LA PROBABILIDAD EN LAS CONSTRUCCIONES GEOMETRICAS

POR

LUIS A. SANTALO

Profesor de la Universidad Nacional de La Plata

I. INTRODUCCION

En muchos libros de Cálculo de Probabilidades, como ejemplo de probabilidades geométricas o continuas, se suele considerar el problema de hallar la probabilidad de que se pueda construir un triángulo dados los tres lados al azar (*).

En realidad un problema de probabilidad de tipo análogo se presenta en todas las construcciones geométricas siempre que los datos deban cumplir ciertas condiciones para que la construcción sea posible. En la construcción de triángulos, dados tres de sus elementos, los problemas de este tipo que aparecen son abundantes: ¿cuál es la probabilidad de que se pueda construir un triángulo dadas las tres medianas al azar, o las tres alturas, o dos alturas y una mediana? Pero no sólo en la construcción de triángulos, sino que en cualquier otra rama de la geometría donde se trate de una construcción gráfica, la posibilidad o no de la misma presenta de manera natural una cuestión de probabilidad. Por ejemplo: dados dos pares de puntos al azar sobre una cónica, ¿cuál es la probabilidad de que la involución que ellos determinan sea elíptica?; dado un espacio de dibujo limitado y en él tres puntos al azar en línea recta, A, B, C, ¿cuál es la probabilidad de que el conjugado armónico de B respecto al par $A - C$ caiga dentro de los límites del dibujo? En geometría descriptiva también los ejemplos son frecuentes: representada en el sistema Monge una esfera y dadas al azar las dos

(*) Ver, por ejemplo, E. CZUBER, *Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Leipzig und Berlin, 1908, p. 87-88.

proyecciones de una recta de manera que corten a las proyecciones del mismo nombre de la esfera, ¿cuál es la probabilidad de que la recta corte realmente a la esfera?; o bien, representado en sistema Monge un cono de revolución con la base apoyada en el plano horizontal y dada una dirección al azar, ¿cuál es la probabilidad de que la sombra del cono no corte a la línea de tierra?

Este es el tipo de problemas que nos proponemos tratar en este trabajo. Daremos únicamente algunos ejemplos que puedan servir de modelo, aunque ya se comprende que se podrían plantear infinitos de ellos. Desde el punto de vista conceptual la solución de este tipo de problemas no ofrece dificultad; la dificultad aparece en el cálculo efectivo de las integrales múltiples que dan la solución, las cuales fácilmente se complican hasta extremos prácticamente inasequibles. Por ejemplo, aunque de fácil planteo, parece prácticamente imposible de resolver un problema tan atrayente como el siguiente: se da una lámina de dibujo rectangular y dentro de ella una elipse (o, en general, un arco de cónica); dados sobre la misma seis puntos al azar, ¿cuál es la probabilidad de que la recta de Pascal del exágono que ellos forman caiga dentro de los límites del dibujo?

II. LA PROBABILIDAD EN LA CONSTRUCCION DE TRIANGULOS

Empezaremos por el caso más simple de problemas del tipo mencionado, a saber: dados al azar tres elementos que determinan un triángulo, hallar la probabilidad de que el triángulo exista realmente.

Por comodidad utilizaremos, como es costumbre, la siguiente nomenclatura:

A, B, C	ángulos del triángulo;
a, b, c	lados opuestos a los ángulos del mismo nombre;
h_a, h_b, h_c	alturas que parten de A, B, C, respectivamente;
m_a, m_b, m_c	medianas que parten de A, B, C, respectivamente;
w_a, w_b, w_c	bisectrices, etc.

Un triángulo queda determinado por tres elementos independientes. Hay casos en que la construcción es siempre posible, por ejemplo cuando los datos son (A, b, c); se dice entonces que la probabilidad de poderlo construir es igual a 1. En otros casos el triángulo sólo se puede construir cuando uno de los datos toma un valor particular calculable a partir de los demás, por ejemplo cuando se dan (A, b, h_c); se dice entonces que la probabilidad de poderlo construir es nula. Entre estos casos extremos quedan aquellos, más interesantes, en que para que el triángulo se pueda construir los datos deben cumplir ciertas desigualdades o inecuaciones; el cálculo de la probabilidad de que la construcción sea posible posee entonces un verdadero sentido.

Es bien sabido que un problema de probabilidades geométricas sólo está bien planteado cuando se da el procedimiento seguido para elegir los datos al azar, lo cual equivale a dar la llamada

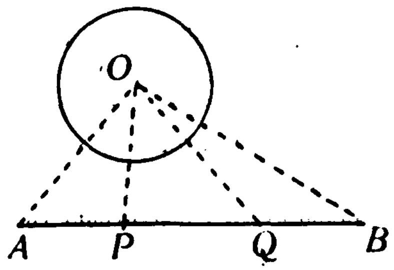

FIG. 1.

« función de probabilidad ». Cambiando el procedimiento, puede cambiar la probabilidad. Es clásica en este sentido la llamada « paradoja de Bertrán »(*). Sin necesidad de acudir a ella se pueden dar ejemplos mucho más simples. Supongamos un segmento $A\,B$ e interior al mismo otro segmento $P.Q$ (fig. 1); dado un punto X al azar en $A\,B$, ¿cuál es la probabilidad de que pertenezca a $P\,Q$? Para elegir X podemos tomar una ruleta de centro O y prolongar el radio final hasta cortar a AB (si no lo corta se repite la experiencia sin contar la prueba); la probabilidad es entonces el cociente entre el ángulo POQ y el AOB. Es evidente que esta probabilidad depende de la posición en el plano del centro O de la ruleta.

Sentadas estas observaciones, pasemos al problema de la probabilidad de poder construir un triángulo dados los datos al azar.

(*) Ver, por ejemplo, R. DELTHEIL, *Probabilités géométriques*, París, 1926.

Distinguiremos tres casos según que los datos sean tres segmentos, dos segmentos y un ángulo o un segmento y dos ángulos.

1. Problemas de probabilidad en la construcción de triángulos cuando los datos son 3 segmentos. — Debemos definir con toda precisión lo que entendemos por dar 3 segmentos al azar. Para ello utilizaremos dos procedimientos, que parecen los más naturales, a saber:

Procedimiento I. — Consideremos tres ejes cartesianos rectangulares x, y, z y el hexaedro regular de los puntos cuyas coordenadas satisfacen las limitaciones

$$0 \leq x \leq k \quad , \quad 0 \leq y \leq k \quad , \quad 0 \leq z \leq k \qquad [1]$$

donde k es una constante. A cada punto interior a este hexaedro corresponden su tres coordenadas x, y, z que tomaremos como segmentos datos del problema. Para calcular la probabilidad de un problema determinado bastará hallar el volumen llenado por los puntos correspondientes a casos favorables, es decir, por los puntos con cuyas coordenadas la construcción es posible, y dividirlo por el volumen total del hexaedro o sea por k^3.

Observemos que si $P(x, y, z)$ es un punto favorable, todos los que están sobre la recta que lo une con el origen, por tener sus coordenadas de la forma λx, λy, λz, serán también puntos favorables, puesto que corresponderán a triángulos semejantes. Por esto, el volumen de los casos favorables que hay que calcular en cada caso está siempre limitado por superficies cónicas de vértice en el origen de coordenadas.

Procedimiento II. — Sea dado un triángulo de altura k (triángulo fundamental). A cada punto P interior al mismo podemos hacer corresponder las tres distancias x, y, z del mismo a los tres lados del triángulo, distancias que tomaremos como segmentos datos del problema. Los puntos correspondientes a casos favorables llenarán una cierta área que deberemos calcular en cada caso: ella será la medida de los casos favorables. La medida de todos los casos posibles será el área del triángulo fundamental, o sea $(1/\sqrt{3})\, k^2$ y el cociente entre las dos medidas será la probabilidad, calculada según este segundo procedimiento.

Observemos que en este caso los datos x, y, z estarán ligados por la relación

$$x + y + z = k. \qquad [2]$$

Para el cálculo de las áreas que se presentan a veces es útil observar que tomando un sistema de coordenadas cartesianas orto-

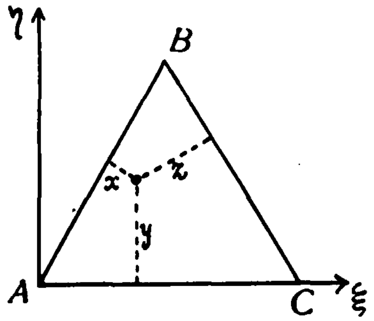

FIG. 2.

gonales ξ, η con el eje ξ coincidente con un lado del triángulo fundamental y el origen en un vértice (fig. 2) se verifica

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{3}} y + \frac{2}{\sqrt{3}} x \quad ; \quad \eta = y$$

ecuaciones que junto con [2] dan

$$x = \frac{\sqrt{3}}{2} \xi - \frac{1}{2} \eta \quad , \quad y = \eta \quad , \quad z = k - \frac{\sqrt{3}}{2} \xi - \frac{1}{2} \eta. \qquad [3]$$

OBSERVACIONES. — *a*) Hemos señalado dos procedimientos para dar los datos al azar. Son los que parecen más naturales, pero se comprende que se podrían dar infinitos más. Por ejemplo, se podría convenir en fijar una esfera de radio k y centro en el origen de cordenadas y elegir un punto sobre el octante positivo de su superficie, tomando las tres coordenadas del mismo como datos. Entonces los casos favorables se miden por el área de superficie esférica que cubren sus puntos representativos y la probabilidad se obtiene dividiendo esta área por la total del octante, o sea por $(\pi/2)\, k^2$. Esto equivale a sustituir la relación (2) por la más complicada

$$x^2 + y^2 + z^2 = k^2.$$

b) Dados unos ciertos datos puede haber muchos caminos para llevar a cabo la construcción del triángulo correspondiente. Como la probabilidad depende de ciertas relaciones entre los datos, independientemente del método seguido para la construcción efectiva del triángulo, se tiene la observación evidente, pero fundamental: *La probabilidad de que un cierto caso de construcción de triángulos, con los datos dados al azar, sea posible, puede depender y en general depende del procedimiento seguido para dar estos datos al azar, pero no del camino que se siga para construir el triángulo.*

Pasemos ahora a dar unos ejemplos concretos.

1) *Probabilidad de que se pueda construir un triángulo dados los tres lados.* — Como ya dijimos en la introducción, este caso es bien conocido. Poniendo $a = x$, $b = y$, $c = z$, las relaciones que se deben cumplir para que el triángulo sea posible son

$$x < y + z \quad , \quad y < z + x \quad , \quad z < x + y. \qquad [4]$$

Por el Procedimiento I la región favorable o sea la región interior al cubo [1] y cuyos puntos cumplen las relaciones [4] tiene por volumen $(1/2)k^3$ y por lo tanto la probabilidad buscada vale 1/2.

Por el Procedimiento II la región favorable es la interior al triángulo formado uniendo los puntos medios de los lados del triángulo fundamental, cuya área vale por tanto 1/4 de la total. La probabilidad por este procedimiento vale por tanto 1/4.

2) *Probabilidad de que se pueda construir un triángulo dadas las tres medianas* m_a, m_b, m_c. — Se sabe que para construir un triángulo dadas las tres medianas basta construir el triángulo cuyos lados sean el doble de las medianas dadas. Luego las relaciones que deben cumplir éstas son las mismas [4] y por lo tanto las probabilidades serán las mismas del problema anterior.

3) *Probabilidad de que se pueda construir un triángulo dados* m_a, h_a, a. — La única relación que se debe cumplir para que la construcción sea posible es que sea $h_a < m_a$. Se ve inmediatamente que en este caso la probabilidad es la misma por los dos procedimientos y vale 1/2.

4) *Pobabilidad de que se pueda construir un triángulo dados* h_a, m_a, b. — Las condiciones de posibilidad son evidentemente

$h_a \leq m_a$, $h_a \leq b$. El volumen del procedimiento I y el área del procedimiento II correspondiente a los casos favorables se calcula también inmediatamente en este caso, dando la misma probabilidad por ambos procedimientos, que resulta igual a 1/3.

5). *Probabilidad de que se pueda construir un triángulo dados al azar h_a, h_b, m_a.* — Un método de construcción consiste en construir primero el triángulo rectángulo de hipotenusa m_a y cateto h_a; sea A M H con $AM = m_a$, $AH = h_a$. Prolonguemos AM de un segmento $MA' = MA$ y tracemos la circunferencia de centro A y radio h_b. Las tangentes a esta circunferencia desde A' cortarán a la recta del segmento MH en puntos que son posibles vértices B (hay, en general, dos soluciones). Según esta construcción las condiciones que deben cumplir los datos para que la construcción sea posible son

$$h_a \leq m_a \;, \quad h_b \leq 2\, m_a \,.$$

Pongamos

$$h_a = x \;, \quad m_a = y \;, \quad h_b = z \,.$$

Por el Procedimiento I el volumen favorable es el limitado por los planos $x = y$, $z = 2\,y$ indicado en la fig. 3 *a*. De la figura se

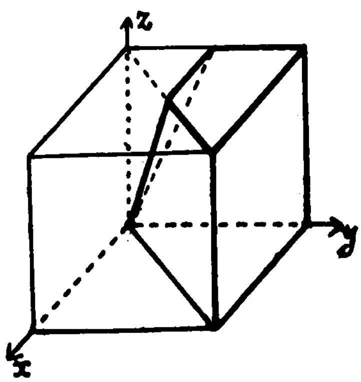

FIG. 3 *a*.

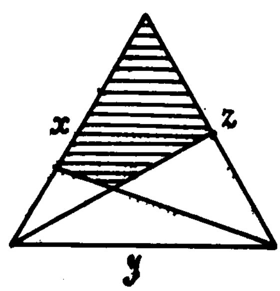

FIG. 3 *b*.

deduce inmediatamente que este volumen vale $(11/24)k^3$ y por lo tanto la probabilidad buscada vale 11/24.

Por el Procedimiento II el área favorable es la indicada en la fig. 3 *b*, cuya área vale $(1/2\sqrt{3} - \sqrt{3}/36)k^2$ y dividiendo por $(1/\sqrt{3})\,k^2$ se obtiene la probabilidad, que será por tanto 5/12.

6) *Probabilidad de que se pueda construir un triángulo dados* m_a, m_b, h_c. — Para que la construcción sea posible basta que se pueda construir el triángulo que tiene por altura $h_c/3$ y por lados no correspondientes a la misma $(2/3)m_a$ y $(2/3)m_b$, respectivamente. Las condiciones de posibilidad son por tanto

$$h_c \leq 2\, m_a \quad ; \quad h_c \leq 2\, m_b \, .$$

Poniendo $h_c = x$, $m_a = y$, $m_b = z$ por el procedimiento I los casos favorables corresponden a los puntos del volumen interior al cubo [1] y limitado por los planos $x - 2y = 0$, $x - 2z = 0$ (fig. 4 *a*). Este volumen se calcula fácilmente y vale $(7/12)k^3$. Luego, por este procedimiento I la probabilidad vale 7/12.

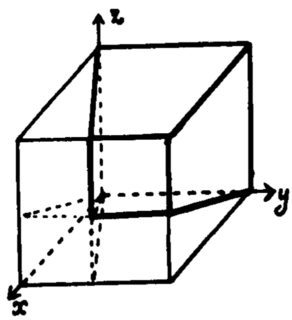

FIG. 4 *a*.

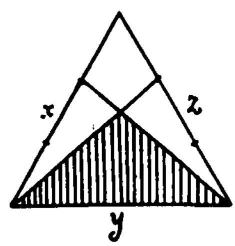

FIG. 4 *b*.

Por el procedimiento II, el área favorable es el rayado en la fig. 4 *b*, y por tanto su razón al área total del triángulo fundamental, o sea la probabilidad buscada, vale 1/2.

7) *Probabilidad de poder construir un triángulo dadas las tres alturas* h_a, h_b, h_c. — En los ejemplos anteriores, las relaciones de compatibilidad que debían cumplir los datos eran relaciones lineales, con lo cual el volumen (o el área) de los casos favorables, estaba limitado por planos (o rectas) y se calculaba fácilmente. En el caso en que los datos son alturas la cuestión cambia. Es sabido que el triángulo de alturas $h_a = x$, $h_b = y$, $h_c = z$ es semejante al triángulo cuyos lados son $1/x$, $1/y$, $1/z$; por tanto el primer triángulo será posible si lo es el segundo. De aquí que las condi-

ciones que deben cumplir x, y, z para que se pueda construir un triángulo que los tenga por alturas son

$$\frac{1}{x} < \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \quad , \quad \frac{1}{y} < \frac{1}{x} + \frac{1}{z} \quad , \quad \frac{1}{z} < \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$

o sea,

$$yz < xz + xy \quad , \quad xz < yz + yx \quad , \quad xy < zy + zx . \qquad [5]$$

Consideremos primero el procedimiento I. Si en lugar del signo $<$ ponemos en las desigualdades [5] el signo $=$, tendremos las ecuaciones de tres conos de vértice en el origen y cuyas secciones con las caras del cubo de arista k están indicadas en la fig. 5 *a*.

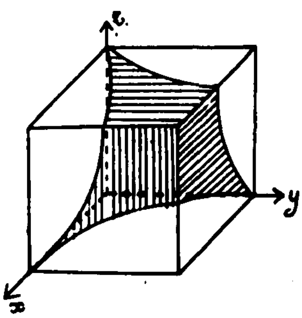

FIG. 5 *a*.

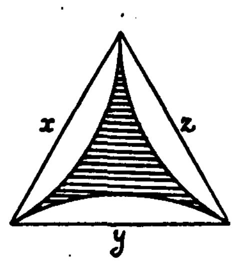

FIG. 5 *b*.

Los puntos cuyas coordenadas cumplen las condiciones [5] son los exteriores al mismo tiempo a los tres conos. Para hallar el volumen que llenan estos puntos se observa que basta hallar el volumen interior al cubo y limitado por el plano $z = 0$ y el cono $z = xy/(x+y)$; tomando tres veces este volumen y restándolo del volumen total k^3 tendremos el volumen de los casos favorables.

El volumen v_1 mencionado se obtiene fácilmente cortando primero por planos $x =$ constante, los cuales determinan un área de valor

$$\alpha = \int_0^k z\, dy = \int_0^k \frac{xy}{x+y} dy = kx - x^2 \log (k + x) + x^2 \log x$$

y de aquí

$$v_1 = \int_0^k \alpha\, dx = \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{3} \log 2\right) k^3.$$

El volumen de los casos favorables vale por tanto

$$v = k^3 - 3\, v_1 = (2 \log 2 - 1)\, k^3$$

y dividiendo por k^3 tendremos el valor de la probabilidad buscada, a saber,

$$p = 2 \log 2 - 1 = 0{,}386 \ldots$$

Pasemos ahora a resolver el problema por el procedimiento II. Habrá que calcular el área de los puntos interiores al triángulo fundamental para los cuales se cumplen las condiciones [5]. Con el cambio de variables [3], la expresión $xz = yz + xy$ se escribe

$$5\, \eta^2 - 3\, \xi^2 + 2 \sqrt{3}\, k\, \xi - 6\, k \eta = 0. \qquad [6]$$

Esta ecuación representa una hipérbola, la cual forma uno de los lados del triángulo curvilíneo que limita la región de los casos favorables (fig. 5 *b*).

Análogamente las relaciones $xy = xz + yz$, $yz = xy + xz$ representan los restantes arcos de hipérbola de la figura. Para calcular el valor del área rayada (área favorable) bastará calcular el área del segmento hiperbólico limitado por uno de estos arcos y el lado correspondiente del triángulo fundamental. Según [6] esta área vale

$$a_1 = \frac{1}{5} \int_0^{(2/\sqrt{3})\, k} (3\, k - \sqrt{9\, k^2 - 10 \sqrt{3}\, k\, \xi + 15\, \xi^2})\, d\xi =$$

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{5} - \frac{2}{5 \sqrt{15}} \log \frac{7 + 3 \sqrt{5}}{2} \right) k^2.$$

Tomando el triplo de esta área y restando del área total del triángulo fundamental, resulta que la medida de los casos favorables vale

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{3 \sqrt{3}}{5} + \frac{6}{5 \sqrt{15}} \log \frac{7 + 3 \sqrt{5}}{2} \right) k^2$$

y dividiendo por el área total del triángulo fundamental tendremos la probabilidad del problema del enunciado cuando los datos se eligen según el procedimiento II, a saber

$$p = (6 \sqrt{5}/25) \log \frac{1}{2} (7 + 3 \sqrt{5}) - (4/5) = 0{,}2329 \ldots$$

2. Problemas de probabilidad en la construcción de triángulos en que los datos son dos segmentos y un ángulo. — El ángulo lo supondremos dado siempre entre 0 y π, independientemente de los otros datos del problema. Para dar los segmentos tenemos como más naturales dos procedimientos análogos a los del caso anterior:

Procedimiento I. — Supongamos dos ejes cartesianos ortogonales x, y; a cada punto interior al cuadrado

$$0 \leq x \leq k \quad , \quad 0 \leq y \leq k \tag{7}$$

corresponden dos coordenadas que supondremos son los datos del problema. Para cada problema la medida de los casos favorables será la integral

$$m_f = \int d\alpha \, dx \, dy \tag{8}$$

extendida al conjunto de valores $0 \leq \alpha \leq \pi$; $0 \leq x \leq k$; $0 \leq y \leq k$ que hacen que la solución sea posible. La medida total de casos posibles será

$$m_t = \pi k^2. \tag{9}$$

El cociente m_f/m_t dará en cada caso la probabilidad.

Procedimiento II. — Se supone el ángulo α dado igual que antes entre 0 y π independientemente de los otros datos. En cambio para dar x, y se supone dado un segmento de longitud k y se elige un punto en su interior, tomando entonces como datos las dos partes en que el segmento queda dividido. Esto equivale a imponer a x, y la condición

$$x + y = k. \tag{10}$$

La medida de los casos favorables será en este caso una integral doble de la forma

$$m_f = \int d\alpha \, dx$$

puesto que y ya queda determinado por [10].

La medida total de los casos posibles es

$$m_t = \pi k \qquad [11]$$

El cociente m_f/m_t será la probabilidad en cada caso.

Consideremos, por ejemplo, los siguientes casos:

1) *Probabilidad de que se pueda construir un triángulo dados* a, b, A. — Las condiciones de posibilidad son

$$a \geq b \operatorname{sen} A \quad \text{para} \quad 0 \leq A \leq \frac{\pi}{2}$$

$$a \geq b \quad \text{para} \quad \frac{\pi}{2} \leq A \leq \pi.$$

Por tanto, tomando $a = x$, $b = y$, por el procedimiento I la medida de los casos favorables es

$$m_f = \int_0^{\pi/2} dA \int_0^k (k - y \operatorname{sen} A)\, dy + \int_{\pi/2}^{\pi} dA \int_0^k (k - y)\, dy = \left(\frac{3}{4}\pi - \frac{1}{2}\right) k^2$$

y por tanto la probabilidad buscada vale

$$p = 3/4 - \frac{1}{2\pi}\cdot$$

Por el procedimiento II, para $0 \leq A \leq \dfrac{\pi}{2}$ es $x \geq (k - x) \operatorname{sen} A$ o sea, $x \geq k \operatorname{sen} A/(1 + \operatorname{sen} A)$ y por tanto x varía entre k y $k \operatorname{sen} A/(1 + \operatorname{sen} A)$. Para $\pi/2 \leq A \leq \pi$ es $x \geq k - x$, o sea $x \geq k/2$. Luego la medida de los casos favorables es

$$m_f = \int_0^{\pi/2} \frac{k\, dA}{1 + \operatorname{sen} A} + \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{k}{2}\, dA = \left[-\frac{2k}{1 + \operatorname{tang}(A/2)}\right]_0^{\pi/2} + \frac{\pi k}{4} = k\left(\frac{\pi}{4} + 1\right),$$

y por tanto la probabilidad buscada vale

$$p = 1/4 + 1/\pi$$

2. *Probabilidad de poder construir un triángulo dados a, A, ϱ* (ϱ = radio del círculo inscripto). — Si O es el centro del círculo inscrito se observa que es $BOC = \pi/2 + A/2$ y por tanto la condición para que el triángulo se pueda construir es que una paralela a distancia ϱ del lado BC corte al arco capaz del ángulo $\pi/2 + A/2$ construido sobre el mismo. Esta condición equivale a

$$\rho \leq (a/2) \operatorname{tang} (\pi - A)/4. \qquad [12]$$

Luego, por el procedimiento I la medida de los casos favorables es

$$m_f = \int_0^{\pi} dA \int_0^{k} \frac{a}{2} \operatorname{tang} \frac{\pi - A}{4}\, da = \frac{k^2}{2} \log 2$$

y por tanto la probabilidad vale

$$p = \frac{\log 2}{2\pi} = 0{,}110\ldots$$

Por el procedimiento II, las relaciones [12] y [10] dan

$$k - a \leq \frac{a}{2} \operatorname{tang} \frac{\pi - A}{4}$$

y la medida de los casos favorables resulta

$$m_f = \int_0^{\pi} \left(k - \frac{k}{1 + \frac{1}{2} \operatorname{tang} \frac{\pi - A}{4}} \right) dA = 4k \int_0^{\pi/4} \frac{\operatorname{tang} \xi}{2 + \operatorname{tang} \xi}\, d\xi$$

$$= \frac{8}{5} k \left[\frac{1}{2} \xi - \log \cos \xi - \log (2 + \operatorname{tang} \xi) \right]_0^{\pi/4} =$$

$$\frac{8}{5} k \left(\frac{\pi}{8} + \frac{3}{2} \log 2 - \log 3 \right).$$

Luego la probabilidad en este caso vale

$$p = \frac{8}{5\pi} \left(\frac{\pi}{8} + \frac{3}{2} \log 2 - \log 3 \right) = 0{,}170\ldots$$

3) *Probabilidad de que se pueda construir un triángulo dados* A, b, h_a. — La condición de posibilidad es $h_a \leq b$. Por tanto,

según el procedimiento I la medida de los casos favorables vale

$$m_f = \int_0^\pi dA \int_0^k b\, db = \frac{1}{2}\pi k^2$$

y la probabilidad resulta $p = 1/2$

Por el procedimiento II, siendo $h_a + b = k$, debe ser $b \geq k/2$ y por lo tanto la medida de los casos favorables es $m_f = \frac{1}{2} k\pi$ y la probabilidad resulta $\frac{1}{2}$ igual que por el primer procedimiento.

4) *Probabilidad de poder construir un triángulo dados a, A, h_a,* — La condición para que la construcción sea posible es que una paralela a distancia h_a del lado a corte al arco capaz del ángulo A descrito sobre el mismo. Deberá por tanto cumplirse la condición

$$h_a \leq (a/2)\cot(A/2). \qquad [13]$$

Por el procedimiento I si a y h_a deben ser $\leq k$ y además debe cumplirse [13], la medida de los casos favorables será (poniendo $\alpha = \text{arc tg } 1/2$).

$$m_f = \int_0^{2\alpha}\left(k^2 - k^2 \operatorname{tg}\frac{A}{2}\right) dA + \int_\alpha^\pi \frac{k^2}{4}\cot\frac{A}{2}\, dA =$$

$$2\, k^2 \text{ arc tg}\frac{1}{2} + 2\, k^2 \log 2 - \frac{3}{4} k^2 \log 5,$$

y la probabilidad valdrá

$$p = (1/\pi)\left(2 \text{ arc tg}\frac{1}{2} + 2\log 2 - \frac{3}{4}\log 5\right) = 0{,}352\ldots$$

Por el procedimiento II la condición $a + h_a = k$ junto con la [13] da

$$a \geq k\left(1 + \frac{1}{2}\cot(A/2)\right)^{-1}$$

y por tanto la medida de los casos favorables es

$$m_f = \int_0^\pi \left(k - \frac{k}{1 + \frac{1}{2}\cot\frac{A}{2}}\right) dA = 2\,k\left(\frac{\pi}{10} + \frac{2}{5}\log 2\right)$$

y la probabilidad pedida vale

$$p = 1/5 + (4/5\,\pi)\log 2 = 0{,}3765\ldots$$

3. Problemas de probabilidad en la construcción de triángulos en que los datos son dos ángulos y un segmento. — Obsérvese que en este caso la magnitud del segmento no influye en el resultado, pues por una semejanza siempre podrá encontrarse un triángulo cuyo segmento correspondiente sea igual al dado. La posibilidad o no de poder construir el triángulo depende sólo de que los ángulos dados cumplan o no ciertas condiciones que se presentan en cada caso.

También cabe considerar dos procedimientos para dar los datos al azar:

Procedimiento I. — Los ángulos α, β se dan independientemente uno del otro entre 0 y π.

Procedimiento II. — Se da un ángulo α al azar entre 0 y π y por β se toma $\beta = \pi - \alpha$.

Veamos esta vez, y como ejemplo, un solo caso.

1) *Probabilidad de que se pueda construir un triángulo dados A, el ángulo β de w_a con a y un segmento caulquiera (un lado, una altura, una mediana).* — Dibujemos el ángulo A y tracemos su bisectriz. Por un punto cualquiera tracemos la recta que forma con ella el ángulo β. Para que se forme triángulo debe ser

$$A/2 \leq \beta \leq \pi - A/2. \qquad [14]$$

Por tanto, por el procedimiento I la medida de los casos favorables es

$$\int_0^{\pi} (\pi - A)\, dA = (1/2)\, \pi^2$$

y la probabilidad vale $p = 1/2$.

Por el procedimiento II, la relación [14] junto con la condición $A + \beta = \pi$ da $A \leq \frac{2}{3}\pi$. Por tanto la medida de los casos favorables es $(2\pi)/3$ y la probabilidad $p = 2/3$.

El lector podrá fácilmente proponerse otros ejercicios análogos sobre problemas de probabilidad que presenta la construcción de triángulos.

III. LA PROBABILIDAD EN GEOMETRIA PROYECTIVA

Como ejemplos de problemas pertenecientes a la geometría proyectiva en los cuales aparece de manera natural la noción de probabilidad, estudiaremos los siguientes.

1) *Se dan al azar dos pares de rayos $(a,a'),(b,b')$ por un punto fijo O. Se pide la probabilidad de que la involución que ellos determinan sea elíptica o hiperbólica.* — Los rayos los supondremos dados independientemente uno de otro y determinados por el ángulo φ_a, $\varphi_{a'}$, φ_b, $\varphi_{b'}$, variable entre 0 y 2π que forman con una dirección fija.

Se sabe que la involución es elíptica si los dos pares se separan. La medida de los casos en que esto sucede es

$$m_f = 2\int_0^{2\pi} d\varphi_a \int_{\varphi_a}^{2\pi+\varphi_a} d\varphi_{a'} \int_{\varphi_a}^{\varphi_{a'}} d\varphi_b \int_{\varphi_{a'}}^{2\pi+\varphi_a} d\varphi_{b'}$$

donde el 2 aparece por poderse permutar el papel de b y b'. Las integraciones son inmediatas y dan

$$m_f = (16/3)\,\pi^4.$$

Como la medida de los casos posibles es $(2\pi)^4 = 16\pi^4$, resulta que la probabilidad de que la involución sea elíptica vale 1/3. La de que sea hiperbólica será $1 - 1/3 = 2/3$.

2) *Sea dado un segmento PQ que suponemos abarca todo el espacio disponible, es decir no se puede prolongar por ninguno de sus extremos. Sea $PQ = 2b$. Con el mismo centro O de PQ y sobre la misma recta se da un segmento $AB = 2a$. Dado un punto X arbitrariamente dentro de AB se pide la probabilidad de que su conjugado armónico respecto A, B caiga dentro de PQ.*

Poniendo $OX = x$ y $OB = OA = a$, la abscisa del conjugado armónico de X es $y = OY = a^2/x$. Para que Y esté dentro de PQ debe ser por tanto $a^2/|x| \leq b$, o sea, $|x| \geq a^2/b$. Luego los casos favorables son aquellos en que $a \geq |x| \geq a^2/b$ cuya medida es $2(a - a^2/b)$. Como la medida de los casos totales es $2a$, resulta que la probabilidad buscada vale

$$p = 1 - a/b.$$

3) Es bien conocido el llamado teorema de Desargües (en realidad debido a Pappus, entre los años 250 y 300 de nuestra era) según el cual los pares de lados opuestos y las diagonales de un cuadrilátero completo determinan sobre cualquier transversal tres pares de puntos que están en involución. Consideremos el problema: *Sea A B C D un cuadrilátero convexo y supongamos que se corta por una recta al azar. Se pide la probabilidad de que la involución que resulta según el teorema de Desargües sea elíptica o hiperbólica.*

Solución. — Pongamos $a = AB$, $a' = CD$, $b = BC$, $b' = DA$, $c = BD$, $c' = AC$. Recordemos que la medida de las rectas que cortan a una figura convexa es igual a la longitud de la misma. Esto permite calcular la medida de las rectas que cortan a dos lados de un triángulo sin cortar al tercero, considerando este último como una figura convexa aplastada de longitud igual al doble de la del segmento. Por ejemplo, en el triángulo ABC la medida de las rectas que cortan a a y b pero no a c' será $(a+b+c') - 2c' = a+b-c'$. Para que la involución sea elíptica, la recta debe cortar a a y b sin cortar a c'; o a a y b' sin cortar a c; o a b' y a' sin cortar a c'; o a a' y b sin cortar a c (en cuyos casos los pares de puntos homólogos se separan). Por tanto la medida de los casos favorables es

$$m_f = (a+b-c') + (a+b'-c) + (a'+b'-c') + (a'+b-c)$$
$$= 2(a+a'+b+b'-c-c')$$

y por tanto la probabilidad de que la involución del enunciado sea elíptica vale

$$p = 2(1-(c+c')/(a+a'+b+b')).$$

La probabilidad de que sea hiperbólica será $1-p$.

Por ejemplo, si el cuadrilátero es un cuadrado de lado a, siendo $c = c' = \sqrt{2}\,a$, la probabilidad de que la involución que sobre una recta dada al azar que lo corta determinan los lados opuestos y las diagonales sea elíptica vale $p = 2-\sqrt{2}$ y la de que sea hiperbólica $p = \sqrt{2}-1$.

IV. LA PROBABILIDAD EN LAS CONSTRUCCIONES DE GEOMETRIA DESCRIPTIVA

En la Geometría Descriptiva las cuestiones de probabilidad que estamos considerando tienen amplia aplicación. Lo vamos a ver con algunos ejemplos Debemos, sin embargo, antes de todo puntualizar bien qué entenderemos por « dar al azar » un elemento geométrico de los que aparecerán. Los criterios que vamos a adoptar, que parecen los más naturales, serán:

a) Si se trata de una recta g, siguiendo el criterio que se adopta en probabilidades geométricas, la supondremos determinada por su distancia h a un punto fijo y por el ángulo φ que la normal a la misma forma con una dirección fija del plano. Para medir un conjunto de rectas se tomará entonces la integral de la expresión diferencial $dg = dh\, d\varphi$. Es con esta medida que, como ya recordamos en el número anterior, la medida de las rectas que cortan a una figura convexa resulta igual a la longitud de la misma.

b) Una *recta por un punto fijo* estará determinada por el ángulo φ que forma con una dirección fija, y por medida de un conjunto de tales rectas se tomará el ángulo total que ellas llenan, o sea la integral de $d\varphi$.

c) Una *recta paralela a una dirección dada* estará determinada por su distancia x a un punto fijo y como medida de un conjunto de tales rectas tomaremos la integral de dx extendida al mismo.

d) Un punto P lo supondremos determinado por sus coordenadas x, y respecto a un sistema de coordenadas cartesianas ortogonales de su plano, y como medida de un conjunto de puntos se tomará el área llenada por los mismos, o sea la integral de $dP = dx\, dy$.

e) Un *punto sobre una recta*, o en general sobre una curva rectificable, estará determinado por su abscisa curvilínea s sobre la curva, y como medida de un conjunto de tales puntos tomaremos la longitud del arco que ellos llenan.

Con estos criterios podemos ya pasar al estudio de algunos problemas concretos. Observemos, sin embargo, una vez más que cambiando el criterio según el cual se suponen dados los elementos al azar, las probabilidades resultantes podrían ser distintas.

1) *Sea dada en proyección Monge una superficie de revolución de eje vertical y altura limitada. Dadas al azar las dos proyecciones*

de una recta paralela al plano horizontal de manera que ellas corten a las proyecciones del mismo nombre de la superficie, se pide la probabilidad de que la recta corte efectivamente a la superficie.

Solución. — Sea F el área de la proyección vertical de la superficie, o sea el área de la sección meridiana, a la altura de la misma y R el radio de la proyección horizontal (paralelo máximo).

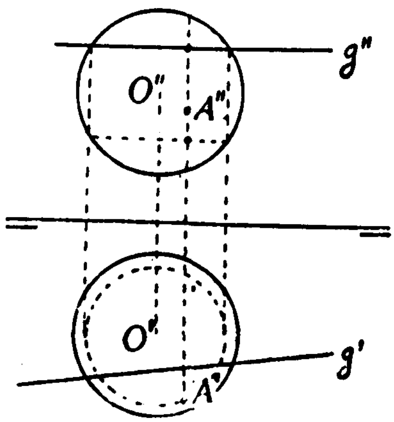

FIG. 6.

Sea x la distancia de la proyección vertical g'' de la recta dada al azar a la línea de tierra y sea r el radio del paralelo correspondiente. Fijado x, para que la recta corte efectivamente a la superficie la proyección horizontal g' debe cortar a la proyección del paralelo de radio r y por lo tanto la integral de dg' vale $2\pi r$. La medida de los casos favorables es por tanto

$$m_f = \int dx\, dg' = 2\pi \int r\, dx = \pi F.$$

La medida de todos los casos posibles es $2\pi R a$ y por tanto la probabilidad buscada vale

$$p = \frac{F}{2Ra}.$$

Podemos ver varios casos particulares de este caso general:

a) Si la superficie es una *esfera*, como en el caso de la fig. 6, es $F = \pi R^2$, $a = 2R$ y por tanto $p = \pi/4$.

b) Si la superficie es un *toro* de eje vertical cuyo paralelo máximo tenga radio R y la circunferencia meridiana radio $a/2$, será $p = 1 - (4 - \pi)a/8R$.

Observación. — Nótese que el problema considerado (y la misma observación vale para los siguientes) no es equivalente al de considerar dada al azar « una recta del espacio » en el sentido de las probabilidades geométricas del espacio de tres dimensiones, cuyas proyecciones corten a las de la superficie de revolución dada, y pedir la probabilidad de que la recta corte efectivamente a la superficie. En nuestro problema suponemos dadas al azar, independientemente una de otra, las dos proyecciones de la recta, lo cual no es lo mismo que dar al azar la recta correspondiente del espacio. Sería interesante el estudio de las relaciones entre las densidades de las rectas del espacio y las densidades de sus proyecciones en el sistema Monge o en otros sistemas de proyección.

2) *Se dan las dos proyecciones de una esfera de radio R en proyección Monge. Dadas al azar las dos proyecciones A', A'' de un punto A de manera tal que cada una sea interior a la proyección homónima de la esfera, se pide la probabilidad de que el punto sea interior a la esfera.*

Solución. — La proyección horizontal A' (de coordenadas ξ, η), se puede dar al azar en el interior del círculo de radio R, proyección horizontal de la esfera. En cambio A'' como debe estar en la perpendicular a la línea de tierra por A' sólo se puede dar al azar su ordenada y. Deberemos por tanto calcular la integral de la expresión $d\xi\, d\eta\, dy$ extendida primero a todos los casos favorables y después a todos los posibles. Tomemos como ejes coordenados en el plano horizontal un sistema de origen O' (proyección del centro de la esfera), cuyo eje ξ sea paralelo a la línea de tierra y el eje η normal a la misma. Fijado $A'(\xi, \eta)$ (fig. 6), la normal a la línea de tierra por este punto corta a la proyección vertical de la esfera según una cuerda de longitud $2\sqrt{R^2 - \xi^2}$; ésta es la integral del dy. Por otra parte, manteniendo todavía fijo ξ, la ordenada η puede variar en la cuerda análoga de la proyección horizontal y por tanto la medida total de los casos posibles es

$$m_t = 4\int_{-R}^{+R} (R^2 - \xi^2)\, d\xi = \frac{16}{3} R^3.$$

En cambio los casos favorables en que A es realmente interior a la esfera, corresponden a los casos en que y varía únicamente en la cuerda cuya distancia a la vertical de los centros es $\varrho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$. Expresando el elemento de área $d\xi d\eta$ en coordenadas polares (ϱ, θ), la medida de los casos favorables será

$$m_f = 8 \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^R \sqrt{R^2 - \varrho^2}\, \varrho\, d\varrho = \frac{4}{3} \pi R^3$$

La probabilidad buscada vale por tanto $p = \pi/4$.

Una generalización del anterior es el siguiente problema:

Sea dada una esfera E de radio R en proyección Monge. Se da al azar otra esfera E_1 de radio r cuyas proyecciones cortan a las proyecciones homónimas de E. Se pide la probabilidad de que E y E_1 se corten realmente.

El problema es el mismo anterior, pues dar E_1 equivale a dar un punto al azar cuyas proyecciones caigan dentro de las proyecciones de una esfera de radio $R + r$ concéntrica con E, pidiéndose la probabilidad de que este punto resulte realmente interior a la esfera. La probabilidad es, pues, la misma anterior, $p = \pi/4$, independientemente del radio de las esferas.

3) *En sistema Monge se da una figura convexa plana K situada en un plano horizontal; sean K', K'' sus proyecciones, esta última reducida a un segmento. Dadas al azar las proyecciones g', g'' de un recta, de manera que corten a las proyecciones homónimas de K, se pide la probabilidad de que la recta corte efectivamente a la figura K.*

Solución. — Sean dg', dg'' las densidades para medir conjuntos de rectas del plano horizontal y vertical, respectivamente. Llamando x a la abscisa del punto en que g'' corta a K'' (o sea, a la distancia AX de la fig. 7) y θ el ángulo de g'' con AX, se sabe que es $dg'' = \operatorname{sen} \theta\, d\theta\, dx$. Trazando por X la perpendicular a la línea de tierra, sea $PQ = \sigma$ el segmento que ella determina en K'; para que g corte a K, g' debe cortar a PQ. Como la medida del conjunto de rectas que cortan a una figura convexa de su plano es igual a la longitud de la misma, considerando el segmento PQ como una figura convexa aplastada, su longitud es 2σ y por tanto la medida de los casos favorables es

$$\int_0^\pi \operatorname{sen}\theta\, d\theta \int 2\,\sigma\, dx = 4\,F$$

siendo F el área de K. La medida total de casos es el producto de la medida de lar rectas g'' que cortan al segmento K'' (cuya longi-

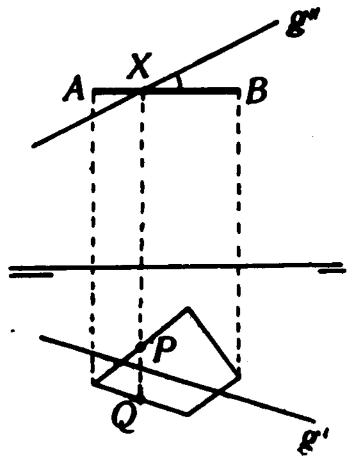

FIG. 7.

tud llamaremos D) y que vale $2D$, por la medida de las rectas que cortan a K' que vale L, si L es la longitud de K'. Por tanto la probabilidad buscada vale

$$p = \frac{2\,F}{DL}.$$

Por ejemplo, si K es un círculo queda $p = 1/2$. Si es un cuadrado también $p = 1/2$.

4) ***Sean dados en el sistema de planos acotados un cono circular recto de altura h y un punto exterior A distante l del centro del círculo base. Se da también un segmento de longitud u. Se traza por A una recta arbitraria que corta a la circunferencia base del cono y se conviene en que esta recta se graduará a partir de A hacia la base del cono con la unidad u, siendo A la traza (punto de cota cero). Se pide la probabilidad de que la recta así graduada corte al cono dado.***

Solución. — Sea O la proyección del vértice del cono. Sean AB y AC las tangentes al círculo de la base desde A y llamemos α al ángulo OAB = ang. OAC. Para fijar la recta arbitraria trazada por A podemos dar el ángulo φ que forma con AO. Se trata de ver la razón entre el ángulo que abarcan las rectas que cortan al cono y el ángulo total 2α.

Sea AE una recta cualquiera por A que forma con AO un ángulo $\varphi < \alpha$. Una construcción usual para hallar la intersección de esta recta con el cono consiste en trazar por O una parelala a esta recta y graduarla en el mismo sentido y con la misma unidad que AE.

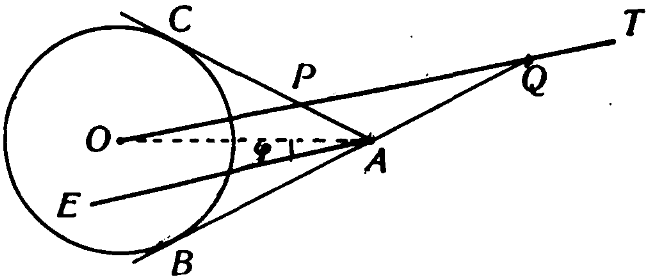

Fig. 8.

Su traza será el punto T tal que $OT = hu$. Según que la recta TA corte del mismo lado de AO que la recta AE a la circunferencia base del cono o no, la recta dada AE cortará o no al cono. Los casos favorables corresponden por tanto a aquellos en que T cae en la prolongación de OQ (fig. 8), siendo Q el punto en que AB corta a OT. Es inmediato calcular que esto ocurre para los ángulos φ que cumplen la desigualdad

$$\frac{l \operatorname{tang} \alpha}{hu} < (\operatorname{tang} \alpha - \operatorname{tang} \varphi) \cos^2 \varphi. \qquad [15]$$

Observando que el segundo miembro de esta desigualdad es decreciente al crecer φ, resulta que los casos favorables corresponderán al ángulo φ_0 raíz de la ecuación trascendente

$$\frac{l \operatorname{tang} \alpha}{hu} - (\operatorname{tang} \alpha - \operatorname{tang} \varphi) \cos^2 \varphi = 0.$$

Poniendo $\operatorname{tang}\varphi = \xi$ se encuentra inmediatamente

$$\varphi_0 = \operatorname{arc\,tang} \frac{hu}{2\,l \operatorname{tang}\alpha}\left[\sqrt{1-\frac{4\,l}{hu}\left(\frac{l}{hu}-1\right)\operatorname{tg}^2\alpha}-1\right]$$

y la probabilidad buscada será $p = \varphi_0/\alpha$.

Como casos límites se pueden considerar: *a*) Si $h \rightarrow \infty$ caso en que el cono pasa a ser un cilindro, resulta $p = 1$, como debe ser. *b*) También para $u \rightarrow \infty$ resulta $p = 1$, como es natural, pues al crecer u disminuye la pendiente de la recta y la probabilidad de cortar al cono tiene que tender a la certeza.

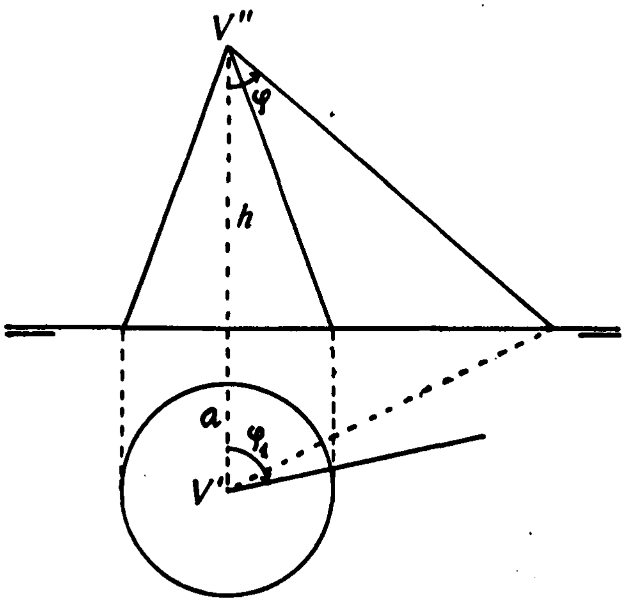

FIG. 9.

5) *En el sistema Monge se da un cono recto de revolución cuya base contenida en el plano horizontal no corta a la línea de tierra* (*fig.* 9). *Sea h la altura del cono y a la distancia del centro de la base a la línea de tierra. Dada una dirección al azar, se pide la probabilidad de que la sombra del cono no corte a la línea de tierra.*

Solución. — Para dar la dirección al azar hay que dar sus dos proyecciones, o sea, un rayo por cada una de las proyecciones V' y V'' del vértice. El rayo por V'' lo supondremos determinado por el ángulo φ que forma con la perpendicular a la línea de tierra y el rayo por V' por el ángulo φ_1 que forma con la vertical tomada también hacia la línea de tierra (fig. 9). Por simetría basta considerar el caso en que la sombra cae a la derecha de la figura y por tanto los límites de variabilidad de φ y φ_1 son

$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \quad , \quad 0 \leq \varphi_1 \leq \pi .$$

Es decir, la medida total de los casos posibles es

$$m_p = \int d\varphi \, d\varphi_1 = \frac{1}{2}\pi^2. \qquad [16]$$

Para hallar la medida de los casos favorables, observemos que dado φ para que la sombra no corte a la línea de tierra debe ser (como se deduce del método usual para dibujar la sombra del cono)

$$\pi > \varphi_1 > \operatorname{arc\,tg} \frac{h \operatorname{tg} \varphi}{a}$$

y por tanto la medida de los casos favorables es

$$m_f = \int_0^{\pi/2} \left(\pi - \operatorname{arc} tg \frac{h \, tg \, \varphi}{a} \right) d\varphi. \qquad [17]$$

Se trata por tanto de calcular la integral

$$I = \int_0^{\pi/2} \operatorname{arc} tg \frac{h \, tg \, \varphi}{a} \, d\varphi.$$

que haciendo h tang $\varphi = a$ tang α queda

$$I = ah \int_0^{\pi/2} \frac{\alpha \, d\alpha}{(h^2 \cos^2 \alpha + a^2 \operatorname{sen}^2 \alpha)} . \qquad [18]$$

Distinguiremos tres casos, según sea $h = a$, $h > a$, $h < a$.

Caso $h = a$. — Este caso es inmediato, pues

$$I = \int_0^{\pi/2} \alpha \, d\alpha = \frac{\pi^2}{8}$$

y sustituyendo en [17] resulta $m_f = (3/8)\pi^2$ y por tanto la probabilidad buscada resulta ser

$$P_{h=a} = \frac{3}{4} \cdot \qquad [19]$$

Caso $h > a$. — A partir de [18] la integral I se puede escribir

$$I = \frac{2\,ah}{h^2 - a^2} \int_0^{\pi/2} \frac{\alpha\, d\alpha}{q + \cos 2\,\alpha} = \frac{2\,ah}{h^2 - a^2} \int_0^{\pi} \frac{x\, dx}{q + \cos x}$$

habiendo puesto

$$q = \frac{h^2 + a^2}{h^2 - a^2} \cdot \qquad [20]$$

La última integral es conocida (ver por ejemplo las tablas de integrales definidas de BIERENS DE HAAN, pág. 334), dando después de sustituir q por su valor,

$$I = \frac{\pi^2}{8} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \left(\frac{h-a}{h+a}\right)^{2n+1}$$

De aquí resulta inmediatamente la medida [17] de los casos favorables y dividiendo por [16] se tiene la probabilidad buscada

$$P_{h>a} = \frac{3}{4} - \frac{2}{\pi^2} \sum_{0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \left(\frac{h-a}{h+a}\right)^{2n+1} . \qquad [21]$$

Caso $h < a$. — Análogamente el caso anterior resulta ahora

$$I = \frac{ah}{2\,(a^2 - h^2)} \int_0^{\pi} \frac{x\, dx}{q - \cos x}$$

o bien, observando que es

$$\int_0^{\pi} \frac{x\, dx}{q - \cos x} = \pi \int_0^{\pi} \frac{d\xi}{q + \cos \xi} - \int_0^{\pi} \frac{\xi\, d\xi}{q + \cos \xi} = \frac{\pi^2 (a^2 - h^2)}{2\,ah} - \int_0^{\pi} \frac{\xi\, d\xi}{q + \cos \xi} ,$$

basta conocer la integral última que es la misma ya encontrada antes. Sustituyendo su valor se tiene I, con lo cual [17] y [16] dan inmediatamente que la probabilidad buscada vale en este caso

$$\Gamma_{h<a} = \frac{3}{4} + \frac{2}{\pi^2} \sum_0^\infty \frac{1}{(2n+1)^2} \left(\frac{a-h}{a+h}\right)^{2n+1}. \qquad [22]$$

Casos límites. — *a*) Para $h \to \infty$ el cono pasa a ser un cilindro y entonces la probabilidad debe valer $\frac{1}{2}$, puesto que la sombra cortará o no según que sea $\varphi_1 < \frac{\pi}{2}$ o $\varphi_1 > \frac{\pi}{2}$. Según esto, [21] nos da

$$\sum_0^\infty \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \qquad [23]$$

resultado bien conocido.

b) Para $h \to 0$ debe ser $p = 1$ y en efecto así resulta de [22] teniendo en cuenta [23]. Obsérvese que este resultado o el de *a*) tomados en sentido inverso pueden servir como demostración del resultado [23] por medio de las probabilidades geométricas.

c) Para $a \to \infty$ — caso del cono infinitamente alejado de la línea de tierra —debe ser $p = 1$, y efectivamente así resulta de [22] teniendo en cuenta [23].