Un esquema de valores medios en la teoría de probabilidades geométricas

por L. A. Santaló

Sea una figura convexa plana K que podemos imaginar de color blanco. Se corta de una manera arbitraria por una banda paralela B de anchura Δ limitada por dos rectas paralelas, lo cual se puede interpretar por ejemplo diciendo que se dá sobre ella al azar una pincelada de color negro y anchura Δ (fig. 1). A continuación, y también al azar se dá otra pincelada blanca de la misma anchura que borra la anterior en los puntos que la encuentra. Luego se traza otra pincelada negra y enseguida otra de blanca que puede borrar parte de la misma. Prosiguiendo así sucesivamente el objeto de esta nota es buscar, al cabo de n de estas pinceladas, cual será el *valor medio* de la parte de K que queda de color negro. También hallamos el caso de tender a infinito el número n de estas pinceladas.

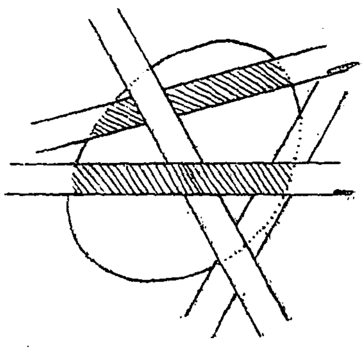

Fig. 1.

§ 1. Definiciones y fórmulas conocidas

Hay que definir primero que se entiende por dar al azar sobre el plano una banda B limitada por rectas paralelas [1]. Siendo la anchura Δ constante la posición de una de estas bandas quedará determinada dando la posición de una recta invariablemente unida a ella, por ejemplo la paralela media. Entonces es sabido en la teoría de Probabilidades geométricas [2] que para medir un conjunto de rectas se toma la integral extendida al conjunto considerado de la expresión diferencial $dp\, d\theta$ siendo p la distancia de la recta a un punto fijo y θ el ángulo que forma la normal con una dirección también fija (fig. 2). Como medida de un conjunto de bandas paralelas de igual anchura, se podrá por tanto tomar la misma anterior, o sea la integral de la expresión.

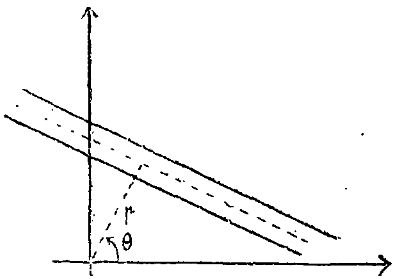

Fig. 2.

$$dB = dp\, d\theta \tag{1}$$

que se llama *densidad de bandas paralelas*.

(1) Sobre esta cuestión se puede ver nuestro trabajo: L. A. Santaló "Geometría Integral 7. Nuevas aplicaciones del concepto de medida cinemática en el plano y en el espacio" Revista de la Academia de Ciencias, Madrid 1936.

(2) Ver Deltheil "Probabilités géométriques" o bien Blaschke "Vorlesungen über Integralgeometrie I" pág. 7.

Aplicando esta definición a la medida de todas las bandas paralelas de anchura $\triangle$ que cortan a una figura convexa K, es sabido [1] que se obtiene

$$\int dB = L + \pi \triangle \tag{2}$$

siendo L la longitud de K. En particular la medida del conjunto de bandas B que contienen a un punto fijo del plano es

$$\int dB = \pi \triangle \tag{3}$$

Además, si en cada posición de B llamamos f al área de su intersección con K se verifica

$$\int f \, dB = \pi \triangle F \tag{4}$$

siendo F el área de K y estando la integración extendida a todas las posiciones en que B corta a K, únicas para las que es $f \neq 0$.

§ 2. Valor medio del área cubierta después de trazadas n bandas de cada color

Teniendo en cuenta (4) y (2) el *valor medio* del área cubierta por la primera pincelada será, por definición de valor medio

$$\bar{f}_1 = \frac{\int f_1 \, dB}{\int dB} = \frac{\pi \triangle F}{L + \pi \triangle} \tag{5}$$

Al trazar ahora una banda de color blanco, para hallar el valor medio de la parte de K que después de ella sigue todavía siendo negra, pongamos $dP = dx\,dy$ y consideremos la integral

$$I_2 = \int dP\, dB \qquad (6)$$

extendida a todas las posiciones en que el punto P es interior al área negra de valor $\bar{f}_1$ y a las bandas B que, cortando a K, no contienen al punto P. Para calcular esta integral fijemos primero P e integremos dB que podrá variar a todas las posiciones en que B corta a K (de medida $L + \pi\Delta$) menos aquellas en que contiene a P de medida $\pi\Delta$ (3). Luego

$$I_2 = \int dP\, dB = \int dP \int dB = (L + \pi\Delta - \pi\Delta) \int dP = L\,\bar{f}_1 \qquad (7)$$

puesto que $\int dP = \bar{f}_1$ ya que hemos dicho que P estaba sujeto a la condición de ser interior al área manchada $\bar{f}_1$. Por otra parte, fijando primero B, para la integración de (6) el punto P podrá variar a toda el área de K que sigue de color negro una vez trazada la segunda banda B. Llamando f_2 a esta área será pues

$$I_2 = \int dP\, dB = \int dB \,.\int dP = \int f_2\, dB \qquad (8)$$

Igualando (7) y (8) queda

$$\int f_2 \,.\, dB = L\,\bar{f}_1 \qquad (9)$$

De aquí y de (2) se tiene, como *valor medio* del área manchada después de trazada la segunda banda o pincelada al azar:

$$\bar{f}_2 = \frac{L\bar{f}_1}{L + \pi\Delta} \tag{10}$$

Se dá ahora arbitrariamente otra pincelada negra. Para hallar el valor medio de la nueva área f_3 que queda manchada de color negro se procede de manera análoga al anterior. Sea un punto $P(x, y)$ y llamando $dP = dx\,dy$ consideremos la integral

$$I_3 = \int dP\, dB$$

extendida a las posiciones en las cuales el punto P está situado en una área blanca no manchada de valor $F - \bar{f}_2$, y B es tal que, cortando a K, no contiene al punto P. Para calcular esta integral se puede proceder de dos maneras. Fijando primero P se tiene, como antes

$$I_3 = \int dP \int dB = (L + \pi\Delta - \pi\Delta) \int dP = L(F - \bar{f}_2)$$

Pero fijando primero la banda B, el punto P podrá variar a toda el área blanca que queda después de la tercera pincelada, que es $F - f_3$, llamando f_3 al área negra después de trazar esta tercera pincelada y cuyo valor medio buscamos. Será pues

$$I_3 = \int dB \,.\int dP = \int (F - f_3)\,.\,dB = F\,(L + \pi\triangle) - \int f_3\, dB$$

De este valor de I_3 y del anterior se deduce

$$\int f_3\,.\,dB = \pi \triangle F + L\bar{f}_2$$

Por consiguiente, recordando (2) será

$$\bar{f}_3 = \frac{\pi \triangle F + L\bar{f}_2}{L + \pi\triangle} \qquad (11)$$

El procedimiento de obtención de (10) y (11) se puede repetir de nuevo exactamente igual obteniéndose las fórmulas generales de recurrencia siguientes

$$\bar{f}_{2n+1} = \frac{\pi\triangle F + L\bar{f}_{2n}}{L + \pi\triangle}\,, \qquad \bar{f}_{2n+2} = \frac{L\bar{f}_{2n+1}}{L + \pi\triangle}$$

Recuérdese que, como la figura K se supuso inicialmente de color blanco y la primera banda que se trazó fué negra, las bandas sucesivas son negras las de orden impar y blancas las de orden par.

Estas fórmulas recurrentes dan;

$$\bar{f}_{2n+1} = \frac{\pi\Delta F}{L+\pi\Delta}\left[1+\left(\frac{L}{L+\pi\Delta}\right)^2+\left(\frac{L}{L+\pi\Delta}\right)^4+\ldots+\left(\frac{L}{L+\pi\Delta}\right)^{2n}\right]$$

$$\bar{f}_{2n+2} = \frac{\pi\Delta FL}{(L+\pi\Delta)^2}\left[1+\left(\frac{L}{L+\pi\Delta}\right)^2+\left(\frac{L}{L+\pi\Delta}\right)^4+\ldots+\left(\frac{L}{L+\pi\Delta}\right)^{2n}\right]$$

que son las expresiones buscadas que nos dan el *valor medio* del área de la parte de K que queda cubierta después de un cierto número de pinceladas dadas al azar y alternativamente negras y blancas. $\bar{f}_{2n+1}$ es el valor medio cuando la última pincelada es negra y $\bar{f}_{2n+2}$ cuando la última es blanca.

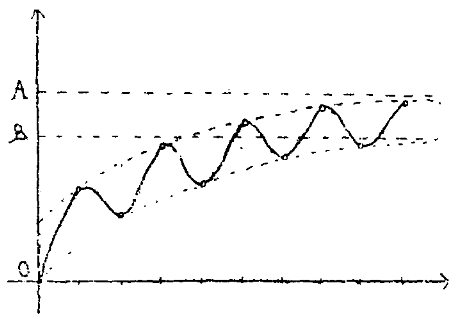

Fig. 3.

Ambos valores medios se vé que son crecientes con n. Si se llevan sobre dos ejes coordenados (fig. 3) el número n de bandas trazas al azar y el valor medio $\bar{f}_n$ del área manchada correspondiente, se obtienen unos puntos que pueden ser unidos por una curva como indica la figura. Para números impares, el valor límite para n creciendo infinitamente será

$$lim\ \bar{f}_{2n+1} = \overline{OA} = \frac{F}{1+\dfrac{L}{L+\pi\Delta}} \tag{12}$$

y para valores pares de n

$$lim\ \bar{f}_{2n+2} = \overline{OB} = \frac{FL}{2L + \pi\triangle} \qquad (13)$$

La separación entre estos dos valores límites es

$$\overline{AB} = \frac{\pi\triangle F}{2L + \pi\triangle}$$

que nos dice que al disminuír la anchura $\triangle$ de las bandas, los valores límites se irán aproximando.

De (12) se deduce también que el mínimo del área manchada en el límite corresponde a $\triangle = 0$ y es $lim\ f_{2n+1} = \frac{F}{2}$, es decir, después de infinitas pinceladas de anchura $\triangle$ alternativamente negras y blancas el valor medio del área que queda negra de K después de una última pincelada negra es igual o mayor que $\frac{F}{2}$, siendo solo igual cuando $\triangle$ tiende a cero.

NOTA. Hemos estudiado el caso mas simple de ser todas las bandas que se trazan sobre la figura K de una misma anchura $\triangle$. Sería interesante estudiar el caso de bandas de anchuras variables, sobre todo el caso de tender la anchura a cero al crecer el número de bandas trazadas.