3 3	2 1
2 3	3 1	1 2	4 4

En este cuadrado cada par ordenado de números (entre 1 y 4) aparece una sola vez. Cuando dos cuadrados latinos tienen esta propiedad de que al ser superpuestos el cuadrado resultante no presenta ningun par ordenado repetido, se dice que los cuadrados latinos son

ortogonales y el cuadrado resultante, como el (IV) anterior, se llama un **cuadrado greco-latino.**

La relación entre el cuadrado (IV) *y los partidos* (I) *es la siguiente: si el elemento* a_{ij} de (IV) es el par h,k , el partido que le corresponde es el $H_iM_h - H_jM_k$. Por ejemplo a_{23} es 4,1 y el partido correspondiente será $H_2M_4 - H_3M_1$. Obsérvese que al elemento simétrico a_{32} corresponde 1,4 y el partido correspondiente es el mismo anterior. De esta manera se comprende que ningún par h,k de (IV) puede estar repetido, puesto que dos mujeres sólo pueden jugar una sola vez como contrincantes.

Se tiene así una identidad entre el programa (I) de partidos a jugar y los pares de cuadrados latinos (II), (III) que son entre si transpuestos y ortogonales. Por tanto, el problema propuesto, para n matrimonios es equivalente al de **buscar dos cuadrados latinos de orden n que sean a la vez transpuestos y ortogonales.** El teorema fundamental de Brayton-Coppersmith-Hoffman, difícil de probar, es que tales cuadrados (llamados autoortogonales) existen para todo n excepto para $n = 2, 3, 6$.

La no existencia para $n = 2,3$ es inmediata, pero ya para $n = 6$ se vincula con un problema clásico de Euler de no fácil solución.

Para $n = 5$ se puede hacer un estudio directo elemental parecido al anterior y se llega al cuadrado greco latino

1 1	5 3	4 5	3 2	2 4
3 5	2 2	1 4	5 1	4 3
5 4	4 1	3 3	2 5	1 2
2 3	1 5	5 2	4 4	3 1
4 2	3 4	2 1	1 3	5 5

que es la superposición de dos cuadrados latinos transpuestos. Los partidos correspondientes en un torneo que cumple las condiciones antes enunciadas son

$$H_1M_5 - H_2M_3 \quad , \quad H_1M_4 - H_3M_5 \quad , \quad H_1M_3 - H_4M_2 \quad , \quad H_1M_2 - H_5M_4$$
$$H_2M_1 - H_3M_4 \quad , \quad H_2M_5 - H_4M_1 \quad , \quad H_2M_4 - H_5M_3$$
$$H_3M_2 - H_4M_5 \quad , \quad H_3M_1 - H_5M_2 \quad , \quad H_4M_3 - H_5M_1$$

que resultan, igual que antes, escribiendo que si el cuadro (i,j) tiene el número (h,k) el partido correspondiente es $H_iM_h - H_jM_k$.

Desde el punto de vista de la enseñanza media el tema es interesante por ilustrar como se pasa de un problema concreto, en este caso de índole deportivo, a un problema matemático que en este caso tiene una larga historia y del cual quedan todavía cuestiones por dilucidar. Los cuadrados greco latinos, por otra parte, tienen interés en estadística para el planeamiento de experimentos. Para la construcción de pares de cuadrados latinos ortogonales, es interesante el método de las "geometrías finitas", que vamos a exponer en un ejemplo para ver como se ejercitan en él cuestiones de álgebra y geometría en coordenadas que seguramente habrán de despertar el interés de ciertos alumnos.

Geometría finita sobre G_4. Consideremos un cuerpo finito de 4 elementos 0,1,a,b con sus respectivas tablas de adición y producto

+	0	1	a	b
0	0	1	a	b
1	1	0	b	a
a	a	b	0	1
b	b	a	1	0

X	0	1	a	b
0	0	0	0	0
1	0	1	a	b
a	0	a	b	1
b	0	b	1	a

Llamemos **punto** al conjunto de tres elementos de G_4, sean (x,y,z) tales que: a) no sean los tres nulos; b) las ternas (x,y,z) y $(\lambda x, \lambda y, \lambda z)$ representan el mismo punto, suponiendo $\lambda \neq 0$. Llamemos **recta** al conjunto de puntos que satisfacen a una ecuación de la forma $Ax+By+Cz = 0$, siendo (A,B,C) un punto. Se tienen de esta manera 21 puntos y 21 rectas que constituyen el plano proyectivo sobre G_4.

Es interesante escribir todos los puntos y todas las rectas de este plano y hacer ejercicios del tipo: a) Hallar la ecuación de la recta que pasa por dos puntos dados (por ejemplo, la recta que pasa por $(1,0,a)$ y $(b,1,0)$ es $ax+y+z = 0$); b) Hallar el punto de intersección de dos rectas (por ejemplo, las rectas $x+y+az = 0$, $bx+y = 0$ se cortan en el punto $(1,b,1)$). Notar que cada recta tiene 5 puntos y por cada punto pasan 5 rectas; escribir una tabla que contenga todas estas relaciones. Estos ejercicios se resuelven exactamente como en el caso del plano real, teniendo en cuenta las tablas operatorias del cuerpo G_4. Para relacionar esta geometría con los cuadrados latinos ortogonales se procede de la manera siguiente.

i) Se considera una recta fija, por ejemplo la $x = 0$. Se hallan los 5 puntos de la misma, a saber

J_1 (0 0 1), J_2 (0 1 0), J_3 (0 1 1), J_4 (0 1 a), J_5 (0 1 b).

ii) Se consideran las 4 rectas, además de $x=0$, que pasan por J_1 y las que pasan por J_2, las cuales resultan ser

$$J_1 \begin{cases} r_{11}: & y=0 \\ r_{12}: & x+y=0 \\ r_{13}: & x+ay=0 \\ r_{14}: & x+by=0 \end{cases} \qquad J_2 \begin{cases} r_{21}: & z=0 \\ r_{22}: & x+z=0 \\ r_{23}: & x+az=0 \\ r_{24}: & x+bz=0 \end{cases}$$

Los puntos de intersección de estas rectas entre sí son

		r_{21}	r_{22}	r_{23}	r_{24}
	r_{11}	1 0 0	1 0 1	1 0 b	1 0 a
(*)	r_{12}	1 1 0	1 1 1	1 1 b	1 1 a
	r_{13}	1 b 0	1 b 1	1 b b	1 b a
	r_{14}	1 0 a	1 a 1	1 a b	1 a a

iii) Consideremos las rectas que pasan por J_3 (0 1 1)

$$J_3 \left\{ \begin{array}{ll} r_{31}: & y + z = 0 \\ r_{32}: & x + y + z = 0 \\ r_{33}: & bx + y + z = 0 \\ r_{34}: & ax + y + z = 0 \end{array} \right.$$

En el cuadrado (*) pongamos en el lugar de la fila i y columna j , el número h de la recta r_{3h} que pasa por él. Por ejemplo el punto (3,2) es (1 b 1) y de las rectas r_{3h} la que pasa por este punto es la r_{34}. Se tiene así el siguiente cuadrado latino

(a)

1	2	3	4
2	1	4	3
3	4	1	2
4	3	2	1

Este cuadrado es latino puesto que los puntos de cada fila (o columna) del cuadrado (*) solo pueden unirse con una sola recta r_{3h}, es decir, en las filas y columnas del cuadrado no pueden aparecer numeros repetidos.

iv) Procediendo analogamente con J_4 y J_5 se tienen las rectas

$$J_4 \left\{ \begin{array}{ll} r_{41}: & y + bz = 0 \\ r_{42}: & x + y + bz = 0 \\ r_{43}: & x + ay + z = 0 \\ r_{44}: & x + by + az = 0 \end{array} \right. \qquad J_5 \left\{ \begin{array}{ll} r_{51}: & y + az = 0 \\ r_{52}: & x + y + az = 0 \\ r_{53}: & x + by + z = 0 \\ r_{54}: & x + ay + bz = 0 \end{array} \right.$$

que procediendo como antes dan lugar a los cuadrados latinos

$$(\beta)\quad \begin{matrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{matrix} \qquad (\gamma)\quad \begin{matrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{matrix}$$

La importancia de los cuadrados latinos (α), (β), (γ) es que ellos son ortogonales entre si dos a dos. En efecto, si al superponer (α) y (β) por ejemplo, aparecieran dos pares iguales $(i,j) = (i', j')$ significaría que dos puntos del cuadro (*) pertenecen a una misma recta por J_3 y a una misma recta por J_4 lo cual no es posible.

Para comparar (α), (β), (γ) con los cuadrados latinos obtenidos anteriormente, se pueden ordenar permutando filas y columnas, de manera que en la diagonal aparezcan 1,2,3,4. Resultan así los cuadrados latinos ortogonales y transpuestos

$$(\alpha)\quad \begin{matrix} 1 & 4 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{matrix} \qquad (\beta')=(\gamma')= \begin{matrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{matrix}$$

que son los mismos antes encontrados.

El método anterior sirve siempre que se tenga un cuerpo finito de orden n. Se sabe que esto ocurre siempre que n sea la potencia de un número primo. Por tanto vale para $n = 5$, pero no para $n = 6$. Para los valores de n que no son de esta forma, el método no sirve, lo cual no quiere decir que no existan cuadrados latinos ortogonales, pero hay que buscarlos por otros métodos, en general complicados y no sistemáticos. Para $n = 10$ la construcción se logró en 1959 por Bose y Schrikhande (Proc. Nat. Acad. Sc. vol. 45, 1959, 734-737).

Si los alumnos presentan interés por la geometría finita, puede ampliarse el tema en la dirección axiomática. Consideremos por ejemplo la siguiente definición general:

Una "geometría finita generalizada" es un conjunto finito de elementos llamados **puntos** P y un conjunto finito de elementos llamados **rectas** r que satisfacen a los siguientes axiomas:

1. Dos puntos determinan exactamente una recta que pasa por ellos.
2. Para toda recta r , existe un punto P que no pertenece a ella;
3. Toda recta contiene por lo menos dos puntos;
4. Existe por lo menos una recta;
5. Dado un punto P y una recta r que no lo contiene, existen exactamente k rectas que pasan por P y no tienen punto común con r.

Las rectas que no tienen punto común se llaman **rectas paralelas.**

El teorema fundamental de esta geometría es el siguiente:

Si una recta contiene exactamente n puntos, entonces:

a) Toda recta contiene exactamente n puntos;
b) Por cada punto pasan exactamente $n+k$ rectas;
c) Existen exactamente $(n+k)(n-1)+1$ puntos;
d) Existen exactamente $(1/n)\,[(n+k)(n-1)+1]\,(n+k)$ rectas.

Es interesante que los alumnos prueben total o parcialmente este teorema pues cabe dentro de sus posibilidades y ello es un ejercicio interesante para ejercitar la deducción de teoremas a partir de un sistema de axiomas. Conviene también que den ejemplos para ver que el sistema es compatible y, si se puede, prueben que los axiomas son independientes (también con ejemplos negando cada uno de los axiomas).

Una tal geometría se representa por $G(n,k)$. Para $k=0$ se tienen las geometrías finitas ordinarias, muy estudiadas. Si $n-1$ es la potencia de un número primo se tiene la geometría sobre un cuerpo finito. El caso general $k \neq 0$ es menos conocido. Es un tema interesante considerar los casos más simples e idear representaciones de la geometría resultante. Por ejemplo, la $G(2,2)$ se compone de cinco puntos, sean 1,2,3,4,5 y diez rectas, a saber

r_1: 1 2, r_2: 1 3, r_3: 1 4, r_4: 1 5, r_5: 2 3,
r_6: 2 4, r_7: 2 5, r_8: 3 4, r_9: 3 5, r_{10}: 4 5,

que pueden representarse por los cinco vértices de un pentágono y sus lados diagonales.

Se pueden construir $G(2,3)$ que tiene seis puntos y quince rectas y $G(2,4)$ con siete puntos y veintiuna rectas. Con más trabajo se pueden construir $G(3,3)$ y $G(3,4)$ esta última con 14 puntos y 35 rectas. El problema de saber para qué valores de k el problema tiene o no solución no parece estar resuelto. Un teorema fácil es que para que exista $G(n,k)$ es necesario (puede no ser suficiente) que $k(k-1)$ sea múltiplo de n. La demostración es inmediata observando que en caso contrario el número de rectas no resulta entero. Bibliografía sobre el tema se puede ver en S.H. HEATH - C.R. WYLIE, *Some observations on* BL (3,3), Revista de Matemáticas y Física teórica de la Universidad N. de Tucumán, vol. 20, 1970, p. 117-123).

9. Problemas de simulación. Tablas de números al azar.

La teoría de probabilidades y la estadística ofrecen amplio campo para proyectos o problemas largos muy adecuados para el estudio y tratamiento en equipo y discusión colectiva. El método de simulación de situaciones y su tratamiento mediante tablas de números al azar es muy instructivo y conviene que los alumnos se familiaricen con él, pues si bién para obtener resultados confiables se necesitan muchos números y una calculadora para operar con ellos, por ejemplo una calculadora de bolsillo, para dar una idea del método y hacer comprender como opera el azar, a veces son suficientes pocas operaciones, factibles de ser realizadas a mano.

Se necesitan siempre unas tablas de números al azar. Hay que explicar que son estas tablas y hacer que cada alumno se fabrique la suya o la copie de las que se encuentran en muchos libros de probabilidades. Conviene que las tablas sean distintas de un alumno a otro, para de esta manera disponer, en conjunto, de tablas de muchos números (la de cada alumno puede ser de unos 500 dígitos). Para dar una idea y como ejemplo, reproducimos a continuación 400 dígitos al azar de la tabla dada por Glaymann-Varga en su libro ya citado *Les probabilités à l'école*, CEDIC, 1973 (traducción castellana por Editorial Teide, Barcelona, España, 1975):

0655	8453	4467	3384	5320
5255	5161	4889	7429	4647
6314	8951	2335	0174	6993
3157	9764	4862	5848	6919
9052	9565	4635	0653	2254
4105	4105	3187	4312	1596
1437	2851	6727	5580	0368
4064	4171	7013	4631	8288
1037	5765	1562	9869	0756
5718	8791	0754	2222	2013
5127	2302	1292	4413	9651
0401	2423	6301	2611	0650
4064	5228	4153	2544	4125
5458	1402	9849	9886	5579
2461	3497	9785	5678	4471
4320	4558	2545	4436	9265
3466	8269	9926	7429	7516
9313	7489	2464	2575	9284
5179	8081	3361	0109	775[illegible]
3010	5081	3300	9979	1970

Consideremos el siguiente problema:

Una linea de ómnibus tiene un servicio programado para que por la parada A pase un ómnibus cada 8 minutos. Por circunstancias del tráfico, ocurre que cada ómnibus puede adelantarse o atrasarse hasta 4 minutos, con igual probabilidad. Un pasajero llega a la estación A en un momento al azar. ¿Cuál es el tiempo medio que tendrá que esperar hasta que llegue un ómnibus?

Vamos a tratar el problema por simulación. Consideremos el eje x como eje de los tiempos. El ómnibus P_1 que debería llegar a A en el minuto $x=4$, puede pasar, con igual probabilidad en cualquiera de los minutos $0 \leqslant x_1 \leqslant 8$. El ómnibus P_2 que debería pasar en el minuto $4+8=12$ puede pasar en cualquiera de los minutos $8+x_2$ siendo $0 \leqslant x_2 \leqslant 8$. Podemos suponer, además, que el pasajero llega, con igual probabilidad, en cualquiera de los minutos $0 \leqslant x_0 \leqslant 8$, pues la situación sería la misma en cualquier intervalo análogo.

Para usar las tablas de números al azar, tomamos una sucesión de ternas (x_1, x_2, x_0) de la tabla anterior, excluyendo el 9 cada vez que aparezca. Se tiene así la sucesión 065, 584, 534, 467, 338, 453, 205, 255, 516, 148, 874, 246... Convenimos en tomar el primer número x_1 como el minuto en que pasa el ómnibus P_1. El número x_2 representa que el ómnibus P_2 llega en el minuto $8+x_2$ y el número x_0 indica que el pasajero llega en el minuto x_0. La diferencia $x_1 - x_0$ si $x_1 \geqslant x_0$ o la diferencia $8+x_2-x_0$ si $x_0 > x_1$ es el tiempo de espera en cada caso. Tenemos así la siguiente tabla

x_1	x_2	x_0	espera
0	6	5	9
5	8	4	1
5	3	4	1
4	6	7	7
3	3	8	3
4	5	3	1
2	0	5	3
2	5	5	8
5	1	6	3
1	4	8	4
8	7	4	4
2	4	6	6
4	7	6	9
3	1	4	5
8	5	1	7

x_1	x_2	x_0	espera
2	3	3	8
5	0	1	4
7	4	6	1
3	3	1	2
5	7	7	8
6	4	4	2
8	6	2	6
5	8	4	1
8	6	1	7
0	5	2	11
5	6	5	0
4	6	3	1
5	0	6	2
5	3	2	3
2	5	4	9

2	4	6	6
4	7	6	9
3	1	4	5
8	5	1	7

Con estas 30 experiencias, el valor medio del tiempo de espera resulta ser $E(t) \simeq 136/30 = 4{,}53$ minutos.

El problema se puede resolver teoricamente si los alumnos conocen un poco de cálculo integral (último año de escuela media) y el resultado es que si el tiempo entre dos ómnibus consecutivos está programado en 2t minutos y se admite una tolerancia de $\pm$ t, es $E(t) = (7/6)t$. En el caso considerado resulta $E(t) = (7/6)4 = 4{,}66...$ Vemos que la aproximación es bastante aceptable. Si cada alumno procede de manera análoga con su propia tabla de números al azar, los números particulares anteriores diferirán mucho entre si, pero el resultado final debe ser parecido; la media aritmética de los resultados obtenidos se aproximará, en probabilidad, cada vez más al valor teórico.

El problema admite muchas variantes: a) los intervalos en que pueden pasar los ómnibus P_1, P_2,... que en el caso considerado empalman en el punto $x=8$, puede ocurrir que sean disjuntos, o bien que tengan parte común, en cuyos casos el tratamiento por simulación es muy análogo al anterior y en cambio el tratamiento teórico es más complicado. b) puede pensarse, como más realístico, que los ómnibus sólo pueden retrasarse, pero no adelantarse; también en este caso se trata de igual manera.

Es interesante relacionar el problema con la realidad. Si los alumnos deben tomar un cierto ómnibus para ir a la escuela, se les puede pedir que pregunten la frecuencia con que teóricamente deberían pasar y que anoten los tiempos de espera de cada día. Se procura hacer un esquema teórico que se adapte lo más posible a la realidad y se analizan los valores reales con los que resultan de la simulación. La discusión de los parámetros necesarios para que la simulación se adapte a la realidad da lugar a interesantes posibilidades y acostumbra a los alumnos al razonamiento probabilístico.

El uso de Tablas de números al Azar es poco frecuente en la escuela secundaria. Creemos que debería intensificarse. Es una manera de "experimentar" en problemas simples de probabilidades, sin necesidad de acudir a las monedas, a los dados o a las urnas. Es, además, una excelente manera de aprender a "simular", haciendo del problema un modelo aritmético. Es el fundamento del Método de Monte Carlo que permite, usando computadoras, resolver problemas difíciles. Veamos otro ejemplo.

Problema de estacionamiento.

Supongamos una calle de 100 m de largo a la que van llegando coches de 3 m de largo, los cuales estacionan al azar en el lugar que encuentran vacío, sin preocuparse de acercar su coche a los ya estacionados, para que quepan más. Se desea saber el valor medio del número de coches que podrán estacionar.

La solución teórica no es fácil. El problema fué resuelto por el matemático húngaro A. Rényi (*Magyar Tud.Akad.Mat. Intezet Kozl* 3, 1958) y la solución dice que procediendo de la manera indicada, estacionando al azar, se cubrirá por término medio el 74% del espacio disponible. Por tanto, en el caso considerado, el número medio de coches que podrán estacionar será $74/3 = 24{,}6$. Si se dispusieran bien, uno justo después del otro, cabrían $100/3 = 33{,}3$ coches.

Para resolver el problema experimentalmente, con una tabla de números al azar, podemos proceder de la manera siguiente. Tomemos en la tabla grupos de números de 3 cifras que indicarán, en decímetros, la distancia al comienzo de la calle del coche que se estaciona. Si el lugar ya está ocupado, se sigue en la lista, prescindiendo del número. Procediendo, por comodidad de lectura, por columnas, y utilizando la tabla anterior de Glaymann-Varga, resulta lo siguiente: el primer coche que llega estaciona entre 65 y 95 dm. El segundo, entre 525 y 555 dm, el tercero entre 631 y 661 dm y así sucesivamente, hasta que llega uno que, al azar, debería estacionar entre los 406 y los 436 dm, pero no lo puede hacer por estar este lugar ya ocupado por el que estacionó entre 410 y 440. Siguiendo con la tabla se obtiene la siguiente sucesión de lugares ocupados:

65 - 95, 525 - 555, 631 - 661, 315 - 345, 905 - 935, 410 - 440, 143 - 173,
103 - 133, 571 - 601, 246 - 276, 346 - 376, 489 - 519, 797 - 827, 728 - 758,
441 - 471, 246 - 276, 65 - 95, 346 - 376, 759 - 789, 284 - 314, 970-1000.

Son en total 21 coches. Se ha terminado la tabla y quedan todavía algunos intervalos vacíos, que son los 33 - 65, 173 - 246, 376 - 410, 601 - 631, 827 - 874, 935 - 970. Como unicamente en el intervalo 173 - 246 caben dos coches, procediendo con una tabla más extensa, en algún momento, ellos se llenarán, resultando en total un máximo de 27 coches. Vemos que este valor es bastante aproximado al teórico mencionado. Naturalmente que con esto se ha hecho una sola prueba. Haciendo lo mismo con la tabla de cada alumno y promediando se verá como los resultados van siendo siempre no muy distantes del dado por la *teoría*. Se trata, por tanto, de resultados muy confiables.

Conviene que los profesores vayan coleccionando ejemplos de este tipo, adaptados a cada lugar y a cada momento, procurando que interesen lo más posible a los alumnos.

Todas las aplicaciones expuestas, realizadas a modo de proyectos, son complementos indispensables de todo curso de matemática. En ellas se manejan los conocimientos adquiridos, se despierta el interés de los alumnos para el estudio de los mismos y se da aliento a la fantasía para descubrir nuevos métodos de solución y nuevos problemas o variantes de los mismos. Lo ideal sería encontrar temas adecuados para cada alumno, de acuerdo con su vocación, su temperamento y su capacidad.

Departamento de Matemática
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Ciudad Universitaria (Nuñez)
Buenos Aires (Argentina)