Rev.Acad.Canar.Cienc., VII (Núm. 1), 117-134 (1995)

FUNDAMENTOS DE LA ESTEREOLOGIA EN LOS ESPACIOS EUCLIDIANOS E HIPERBOLICOS DE TRES DIMENSIONES.

Luis A. Santaló.
Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales.
Universidad de Buenos Aires - Argentina.

1. INTRODUCCION HISTORICA.

Una rama interesante, relativamente reciente, de las probabilidades y de la geometría integral o estocástica es la llamada Estereología. Se trata de una rama interdisciplinaria cuyas técnicas son útiles en una gran variedad de disciplinas, en apariencia muy alejadas entre sí como son la biología, la mineralogía y la metalurgia.

Algunas fórmulas de la Estereología datan del siglo pasado, en trabajos sobre composición de rocas o minerales, pero hace apenas tres décadas que se vió como muchos resultados sueltos e inconexos, se podían sistematizar y perfeccionar si se trataban dentro del marco de la geometría integral o estocástica. Vamos hacer un poco de historia.

Durante el Congreso Internacional de Anatomía celebrado en New York en 1960, algunos participantes observaron que varios problemas presentados consistían esencialmente en la determinación de estructuras tridimensionales a partir de otras bidimensionales obtenidas por sección o proyección de las primeras. Se observó que el problema se presentaba igualmente, en metalurgia y en mineralogía al querer averiguar la composición de aleaciones, rocas o minerales a partir de secciones planas ; así como en botánica en el estudio de los tejidos de las maderas a partir de cortes planos o en la distribución de cultivos en grandes áreas partiendo de secciones longitudinales; lo mismo que en anatomía al analizar la composición de los tejidos o de los alveolos de ciertos órganos animales.

Se organizó entonces una reunión para tratar el tema, a la que concurrieron especialistas de distintas ramas, que tuvo lugar en las Sierras de Feldberg (Selva Negra, Alemania) los días 11 y 12 de mayo de 1961. En esta reunión se decidió el nombre de Estereología y se fundó la Sociedad Internacional de Estereología.Su primer Presidente fue el profesor Hans Elias (Universidad de Chicago), quien anunció la siguiente definición: " Estereología es un conjunto de métodos para la exploración del espacio tridimensional a partir del conocimiento de secciones bidimensionales o proyecciones sobre planos. Es decir, se trata de una extrapolación del plano al espacio".

A partir de esa fecha han tenido lugar varios congresos internacionales de Estereologia , a saber: I. Viena (1965); II. Chicago (1967); III.Berna (1971); IV. Washington (1975);V. Salzburgo, Austria (1979); VI. Gainesville,U.S.A. (1983); VII. Caen, Francia (1987); VIII. Irvine, California (1991); IX. Copenhagen, Dinamarca (1995) del 20 al 25 de agosto.

En las actas de estos Congresos hay que buscar muchas ideas y trabajos de Estereologia. Otras reuniones y simposios sobre Estereologia han sido los siguientes:1. Simposio sobre problemas de Estadística y Probabilidades en Metalurgia,(Seattle,Washington- 1971).Actas publicadas como suplemento especial de la revista Advances in Applied Probability, 1972. 2. Conferencia sobre Spatial Patterns and Processes (Canberra,1977).Suplemento de Advances in Applied Probability,1978. 3. Buffon's 200th. anniversary,Paris 1977. Actas publicadas como Lecture Notes in Biomathematics, Springer, Berlín, 1978. 4. European Symposium for Stereology, Ljubljana, Yugoeslavia, 1981. 5. Stochastic Geometry, Geometric Statistics, Stereology, Oberwolfach, 1983. Teubner, Leipzig, 1984.6. Stereology 82, Sheffield, England, 1982. 7. Symposium on morphometry in morphological diagnosis, Kuopio, Finland, 1983. 8. European Symposium for Stereology, Göteborg, Suecia, 1985. 9 International Conference on Stereology and Stochastic Geometry, Berna, 1987. 10. International Workshop on Stochastic Geometry , Stereology and Image Analysis, Valencia 1993.

El primer texto básico que trata sistematicamente la Estereología es el de E.E.Urdewood (20). Después han aparecido otros que se citan en la bibliografía, como los de Coleman (1), Weibel (21), De Hoff-Rhines (5), Stoyan-Kendall-Mecke(19).

Desde hace unos años la International Society for Stereology estableció un convenio con la Royal Microscopial Society, en virtud del cual el Journal of Microscopy, editado por esta última pasa a ser tambien el órgano de la primera Sociedad de modo que desde entonces muchos trabajos de estereología aparecen en esa clásica revista.

Despues de esta información histórica, vamos a exponer los fundamentos de la Estereología Euclidiana y su generalización del espacio hiperbólico.A pesar de que esta última no parece, por ahora, que tenga aplicaciones prácticas, presenta cierto interés académico, por abrir el camino para el estudio de la geometría hiperbólica inherente a los recientes estudios de la estereología: Miles-Davy (11); Gundersen-Jensen (7); Cruz Oribe (2)-(3); Saxl y otros (17).

2.EL CASO EUCLIDIANO.

2.1. Medidas de rectas y de planos.

En la teoria de probabilidades geométricas y en la geometría integral, se toma como medida de los conjuntos de rectas G la integral de la densidad.

$$dG = du \wedge d\omega \tag{2.1}$$

Donde du es el elemento de área en el plano perpendicular a G por el origen O en el punto en que este plano corta a la recta y $d\omega$ es el elemento de área sobre la esfera unidad en el punto en que es cortada por la recta por O paralela a G (elemento del ángulo sólido correspondiente a la dirección de G).

Esta densidad es invariante por el grupo de los movimientos del espacio, por lo que en Estereologia se acostumbra a llamarla densidad IUR (isotropic uniform random), lo que a veces indicaremos como

$$d_{IUR}\, G = dG. \tag{2.2}$$

Si la recta G corta a un dominio Y del espacio según un segmento $G \cap Y$ y ds indica el elemento de la recta contenido en $G \cap Y$, se utiliza tambien la densidad ponderada,

$$d_{WR} G = ds \wedge dG \tag{2.3}$$

donde WR indica "weighted random".
Vamos a recordar ahora algunas fórmulas integrales que se pueden ver en cualquier texto de Probabilidades Geométricas, por ejemplo Kendall-Moran (10), Solomon (18), Santaló (14).

Supongamos una superficie fija S del espacio, cuya área sea A(S). Si $N(S \cap G)$ representa el número de puntos en que ella es cortada por una recta G (número variable con la posición de G) vale la fórmula

$$\int N (S \cap G)\, dG = \pi A (S) \tag{2.4}$$

donde la integral se puede suponer extendida a todas las rectas del espacio, siendo N = 0 para las que no cortan a la superficie. Por lo tanto, la medida de las rectas que cortan a un cuerpo convexo X del espacio es $(\pi/2)\ A(\partial X)$ siendo ∂X la superficie del cuerpo.

Si se tiene un cuerpo X de volumen V(X) fijo y representamos L (X$\cap$G) la longitud de la cuerda que la recta G determina en el cuerpo X, vale tambien la fórmula integral

$$\int L (X \cap G) \, dG = 2 \pi V(X) \qquad (2.5)$$

que se puede escribir

$$\int d_{WR} G = \int L (X \cap G) \, dG = 2 \pi V(X) \qquad (2.6)$$

Para el conjunto de planos del espacio, llamando p a la distancia a E de origen O, dω al elemento de área de la esfera unidad que corresponde al extremo del radio normal al plano por el centro de la esfera, la densidad para los planos E vale

$$dE = dp \wedge d\omega \qquad (2.7)$$

que es la densidad invariante por movimientos o densidad IUR de la Estereologia. A veces se representa

$$dE = d_{IUR} E$$

Si el plano E corta a un dominio X segun un área plana X$\cap$E y se llama dσ al elemento de área en X$\cap$E, se llama densidad ponderada o densidad WR a la fórmula diferencial

$$d_{WR} \mathbf{E} = d\sigma \wedge dE \qquad (2.8)$$

Si se tiene una curva C fija en el espacio de longitud L(C) y N representa el número de puntos en que es cortada por el plano E, vale

$$\int N(C \cap G) \, dE = \pi \, L(C) \qquad (2.9)$$

Si el plano corta a una superficie S fija, de área A(S), según una curva S $\cap$ E, vale también la fórmula

$$\int L(S \cap E) \, dE = (\pi^{2} /2) \; A(S) \qquad (2.10)$$

Si el plano E corta a un cuerpo Y del espacio de cualquier forma, pero de volúmen V(Y) y se representa por A(Y $\cap$ E) al área de la sección, tiene

$$\int A(Y \cap E)\, dE = \int d_{WR} E = 2\pi V(Y) \qquad (2.11)$$

La medida de los planos que cortan a un cuerpo convexo X se llama la "curvatura media" de X o más precisamente, la integral de la curva media de la superficie, ∂X que limita X. Se representa $M(\partial X)$, de modo que se puede escribir

$$\int dE = M(\partial X) \qquad (2.12)$$

donde la integral está extendida al conjunto de los planos que tienen punto comun con X. En algunos libros técnicos , $M(\partial X)$ se denomina el "mean calipte diameter" y es igual a la distancia media entre planos tangentes paralelos. Para una esfera de diámetro D es $M=2\pi D$. Para un segmento de longitud h es $M=(\pi/2)u$.
Para un poliedro convexo, si a_i son las longitudes de las aristas y α_i son los ángulos diedros correspondientes, vale la fórmula

$$M = (1/2) \sum a_i (\pi - \alpha_i) \qquad (2.13)$$

2.2. Estimación de volúmenes.

Supongamos un cuerpo convexo X del espacio que contiene en su interior distintos materiales que representaremos siempre por Y, distribuídos aleatoriamente y que pueden tomar distintas formas y tamaños. Pueden formar, por ejemplo, partículas de diferentes formas, filamentos o hilos, o bien láminas o superficies. El primer caso que vamos a considerar es el que Y es la unión de dominios tridimensionales, convexos o no, con un volúmen total V(Y). Si V(X) es el volúmen total del cuerpo X, se desea estimar la proporción V(Y) / V(X), o sea, el volúmen de Y por unidad de volumen de X. Se supone que se puede cortar X por un plano E y del conocimiento de la proporción de Y y X en la sección plana por E, se quiere estimar V(Y) / V(X). La fórmula (2.11) permite escribir:

$$\int A(X \cap E)\, dE = 2\pi V(X) \quad , \quad \int A(Y \cap E)\, dE = 2\pi V(Y)$$

de manera que la esperanza matemática IUR de $A(Y \cap E)$, es

$$E_{IUR}(A(Y \cap E)) = \frac{\int A(Y \cap E)\, dE}{\int dE} = \frac{2\pi V(Y)}{M(\partial X)} \qquad (2.14)$$

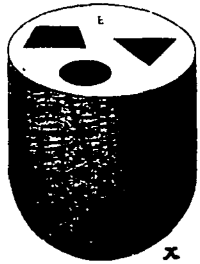
y un estimador sesgado de V(Y) / V(X) puede ser

$$\underset{IUR}{\text{est}}\left(\frac{V(Y)}{V(X)}\right)= \frac{M(\partial X)}{2\pi} \quad \frac{A(Y\cap E)}{V(X)} \tag{2.15}$$

El plano E por el cual se corta X es un plano dado al azar, pero como parece natural elegir este plano de manera tal que la sección X∩E sea la mayor posible, es mejor tomar como densidad de plano a la densidad ponderada WR, con la cual se obtiene

$$E_{WR}\left(\frac{A(Y\cap E)}{A(X\cap E)}\right) = \frac{\int A(Y\cap E)\, dE}{\int A(X\cap E)\, dE} = \frac{V(Y)}{V(X)} \tag{2.16}$$

de donde se deduce el estimador insesgado



$$\text{est}_{WR}\left(\frac{V(Y)}{V(X)}\right) = \frac{A(Y\cap E)}{A(X\cap E)}$$

Llamando simbolicamente V_V a la razón de volumenes y A_A a la razón de las áreas de una sección plana el resultado anterior se suele expresar

$$V_V = A_A \tag{2.17}$$

Este es posiblemente, el primer resultado estereológico, ya obtenido por A. Delesse(6) en 1848 para determinar la composición de rocas a partir de la que se observa en sus secciones planas.

Otra manera de estimar la razón entre volumenes, puede ser cortar el cuerpo X por una recta G y comparar las longitudes de las intersecciones de esta recta con Y y X respectivamente. Si L(Y∩G) y L(X∩G) son las longitudes de estas intersecciones, la esperanza IUR de L(Y∩G) es

$$E_{IUR} \int L(Y\cap G) = \frac{\int L(Y\cap G)}{\int dG} = \frac{4V(Y)}{A(\partial X)}$$

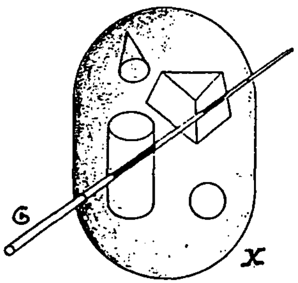
de donde resulta el estimador sesgado

$$\underset{IUR}{\text{est}} \; \frac{V(Y)}{V(X)} = \frac{A(\partial X)}{4} \; \frac{L(Y \cap G)}{V(X)} \qquad (2.18)$$

Como antes, puesto que es más probable elegir rectas tales que L(X ∩G) sea grande, es mejor tomar la densidad WR, con lo cual resulta

$$\underset{WR}{E} \left(\frac{L(Y \cap G)}{L(X \cap G)} \right) = \frac{\int L(Y \cap G)\, dG}{2\ \pi\ V(X)} = \frac{V(Y)}{V(X)}$$

o sea se tiene el estimador insesgado



$$\underset{WR}{\text{est}} \left(\frac{V(Y)}{V(X)} \right) = \frac{L(Y \cap G)}{L(X \cap G)} \qquad (2.19)$$

Simbolicamente ésto se escribe

$$V_V = L_L \,. \qquad (2.20)$$

que es otro resultado clásico de estereología ya conocido por A. Rosiwal (12) en 1898.

Otra fórmula para estimar volumenes es la siguiente. Se tiene una partícula convexa de volumen V(X). Se puede demostrar que un estimador insesgado de este volumen es

$$\text{est } V(X) = (\pi / 3)\ L^3 (X \cap G) \qquad (2.21)$$

donde L(X ∩ G) es la longitud de la cuerda en que la recta azar G corta a X. Ver H.J. Gundersen (8) y I. M. Karlsson- L.M. Cruz Orive (9).

2.3. Estimación de áreas.

Supongamos que el cuerpo convexo X contiene en su interior ciertas superficies o láminas Y de área total A(Y). Queremos estimar el cociente A(Y) / V(X), o sea la cantidad de área por unidad de volumen.

Podemos cortar por planos o por rectas. Cortando por un plano al azar E, con la densidad IUR y llamando $L(Y \cap E)$ a la longitud total de las curvas de intersección de $Y \cap E$, según (2.10), (2.12), se obtiene

$$E_{IUR}\, L(Y \cap E) = \frac{\int L(Y \cap E)dE}{M(\partial X)} = \frac{\pi^2}{2} \frac{A(Y)}{M(\partial X)} \tag{2.22}$$

de donde se tiene el estimador sesgado

$$\text{est}_{IUR}\, A(Y) = \frac{2M(\partial X)}{\pi^2} L(Y \cap E) \tag{2.23}$$

En cambio utilizando la densidad ponderada WR se obtiene

$$E_{WR} \left(\frac{L(Y \cap E)}{A(X \cap E)} \right) = \frac{\pi A(Y)}{4\, V(X)} \tag{2.24}$$

de donde se tiene

$$\text{est}_{WR}\, A(Y) = \frac{4V(X)}{\pi} \frac{L(Y \cap E)}{A(X \cap E)} \tag{2.25}$$

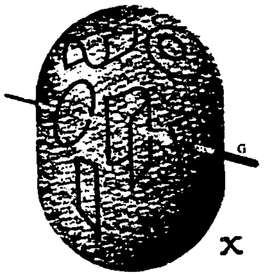
o sea, A(Y) / V(X), cantidad de área de Y por unidad de volúmen de X, se puede estimar por el producto de 4 / π por la proporción de la longitud de las curvas de intersección de Y con E por la unidad de área de la intersección $X \cap E$. Simbolicamente se escribe

$$A_V = (4/\pi)\, L_A \tag{2.26}$$

Tambien se puede estimar A(Y) / V(X) cortando por una recta al azar G y comparando el número de puntos de intersección de G con Y con la longitud de la cuerda que G determina en X (número de puntos de $Y \cap G$ por la unidad de la cuerda $X \cap G$).

Si $N(Y \cap G)$ es el número de puntos de intersección de G con Y y $L(X \cap G)$ es la longitud de la cuerda de la intersección $X \cap G$, tomando las rectas con la densidad IUR, resulta que la esperanza de $N(Y \cap G)$ es

$$\underset{IUR}{E} \; N(Y \cap G) = \frac{\int N(Y \cap G)\,dG}{\int dG} = \frac{2\,A(Y)}{A(\partial X)} \tag{2.27}$$



de donde resulta el estimador sesgado

$$\underset{IUR}{\mathrm{est}} \; A(Y) = (1/2) \cdot A(\partial X) \; N(Y \cap G) \tag{2.28}$$

En cambio tomando para las rectas G la densidad WR, se tiene

$$\underset{WR}{E} \left(\frac{N(Y \cap G)}{L(X \cap G)} \right) = \frac{A(Y)}{2V(X)} \tag{2.29}$$

de donde

$$\underset{WR}{\mathrm{est}} \; A(Y) = 2\,V(X) \frac{N(Y \cap G)}{L(X \cap G)} \tag{2.30}$$

que simbolicamente se puede escribir

$$A_V = 2\,N_L \tag{2.31}$$

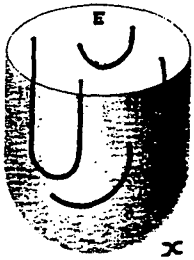
indicando con N_L el número de intersecciones de G con Y por unidad de longitud de la cuerda $X \cap G$.

2.4. Estimación de longitudes.

Supongamos que en el interior de un cuerpo convexo X hay fibras o hilos Y que en total tengan una longitud L(Y). Se trata de estimar la longitud de estos hilos por unidad de volumen de V(X), o sea , L(Y) / V(X).

Se puede cortar por un plano E al azar y contar el número de puntos $N(Y \cap E)$ de intersección del mismo con hilos Y. Tomando como densidad para E la densidad IUR, se tiene

$$E_{IUR}\, N(Y\cap E) = \frac{\int N(Y\cap E)\, dE}{\int dE} = \frac{\pi\, L(Y)}{M(\partial X)} \tag{2.32}$$



de donde resulta un estimador sesgado

$$\mathrm{est}_{IUR}\, L(Y) = \frac{M(\partial X)}{\pi}\, N(Y\cap E) \tag{2.33}$$

En cambio tomando la densidad ponderada WR se tiene la esperanza

$$E_{WR}\left(\frac{N(Y\cap E)}{A(X\cap E)}\right) = \frac{L(Y)}{2\,V(X)} \tag{2.34}$$

de donde resulta el estimador insesgado

$$\mathrm{est}_{WR}\left(\frac{L(Y)}{V(X)}\right) = 2\,\frac{N(Y\cap E)}{A(X\cap E)} \tag{2.35}$$

Como $N(Y \cap E) / A(X \cap E)$ es el número de puntos de intersección de las curvas Y con el plano E por unidad de área de la intersección de E con X, este resultado se suele escribir

$$L_V = 2 N_A \tag{2.36}$$

3. ESTEREOLOGIA EN EL ESPACIO HIPERBOLICO.

3.1. Densidad de rectas y planos en el espacio hiperbólico.

En la teoría de probabilidades geométricas, en el espacio hiperbólico, para medir conjuntos de rectas G se toma la densidad

$$dG = \mathrm{ch}\rho \;\; du \wedge d\omega \tag{3.1}$$

donde du es el elemento del área del plano normal a G por el origen O en el punto a_0 que este plano corta a G, $d\omega$ es el elemento de área sobre la esfera unidad de centro O en el punto en que ella es cortada por el radio normal a dicho plano perpendicular a G y $\mathrm{ch}\rho$ indica el coseno hiperbólico de la distancia de O a G. Esta densidad se demuestra que es invariante por los movimientos del espacio hiperbólico y en estereología se llama la densidad IUR poque a veces se escribe

$$dG = d_{IUR} G = \mathrm{ch}\rho \; du \wedge d\omega \tag{3.2}$$

Si $d\omega^0$ indica el elemento de área, análogo al $d\omega$ pero sobre la esfera unidad cuyo centro es el punto a_0 de la recta se tiene

$$d\omega^0 = \mathrm{ch}\rho \; d\omega \tag{3.3}$$

de manera que otra forma de la densidad IUR de rectas es

$$dG = d_{IUR} G = du \wedge d\omega^0$$ Ver (14; pags.306-307)

Igual que para el espacio euclidiano, si la recta G corta a un dominio Y y $L(Y \cap G)$ es la longitud de la cuerda $Y \cap G$, se llama densidad ponderada o densidad WR de la recta G

$$d_{WR} G = L(Y \cap G) \, dG \tag{3.4}$$

Con esto resulta que en el espacio hiperbólico valen las mismas fórmulas (2.4), (2.5) del espacio euclidiano.

$$\int N(S \cap G)\, dG = \pi A(S), \quad \int L(Y \cap G)\, dG = \int d_{WR} G = 2\pi V(Y)$$

Pasemos ahora a definir las densidades IUR y WR para planos. Fijado un punto O del espacio hiperbólico, dado un plano E y llamando ρ a su distancia a O y $d\omega$ al elemento de área de la esfera unidad de centro 0 correspondiente al radio tangente a la recta normal al plano E por O, la densidad IUR para medir conjuntos de planos E , vale (14, pags. 306-307)

$$dE = d_{IUR} E = ch^2\rho \;\; d\rho \cap d\omega \tag{3.5}$$

Con esta expresión, la medida de los planos que cortan un cuerpo convexo X, se demuestra que es igual a

$$\int dE = M(\partial X) - V(X) \tag{3.6}$$

donde M (∂X) es la curvatura media de ∂X y V (X) el volumen de X.(Ver 14; pag. 311). Aquí aparece una primera diferencia con el caso euclidiano en el que esta medida es igual solamente a M(∂X).

Si $d\sigma$ indica el elemento del área del plano E en un punto de la intersección $X \cap E$ de E con un dominio X del espacio, entonces la densidad ponderada o WR de E, se define

$$d_{WR} E = d\sigma \wedge dE \tag{3.7}$$

Si C es una curva fija del espacio de longitud L (C), y N (C $\cap$ E) es el número de puntos en que C es cortada por E, vale (igual que en el espacio euclidiano)

$$\int N(C \cap E)\, dE = \pi L(C) \tag{3.8}$$

Analogamente si se tiene una superficie S fija de área A(S) y L(S$\cap$E) indica la longitud de la curva intersección S$\cap$E, se tiene

$$\int L(S \cap E)\, dE = (\pi^2/2)\; A(S) \tag{3.9}$$

Si E corta a un dominio Y de un cuerpo segun un área A (Y∩E), vale

$$\int A (Y \cap E)\, dE = 2\pi\ V(Y) \tag{3.10}$$

que segun (3.7) se puede escribir

$$\int d_{WR}E = 2\pi\ V(Y) \tag{3.11}$$

Para las fórmulas (3.8), (3.9) y (3.10) ver (14, págs. 245- 309).

3.2. Estimación de volúmenes.

Sea X un cuerpo convexo del espacio hiperbólico que contiene en su interior distintos materiales que siempre representamos por Y , redistribuídos al azar y que pueden tener distintas formas y tamaños.

Si Y es la unión de dominios tridimensionales con un volumen total V(Y) y V(X) es el volumen de X, queremos estimar el cociente V(Y) / V(X), o sea la proporción de volumen de Y por unidad de volumen de X. Para ello, se corta X por un plano E al azar y del conocimiento de las áreas A(Y∩E) y A(X∩E) queremos estimar el cociente V(Y) / V(X).

Tomando la definición IUR resulta la esperanza

$$E_{IUR}\ A(Y \cap E) = \frac{\int A(Y\cap E)\, dE}{\int dE} = \frac{2\pi\ V(Y)}{M(\partial X) - V (X)} \tag{3.12}$$

de modo que un estimador sesgado de V(Y) / V(X), puede ser

$$\mathrm{est}_{IUR}\left(\frac{V(Y)}{V(X)}\right) = \frac{M(\partial X) - V(X)}{2\pi} \cdot \frac{A(Y\cap E)}{V(X)} \tag{3.13}$$

Si se toma la densidad ponderada WR, resulta

$$E_{WR}\left(\frac{A(Y\cap E)}{A(X\cap E)}\right) = \frac{\int A(Y\cap E)\, dE}{\int A(X\cap E)\, dE} = \frac{V(Y)}{V(X)} \tag{3.14}$$

de donde se deduce el estimador insesgado

$$\operatorname{est}_{RW}\left(\frac{V(Y)}{V(X)}\right)=\frac{A(Y\cap E)}{A(X\cap E)} \tag{3.15}$$

que se puede escribir como antes (2.17) $V_V = A_A$

Para estimar volumenes mediante rectas, se corta el volumen X por una recta al azar y se miden las longitudes de las intersecciones L(Y∩G) y L(X∩G). Igual que en el caso euclidiano se tiene

$$E_{IUR}\, L(Y\cap G) = \frac{\int L(Y\cap G)\,dG}{\int dG} = \frac{4\,V(Y)}{A(\partial X)} \tag{3.16}$$

de donde

$$\operatorname{est}_{IUR}\frac{V(Y)}{V(X)} = \frac{(1/4)\; A(\partial X)\; L(Y\cap G)}{V(X)} \tag{3.17}$$

Un estimador insesgado se obtiene tomando $d_{WR}G$, resultando

$$\operatorname{est}_{WR}\left(\frac{V(Y)}{V(X)}\right)=\frac{L(Y\cap G)}{L(X\cap G)} \tag{3.18}$$

o sea simplemente $V_V = L_L$, igual que en el caso euclidiano.

Vamos a ver la forma que toma la fórmula (2.21) para el espacio hiperbólico.Es conocida la fórmula (14,pag.317), suponiendo que X es convexo.

$$\int (\operatorname{sh}^2 L(X\cap G) - L^2(X\cap G))\quad d_{IUR}G = 2\,V^2(X)$$

de la que resulta

$$E_{WR}\left(\frac{\operatorname{sh}^2 L(X\cap G) - L^2(X\cap G)}{L(X\cap G)}\right) = (1/\pi)\,V(X)$$

de donde

$$\operatorname{est}_{WR} V(X) = \pi \frac{\operatorname{sh}^2 L(X\cap G) - L^2(X\cap G)}{L(X\cap G)} \qquad (3.19)$$

Como el plano hiperbólico es un modelo de superficie de curvatura constante negativa -K , para pasar al plano euclidiano basta ver que para K=0 la fórmula (3.19) poniendo $\varphi=(-K)^{1/2}$ y observando que $V \to \varphi^3 V$, $L \to \varphi L$ y teniendo en cuenta que $\operatorname{sh} \varphi = \varphi + \varphi^3/3! + \ldots$ se transforma

$$\varphi^3 V = \frac{\pi(\operatorname{sh}^2 \varphi L - \varphi^2 L^2)}{\varphi L} = \frac{\pi \varphi^3 L^3}{3} + \varphi^4 (\ldots)$$

de donde para $\varphi \to 0$, resulta

$$\operatorname{est} V = (1/3)\, \pi L^3$$

que es la fórmula (2.21) de Gundersen-Cruz Oribe.

3.3. Estimación de áreas.

Supongamos que el convexo X contiene en su interior ciertas superficies o láminas de área total A(Y) queremos estimar el cociente A(Y) / V(X) , o sea, la cantidad de área por unidad de volumen. Teniendo en cuenta (3.9) y (3.6), resulta la esperanza

$$E_{IUR} L(Y\cap E) = (\pi^2/2) \frac{A(Y)}{M(\partial X) - V(X)} \qquad (3.20)$$

y el estimador

$$\operatorname{est}_{IUR} A(Y) = (2/\pi^2)\, L(Y\cap E)\, (M(\partial X) - V(X)) \qquad (3.21)$$

Usando la densidad ponderada WR resulta que se escribe $A_V = (4/\pi)L_A$,igual a la fórmula (2.26).

La densidad de rectas WR conduce a los mismos resultados (2.29) y (2.30) de los cuales se deduce

$$\underset{WR}{\text{est}}\ A(Y) = 2\ V(X)\frac{N(\ Y\cap G\ )}{L(\ X\cap G\ )} \tag{3.22}$$

lo que conduce al mismo resultado de antes $A_V = 2\ N_L$

3.4. Estimación de longitudes.

Supongamos el cuerpo convexo X que contiene hilos o fibras Y de longitud total L(Y). Para estimar el cociente L(Y) / V(X) se puede cortar X por un plano al azar E y contar el número de puntos N(Y∩E) de la intersección. Tomando la densidad IUR para E se tiene que la esperanza análoga a (2.32)es

$$\underset{IUR}{E}\ N(\ Y\cap E\ )\ = \frac{\pi\ L(\ Y\ )}{M(\ \partial\, X\ )\ -\ V(\ X\ )}$$

de la cual se deduce el estimador sesgado

$$\underset{IUR}{\text{est}}\ L(Y) = (\ 1/\ \pi\ )\ (\ M(\ \partial\, X) - V(\ X\ ))\ \ N(Y\cap E\ )$$

En cambio tomando la densidad WR para E, resulta la misma fórmula (2.35) que se representa como antes por $L_V = 2\ N_A$.

BIBLIOGRAFIA.

(1). Coleman, R. An introduction to mathematical Stereology, Momoirs. N°3, 1979, Dept. · Theoretical Statistics, Univ. Aarhus.

(2). Cruz Orive, L.M. On the precision of systematic sampling: a review of Matheron's transitive methods, J. Microsc. 153, pags. 315-333. 1988.

(3). Cruz Orive, L.M.- Webel,E. Recent stereological methods for cell biology : a brief survey, Am. J. Physiol. 258, 148-156. 1990.

(4). Cruz Orive, L.M.- Howard, C. V. Estimating the length of bounded curve in 3 dimensions using total vertical projections, J. Micros. 163, 101-113, 1991.

(5). De Hoff, R.T. - Rhines, F.N. Quantitative Microscopy, Mc. Graw - Hill, New York, 1968.

(6). Delesse, A. Procede mecanique pour determiner la composition de roches, Ann. des mines, IV Serie, 13, 1848, 379-388.

(7). Gundersen, M.J.G. - Jensen, E.B. Stereological estimation of the volumen-weighted mean volumen of arbitrary particles observed on random sections, J. Microsc. 138, 127-152, 1985.

(8). Gundersen, M.J.G. y otros. Some new simple and efficient stereological methods and their use in pathological microbiologica et immunologica . Svandinavica , 96, 379-394, 1988.

(9). Karlsson, I.M.- Cruz Orive, L.M. The new stereological tools in metalography, J. Microscopy, 165, 399-415. 1992.

(10). Kendall, M.G. - Morán, P.A.P. Geometrical probability, Griffin, London, 1963.

(11). Miles, R. - Davy, P. Precise and general conditions for the validity of a comprehensive set of stereological fundamental formulae, J. Microscopy 107, 211-226, 1976.

(12).Rosiwal, A. Ein einfacher Weg zur Ziffermassigen Feststellung der Quantitatswehaltnisses der Mineralbestandteile Gemengter Gesteine. Verhandl. der K.K. geologischen Reichanstalt, 5/6, 1898, 143.

(13). Santaló, L.A. Integral Geometry, Capítulo del libro Global differential Geometry, ed. S.S. Chern. The Mathematical Association of America, 1989, 303-350.

(14). Santaló, L.A. Integral Geometry and Geometric Probability, Addison- Wesley, Reading, 1976.

(15). Santaló, L.A. Fórmulas fundamentales de la estereología usando secciones por variedades no lineales, Rev. de la Unión Matemática Argentina, 34, 1988, 58-68.

(16).Serra, J.P. Image Analysis and Mathematical Morphology Academic Press, London, 1982.

(17). Saxl, I. Pelikan, K.- Rataj, J.- Berterei, M. Quantification and Modelling of Heterogeneous systems, Cambridge Inter. Serie Publishing, Cambridge, 1995.

(18). Solomon, H. Geometric Probability, Regional Conference, Serie in Applied Probability, Society for Industrial and Applied Mathematics. Philadelphia, 1978.

(19). Stoyan, D. - Kendall,W.S. - Mecke, J. Stochastic Geometry and its Applications, Akad. Verlag, Berlin, 1987.

(20). Underwood, E. E. Quantitative Stereology, Addison -Wesley, Reading, 1970.

(21).Weibel, E. Stereological Methods, 2 vol. Academic Press London-New York, 1980.

(22). Weil, W. Stereology: a survey for geometers, Convexity and its Applications, Birkhauser, Basel, 1983.