CURVAS ALGEBRAICAS Y CURVAS ANALITICAS *)

1.- INTRODUCCION. Sean

$$x_0 = x_0(t) \quad , \quad x_1 = x_1(t) \quad , \quad x_2 = x_2(t) \qquad (1.1)$$

tres funciones de la variable compleja t

Considerando las $x_i(t)$ $(i = 0,1,2)$ como coordenadas homogéneas de los puntos del plano complejo, las ecuaciones (1.1) definirán una "curva" en el mismo. Si las funciones $x_i(t)$ son funciones meromorfas de t, H. y J. WEYL dicen que la curva es una <u>curva meromorfa</u>**). En general, si son funciones analíticas, la curva se dice que es una <u>curva analítica</u>. En ambos casos, por tratarse de coordenadas homogéneas, hay que convenir en que las curvas $y_i = q(t)\, x_i(t)$ son siempre una misma, cualquiera que sea el factor $q(t) \neq 0$

Toda curva analítica está definida sobre cierta superficie de Riemann R. Las ecuaciones (1.1) definen entonces una correspondencia biunívoca entre los puntos de R y los de la curva. Cuando la superficie de Riemann R es compacta, la curva es algebraica. Si t varía unicamente en una región de R, tendremos una "parte" o pedazo de curva analítica.

Representaremos siempre por $\bar{a}$ al complejo conjugado de a Aprovechando que las coordenadas x_i son homogéneas, se pue

---

*) Trabajo expuesto y discutido en el Seminario Matemático en 1951

**) H. y J. WEYL, <u>Meromorphic curves</u>, Ann. of Math. vol. 39, 1938. También H. WEYL, <u>Meromorphic functions and analytic curves</u>, Annals of Mathematics Studies, n°12, Princeton 1943.

den siempre suponer normalizadas de manera tal que sea

$$(x\bar{x}) = x_0\bar{x}_0 + x_1\bar{x}_1 + x_2\bar{x}_2 = 1 \tag{1.2}$$

con lo cual las x_i quedan determinadas salvo un factor unimodular $e^{i\varphi}$

Supuestas las coordenadas normalizadas de esta manera, E.CARTAN ha demostrado*) que poniendo

$$dG = [dx_0\, d\bar{x}_0] + [dx_1\, d\bar{x}_1] + [dx_2\, d\bar{x}_2] \tag{1.3}$$

el valor absoluto de la integral doble

$$G = \frac{1}{2\pi i}\int dG \tag{1.4}$$

extendida sobre una curva algebraica cualquiera, coincide con el grado de la misma. En (1.3) los paréntesis cuadrados indican que el producto de los diferenciales es un producto exterior**)

Puesto que la integral (1.4) tiene sentido para cualquier curva analítica, no necesariamente algebraica, ella permite definir el "grado" de una curva analítica. Además, limitando el campo de integración, ella permite también definir el "grado" de una parte de curva analítica o algebraica. Aunque introducido de otra manera este grado coincide con el utilizado por H. y J.WEYL y por L.V.AHLFORS en su teoría de

---

*) E.CARTAN, Sur les invariants integraux des certain espaces homogénes clos et les proprietés topologiques de ces espaces, Ann. de la Soc. Polonaise de Math. vol.8, 1929.

**) Sobre el producto exterior de formas diferenciales ver, por ej. E. CARTAN, Les systemes differentiels exterieurs et leurs applications géométriques, Hermann, Paris 1945.

curvas meromorfas (lugar citado en (**). Estos autores utilizan esta definición de grado para generalizar, en cierta manera, a las curvas meromorfas y analíticas las fórmulas de Plücker de las curvas algebraicas.

Nuestro objeto en esta nota es generalizar a curvas analíticas o a partes de curvas algebraicas el clásico teorema de Bezout. El teorema a que llegamos es el siguiente:

Sean y dos curvas analíticas (o dos partes de curvas algebraicas) de grados G_1 y G_2 respectivamente. Considerando C_1 fija y C_2 de posición variable (en el sentido que se especificará) el valor medio del número de puntos comunes a C_1 y C_2 para todas las posiciones de C_2 es siempre igual al producto de los grados G_1 y G_2.

Para la demostración necesitamos transformar la expresión (1.3) en otras equivalentes y además unas nociones sobre el grupo unitario que vamos a dar a continuación.

2.- DIVERSAS EXPRESIONES DEL "GRADO" DE UNA CURVA ANALITICA

Hemos definido el "grado" de la curva (1.1) por la integral (1.4) cuando las ecuaciones paramétricas satisfacen a la condición de normalización (1.2).

En general si esta condición no se cumple bastará poner

$$X_i = \frac{x_i}{\sqrt{(x\bar{x})}} \qquad (2.1)$$

y entonces el grado será el cociente por $2\pi i$ de la expresión

$$dG = [dX_0 d\bar{X}_0] + [dX_1 d\bar{X}_1] + [dX_2 d\bar{X}_2]$$

Un simple cálculo a partir de (2.1) permite escribir esta expresión en la forma

$$dG = \frac{|x \wedge x'|^2}{|x|^4}\left[dt\, d\bar{t}\right] \qquad (2.2)$$

donde $x \wedge x'$ indica el vector de componentes

$$x_1 x'_2 - x_2 x'_1 \;,\; x_2 x'_0 - x_0 x'_2 \;,\; x_0 x'_1 - x_1 x'_0$$

y los acentos indican derivadas respecto del parámetro t
Las barras verticales indican módulo, por ejemplo,

$$|x|^2 = (x\bar{x})$$

Otra fórmula, a veces útil, para dG es la siguiente. Sea x de coordenadas (x_0, x_1, x_2), un punto de la curva. Sobre la tangente en x tomemos un punto c tal que

$$(c\bar{c}) = 1 \qquad (\bar{c}x) = 0 \qquad (2.3)$$

Por estar dx sobre la tangente será

$$dx_i = \alpha x_i + \beta . c_i \qquad d\bar{x}_i = \bar{\alpha}\bar{x}_i + \bar{\beta}.\bar{c}_i \qquad (2.4)$$

donde, según (1.2) y (2.3) α y β son formas de Pfaff definidas por

$$\alpha = (\bar{x} dx) \qquad \beta = (\bar{c} dx)$$

De (2.4), por multiplicación exterior se deduce

$$dG = \sum_0^2 \left[dx_i\, d\bar{x}_i\right] = \left[\alpha\bar{\alpha}\right] + \left[\beta\bar{\beta}\right]$$

Siendo $\alpha = -\bar{\alpha}$ y por tanto $\left[\alpha\bar{\alpha}\right] = 0$, queda finalmente

$$dG = \left[(\bar{c} dx)(c d\bar{x})\right] \qquad (2.5)$$

que es la nueva forma buscada para dG

3.- EL GRUPO UNITARIO: SU ELEMENTO DE VOLUMEN. Recordemos que se llaman transformaciones unitarias del plano complejo x_0, x_1, x_2 en si mismo, a las definidas por ecuaciones lineales y homogéneas

$$x'_i = \sum_{k=0}^{2} a_i^k x_k \qquad (i = 0\ 1\ 2) \qquad (3.1)$$

tales que dejen invariante la forma ($x\bar{x}$) definidas en (1.2).

Esto quiere decir que los coeficientes a_i^k satisfacen a las relaciones

$$(a^k \bar{a}^h) = \sum_{i=0}^{2} a_i^k \bar{a}_i^h = \delta_{kh} \qquad (3.2)$$

siendo $\delta_{kh} = 0$ si $k \neq h$ y $\delta_{kh} = 1$

Todas las transformaciones unitarias forman el grupo unitario U

Es inmediato comprobar que el grado G definido por (1.4) es invariante respecto las transformaciones del grupo U propiedad muy útil para evaluar el grado de ciertas curvas, pues permite colocarlas en posición adecuada para que el cálculo de G resulte practicable. Por ejemplo, para una recta, bastará tomarla en una posición particular, por ejemplo, coincidente con el eje $x_1 = 0$. Sus ecuaciones paramétricas serán entonces

$$x_0 = 1 \quad , \quad x_1 = 0 \quad , \quad x_2 = t$$

y por tanto, según (2.2), el grado de la parte tal que $a \leq |t| = \rho \leq b$, vale

$$G = \frac{1}{2\pi i}\int_a^b \int_0^{2\pi} \frac{2i\rho\, d\rho\, d\theta}{(1+\rho^2)^2} = \frac{b^2 - a^2}{(1+a^2)(1+b^2)}$$

Para $a=0$, $b=\infty$ se tiene toda la recta y resulta $G=1$ como debe ser.

Sea u una transformación del grupo U. Ella queda definida por la matriz (a_i^k) de los coeficientes de (3.1); de manera que podemos poner $u \equiv (a_i^k)$. Para medir un conjunto de transformaciones hay que definir una <u>medida invariante</u> en U Esta medida se define facilmente siguiendo un método general que sirve para cualquier grupo lineal y homogéneo. Basta observar, en efecto, que la matriz $u^{-1} du$ es invariante por cualquier operación u_0 de U En efecto

$$(u_0 u)^{-1} d(u_0 u) = u^{-1} u_0^{-1} u_0 du = u^{-1} du$$

En el caso actual, dadas las relaciones (3.2), la matriz u^{-1} es la transpuesta de la conjugada $\bar{u}$ (cuyos elementos son los conjugados de los de u) y por tanto la matriz $u^{-1}du$ es la (ω_i^k) con los elementos

$$\omega_i^k = \sum_{h=0}^{2} \bar{a}_h^i \, da_h^k = (\bar{a}^i da^k) \qquad (3.3)$$

Tenemos así 9 formas diferenciales ω_i^k invariantes respecto las operaciones de U (son las <u>componentes relativas</u> del grupo según la nomenclatura de E.CARTAN). Como U depende de 9 parámetros reales, tenemos así que salvo un factor constante, el elemento de volumen invariante del grupo U será el producto exterior de las formas ω_i^k, o sea,

$$d\tau_u = \left[\prod \omega_i^k\right]; (i,k = 0\ 1\ 2) \qquad (3.4)$$

con las ω_i^k dadas por (3.3).

4.- EL TEOREMA DE BEZOUT PARA CURVAS ANALITICAS. Sea C_1 una curva analítica fija y C_2 otra móvil que vamos a transformar por las operaciones de U . Representaremos por μC_2 a la transformada de C_2 por la operación μ de U Observemos que consideramos el grupo unitario U completo (no el grupo unitario "especial") y por tanto hay infinitas transformaciones μ (todas las de la forma $\rho\mu = (\rho a_i^k)$ siendo $\rho(t)$ una función arbitraria) que dan la misma μC_2, puesto que las coordenadas a_i son homogéneas. Sin embargo esto no importa para nuestras consideraciones.

Llamando $N(C_1 \cap \mu C_2)$ al número de puntos comunes a C_1 y μC_2, variable con μ, nuestro objeto es calcular el valor medio de N al considerar todas las transformaciones μ, valor medio que calcularemos con la densidad (3.4). Debemos, pués, calcular la integral

$$\int_{\mu} N\,(C_1 \cap \mu C_2)\, d\tau_{\mu} \tag{4.1}$$

extendida al grupo U .

Observemos que en (3.3) los a^i pueden considerarse como puntos analíticos de coordenadas no-homogéneas (a_0^i, a_1^i, a_2^i) Se llaman puntos analíticos porque, al considerar coordenadas homogéneas, a cada uno corresponde un solo punto geométrico (de coordenadas homogéneas a_0^i , a_1^i , a_2^i) pero a cada punto geométrico corresponden infinitos puntos analíticos (los que tienen las coordenadas proporcionales a las de este último).

Por comodidad de notación, llamemos ahora X , Y , Z a los tres puntos analíticos a^0 , a^1 , a^2 . Las condiciones (3.3) se escribirán

$$(X\bar{X}) = (Y\bar{Y}) = (Z\bar{Z}) = 1 \qquad (X\bar{Y}) = (X\bar{Z}) = (Y\bar{Z}) = 0 \tag{4.2}$$

y la densidad (3.4) tomará la forma desarrollada

$$d\tau_{\mu} = \Big[(\bar{X}\,dX)\,(\bar{Y}\,dX)\,(\bar{Z}\,dX)\,(\bar{X}\,dY)\,(\bar{Y}\,dY) \\ (\bar{Z}\,dY)\,(\bar{X}\,dZ)\,(\bar{Y}\,dZ)(\bar{Z}\,dZ)\Big] \tag{4.3}$$

La transformación μ, definida por los puntos analíticos X, Y, Z puede considerarse como la transformación de U que lleva los puntos analíticos $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$ sobre X, Y, Z respectivamente.

Puesto que solo nos interesan las μ tales que μC_2 tiene punto común con C_1, podemos elegir siempre por X un punto de la intersección de C_1 y μC_2. Tomemos entonces Y sobre la tangente a μC_2 en X y Z queda ya definido por las relaciones (4.2).

Sea S el punto en que la recta YZ corta a la tangente a C_1 en X. Se cumplirá entonces también

$$(S\bar{S}) = 1 \qquad (S\bar{X}) = 0 \qquad (\bar{S}X) = 0 \tag{4.4}$$

De acuerdo con la expresión (2.5), puesto que $(Y d\bar{X}) + (\bar{X} dY) = 0$ por ser $(\bar{X}Y) = 0$ y solo interesa el valor absoluto, es

$$dG_2 = \left[(\bar{Y} dX)(\bar{X} dY)\right]$$

donde dG_2 indica la expresión (1.3) referida a C_2.

Además, puesto que siempre vamos a tomar X sobre la curva C_1, es

$$dX = \alpha X + \beta S$$

donde $\alpha = (\bar{X} dX)$, $\beta = (\bar{S} dX)$ De aquí

$$(\bar{Z} dX) = \beta(\bar{Z}S) \qquad , \qquad (Z d\bar{X}) = \bar{\beta}(\bar{S}Z)$$

y por tanto

$$\left[(\bar{Z} dX)(Z d\bar{X})\right] = (\bar{Z}S)(\bar{S}Z)\left[(\bar{S} dX)(S d\bar{X})\right]$$

$$= (\bar{Z}S)(\bar{S}Z)\, dG_1$$

Donde dG_1 indica la expresión (1.3) referida a la curva C_1

Para calcular la integral (4.1) extendida a todo el grupo U observemos en primer lugar que poniendo $X_h = \rho_h e^{i\varphi_h}$ es

$$(\bar{X} dX) = \sum_{h=0}^{2} (\rho_h d\rho_h + i \rho_h^2 d\varphi_h)$$

y como $(\bar{X}X) = \sum \rho_h^2 = 1$ se tiene $\sum \rho_h d\rho_h = 0$ y por tanto extendiendo la integración a todos los valores posibles de las variables o sea $0 \leq \rho_h \leq \infty$, $0 \leq \varphi_h \leq 2\pi$ se tiene

$$\int (\bar{X} dX) = 2\pi i \qquad (4.5)$$

Analogamente

$$\int (\bar{Y} dY) = \int (\bar{Z} dZ) = 2\pi i \qquad (4.6)$$

Para tener la integral de los demás factores que figuran en (4.3) falta hallar la integral

$$I = \int (\bar{Z} S)(\bar{S} Z)(\bar{Y} dZ)(\bar{Z} dY)$$

Para ello, como X, Y, S están en línea recta, tomemos ésta como eje $x_1 = 0$ y S coincidente con el origen $(0, 0, 1)$ Según (2.5) y (2.2), poniendo $Z(t, 0, 1)$, $t = \rho e^{i\varphi}$, es

$$[(\bar{Y} dZ)(\bar{Z} dY)] = \frac{[dt\, d\bar{t}]}{(1+\rho^2)^2} = \frac{2i\rho\, d\rho\, d\varphi}{(1+\rho^2)^2}$$

Para calcular $(\bar{Z} S)(\bar{S} Z)$ debemos normalizar Z de manera que sea $(Z\bar{Z}) = 1$ Basta poner

Queda entonces $Z(t/\sqrt{1+\rho^2}, 0, 1/\sqrt{1+\rho^2})$

$$(\bar{Z}S)(\bar{S}Z) = \frac{1}{1+\rho^2}$$

y por tanto

$$I = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{2i\rho\, d\rho\, d\varphi}{(1+\rho^2)^3} = \pi i \tag{4.7}$$

Al recopilar los resultados (4.5), (4.6), y (4.7) tendremos la integral de $d\,\tau_\mu$ extendida a todas las posiciones en que μG_2 tiene punto común con C_1, pero contando cada posición tantas veces como número de puntos comunes tienen las dos curvas. Llamando $N(C_1 \cap \mu C_2)$ a este número, resulta

$$\int N\, d\,\tau_\mu = 32\,\pi^6\, G_1 G_2 \tag{4.8}$$

Por otra parte, es sabido que el volumen total del grupo unitario U, medido con la densidad (4.3), vale $32\pi^6$ siempre se entiende en valor absoluto, como resulta al hacer $n=2$ en la formula general para el grupo n-dimensional

$$\text{Vol. grupo unitario} \quad = \prod_{h=1}^{n+1} \frac{(2\pi i)^h}{(h-1)!}$$

Por tanto queda que el <u>valor medio</u> del número N vale

$$\bar{N} = G_1 G_2$$

Esto es lo que queríamos demostrar.

5.- OBSERVACION. El presente trabajo fué expuesto en el Seminario de Matemáticas de la Facultad de Ciencias Fisicomatemáticas de la Universidad Nacional de La Plata que dirige el Dr. Carlos Biggeri. Durante la discusión del mismo, el Dr. Biggeri hizo las siguientes sugerencias y puntualizaciones que agradezco y que tal vez puedan ser objeto de ulterior desarrollo.

En primer lugar el Dr. Carlos Biggeri observa que con las notaciones

$$x_h = \alpha_h + i\beta_h \; , \; \alpha_h/\delta = A_h \; ; \; \beta_h/\delta = B_h \; , \; \delta^2 = (x\bar{x}) \quad (h = 0,1,2)$$

la expresión del grado de la parte o región de curva analítica correspondiente a los valores del parámetro complejo t pertenecientes a un dominio D se escribe

$$G = -\frac{1}{\pi}\int_D \sum_0^2 dA_h \, dB_h$$

puesto que

$$[d(A_h + iB_h) \; d(A_h - iB_h)] = -2i\,[dA_h \, dB_h]$$

Si ∂D representa el contorno de D, aplicando la fórmula de Green a la integral doble anterior se tiene también

$$G = \frac{1}{\pi}\int_{\partial D} \sum_0^2 (B_h \, dA_h - A_h \, dB_h)$$

o bien, introduciendo las partes real e imaginarias α_h, β_h de x_h

$$G = \frac{1}{\pi}\int_{\partial D} \sum_0^2 \frac{\beta_h \, d\alpha_h - \alpha_h \, d\beta_h}{\delta^2}$$

Esta expresión del grado mediante una integral curvilínea, dada por el Dr. Biggeri, es muchas veces útil y cómoda para el cálculo efectivo.

En segundo lugar observa con razón el Dr. Biggeri que al considerar una "parte" de curva analítica hay que tener cuidado en dar una definición bien precisa de la misma, pues procediendo con ligereza se pueden ocasionar confusiones. Tomemos, como ejemplo, el ya considerado en el N°3 en el cual para simplificar los cálculos supondremos ahora $a=0$. Considerando el eje complejo x_2 definido por las ecuaciones paramétricas

$$x_0=1 \; , \; x_1=0 \; , \; x_2=t$$

la región del mismo definida por los valores de t tales que $0\leq|t|\leq b$ hemos visto que tenía por grado

$$G=\frac{b^2}{1+b^2} \tag{5.1}$$

En cambio si se supone el mismo eje definido por las ecuaciones

$$x_0=1 \; , \; x_1=0 \; , \; x_2=\frac{b\tau}{1+\tau}$$

(b real, τ parámetro complejo), a primera vista podría parecer que la misma región anterior está definida por

$$0\leq|\tau|\leq\infty$$

$$-\frac{\pi}{2}\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$$

Sin embargo es evidente que no es así; la región primeramente considerada corresponde a valores de τ tales que

$$0\leq\left|\frac{b\tau}{(1+\tau)}\right|\leq b , \; 0\leq\theta\leq 2\pi$$

que no es la misma definida por

$$0 \leq |z| \leq \infty \ ; \ -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

Expresando ambas regiones mediante el parámetro t, la primera región es la del círculo $|t| \leq b$; la segunda la del círculo cuyo diámetro es el segmento $0\,;\,b$. Por tanto, el grado de la segunda región es

$$G_1 = \frac{1}{\pi} \iint \frac{\rho\, d\rho\, d\theta}{(1+\rho^2)^2} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \left(1 - \frac{1}{1+b^2 \cos^2\theta}\right) d\theta = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+b^2}}\right)$$

Este grado tiene una clara interpretación geométrica, que no posee (5.1), lo cual no tiene nada de particular puesto que se trata de dos regiones distintas del eje complejo x.

Además, el Dr. Biggeri da otras definiciones de la noción de grado.

Finalmente, el Dr. Biggeri señala que el resultado de E. CARTAN, a saber el (1.4), es una consecuencia de resultados clásicos de KRONECKER y de PICARD (expuestos en el primero y segundo tomos del Tratado de este último).

La Plata, Octubre de 1951

- - - o - - -