LA MATEMÁTICA MODERNA EN LA ESCUELA PRIMARIA Y EN LA SECUNDARIA

LUIS A. SANTALÓ*

1. *La matemática de todos los tiempos*

La matemática se ha presentado siempre bajo dos aspectos: como técnica y como filosofía. Es muy probable que ambos aspectos nacieran casi simultáneamente. Junto con las reglas para calcular áreas y volúmenes aparecieron ciertos significados místicos de los números. El hombre quiso entender los vínculos que unen los diferentes aspectos de la naturaleza. Observó que muchos sucesos, medidas o fenómenos no son independientes, y al estudiar esta dependencia se encontró con que su entendimiento le permitía predecir resultados, supuestos ciertos puntos de partida. Aprendió a calcular el área de un triángulo conocidas su base y su altura o el volumen de un depósito cilíndrico conocidas su circunferencia y su altura. Se encontró con que la hipotenusa de un triángulo rectángulo quedaba determinada por los dos catetos. Sintió placer en proponer problemas o acertijos, cuya solución quedaba determinada a partir de algunos datos iniciales, si bien su encuentro podía exigir cierto ingenio y ser versado en técnicas especiales. Nació con ello la matemática. A veces, los problemas nacían de una necesidad práctica ("hallar el área de cada una de las porciones en que se ha dividido un campo de área dada (1.800), de las cuales se conoce la diferencia de las cosechas (500) y los rendimientos del cereal por unidad de área (2|3 y 1|2)"; problema babilónico del segundo milenio anterior a nuestra era [1]** y así nació la matemática como técnica, ciencia de los

* Profesor de la Facultad de Ciencias Exactas de la Universidad de Buenos Aires, Argentina.

** Los números superiores se refieren a la bibliografía al final de este artículo.

harpedonaptes egipcios y de los agrimensores e ingenieros de hoy. Otras veces los problemas se presentaban como simple curiosidad (trisección del ángulo) o con fines metafísicos o religiosos (duplicación del altar cúbico de Delos) y se requería una precisión absoluta. Quedaba de lado la matemática técnica para dar paso a la matemática como filosofía.

En ambos casos la matemática se caracteriza por utilizar el método deductivo. Se parte de unos datos y hay que llegar, por sucesivas deducciones lógicas, a ciertos resultados; de la hipótesis hay que llegar a la tesis. El instrumento básico es la razón; no hay matemática sin razonamiento y aprender matemática es la mejor manera de aprender a razonar.

Se llega así a las dos cualidades que se han señalado siempre a la matemática, clásica o moderna. Primero, suministra un conjunto de conocimientos útiles para desenvolverse en la vida. Segundo, ejercita la facultad razonadora, agilizando la práctica del método deductivo. Todo programa de enseñanza de la matemática debe contemplar ambos aspectos. Una educación matemática solamente práctica a base de recetas, uso de tablas y aplicación de fórmulas, mecaniza al alumno y puede cortar de raíz toda posible potencia creadora. Pero una educación exclusivamente a base de abstracciones y sutilezas lógicas, puede apartar al alumno de toda realidad e incapacitarlo para enfrentarse con las exigencias de la vida. La proporción en que ambos aspectos deben presentarse es variable según la etapa de la enseñanza, pero en cualquiera de ellas hay que tenerlos en cuenta y además, lo que es muy importante, hay que procurar que estén imbricados de manera que no se presenten como cosas diferentes, sino tan sólo como modalidades de una misma unidad, que es la matemática. Este es un punto difícil, pero que creemos fundamental: hay que desarrollar la capacidad de abstracción y de razonamiento deductivo en la enseñanza de la matemática práctica y, a su vez, mostrar las aplicaciones concretas a los problemas de la vida real y a otras ramas de la ciencia, al enseñar la matemática abstracta.

2. *La matemática moderna*

No es fácil dar una definición exacta de lo que los matemáticos actuales entienden por matemática moderna. No es moderna toda la matemática que se publica en el día de hoy, pues muchos trabajos actuales, algunos de verdadera importancia, siguen siendo de puro corte clásico. Tampoco el modernismo estriba en los temas, pues si bien es cierto que algunos de ellos han aparecido o se han desarrollado en alto grado como producto del espíritu que preside a la matemática moderna, hay muchos temas clásicos que hoy se estudian bajo ángulos modernos. Tal vez la característica más visible de la matemática moderna y que puede servir en muchos casos, aunque no en todos, como criterio clasificador, sea el siguiente: la matemática moderna está basada sobre las estructuras algebraicas y sus métodos y forma de presentación son típicamente algebraicos.

Conviene, para puntualizar más, hacer un poco de historia. En la tercera década del siglo actual empieza la difusión de la llamada álgebra moderna. Trabajos de investigación aislados y dispersos de matemáticos de primera línea, algunos del siglo pasado, son sistematizados y puestos al alcance de los estudiantes universitarios en unos cursos memorables de Emmy Noether en Göttingen (1924-1928) y E. Artin, en Hamburgo (1926), origen de la obra fundamental *Moderna Algebra* de B. L. Van der Waerden (Berlín, 1930), obra básica para todos los estudios universitarios desde la fecha misma de su aparición. Pocos años después (1939) se inicia la publicación de los famosos *Eléments de Mathématiques*, de N. Bourbaki, considerados por muchos como la Biblia de la matemática moderna. A partir de 1940 la publicación de libros al estilo moderno se multiplica; uno de gran influencia por su carácter relativamente elemental fue *A survey of modern algebra*, de G. Birkhoff y S. McLane (New York, 1941).

Las ideas del álgebra moderna invaden rápidamente toda la matemática. Su arma fundamental es el método axiomático, que toma de la geometría y lo adapta a toda construcción matemática. Con ello la matemática se hace más abstracta y más general, de manera que resulta aplicable a una extensión mucho mayor de situaciones. Nacen o se sistematizan las estructuras algebraicas fundamentales: grupo, anillo, cuerpo, espacio vectorial. Se estudian las relaciones dentro de estas estructuras (homomorfismos, isomorfismos, subestructuras, estructuras cociente...) y se observa como por arte de magia que estos conceptos permiten tanto unificar la matemática conocida, bastante dispersa por los grandes descubrimientos del siglo XIX, como obtener métodos poderosos para que ella siga progresando. Puede decirse que toda la matemática se "algebriza", aún las ramas que parecían más apartadas de todo tratamiento algebraico, como la topología o la geometría diferencial.

Modernización de la matemática es una manera vulgar de decir "algebrización" de la misma. En los niveles superiores el triunfo de la tendencia moderna ha sido total. Ha bastado apenas treinta años para que la matemática moderna se impusiera en todas las universidades donde se cultiva la matemática superior, pura o aplicada. Tanto es así, que una vez hecha oficial su enseñanza, el calificativo de "moderna" parece innecesario. Por esto la última edición del libro citado de Van der Waerden (1955) se titula simplemente *Algebra*. Al nivel superior, matemática y matemática moderna han pasado a ser sinónimos. Como ocurre con todas las ideas revolucionarias, la matemática moderna al recibir el *nihil obstat* de los claustros ortodoxos, ha dejado de ser moderna. No es que con ello se haya detenido la matemática, pues el espíritu creador que la sustenta sigue con nuevas modalidades; tras las estructuras de van der Waerden y Bourbaki nacen los esquemas de Grothendieck.

Indiscutida en los niveles superiores, queda el problema de la introducción de la matemática moderna en los niveles elemental y medio. La máxima urgencia está en la enseñanza secundaria, hacia la cual se están dirigiendo los mayores esfuerzos, pero también la primaria puede beneficiarse de su espíritu renovador.

3. *La matemática moderna en la escuela primaria*

En todo programa educativo hay que tener en cuenta dos aspectos: el qué enseñar y el cómo enseñar. El primero debe ser indicado por los matemáticos y el segundo por los pedagogos y psicólogos. Ambos deben trabajar en colaboración, tanto para establecer las posibilidades de cada edad como para lograr un mayor rendimiento y una más cómoda asimilación de los conocimientos.

En la primera enseñanza (de 6 a 12 años de edad) hay prácticamente consenso acerca de lo que debe enseñarse de matemática. A grandes rasgos podríamos indicar el siguiente programa: a) las cuatro operaciones fundamentales con números naturales, quebrados y decimales; b) proporcionalidad y regla de tres simple; c) medida de magnitudes y sistema métrico decimal; d) descripción y clasificación de las figuras planas y cuerpos del espacio más usuales, con la nomenclatura de sus elementos; e) longitudes, áreas y volúmenes. Estos temas, ordenados convenientemente, se deben ir exponiendo en forma graduada y en espiral.

Hay pocos elementos nuevos que la matemática moderna pueda introducir. Sin embargo, hay detalles con los cuales el espíritu de la matemática moderna puede hacerse presente, muchos de ellos coincidentes con recomendaciones de psicólogos eminentes, lo que prueba, desde sus primeras etapas, que la matemática moderna se adapta al pensamiento natural del hombre desde su infancia. Veamos algunos ejemplos.

a) *Introducción a conceptos topológicos.* Los cuerpos y figuras de la naturaleza no son tan perfectos como los que la geometría idealiza. Sin embargo, hay propiedades importantes que no dependen de la forma exacta de la figura, propiedades que se conservan con deformaciones continuas de la misma. Una curva cerrada, cualquiera que sea, divide el plano en dos regiones, el exterior y el interior a la curva. Se puede dibujar redes simples en el plano y observar el número de regiones, aristas y vértices. Por ejemplo, al dibujar el reticulado que resulta al unir tres casas con dos fuentes mediante caminos que no se corten entre sí, se observa que la forma variará de un alumno a otro, pero el número de regiones, aristas y vértices es siempre el mismo. Problemas de este tipo, a base del trazado de redes en el plano, son entretenidos e instructivos. Si en vez de tres casas y dos fuentes, se trata de tres casas y tres fuentes, el problema es imposible.

Un cuerpo que no suele mencionarse en la escuela primaria y que debería ser considerado es el toro. Sea como cuerpo o como superficie, sea curvo o poliedral, aparece con mucha frecuencia en la vida cotidiana: un neumático, un anillo, un aro, una tuerca, son ejemplos de toros topológicos. Sobre su superficie existen curvas cerradas que no encierran ningún dominio.

La forma del mundo exterior y de sus objetos, con la gran variedad de posibilidades, algunas muy poco intuitivas, debe irse conociendo con los ojos y con las manos. Hay que mostrar las curiosidades de las figuras simples. Tomemos, por ejemplo, un rectángulo de papel ABCD de lados AB = CD = 25 cms, BC = DA = 6 cms; dibujemos a ambos lados del mismo la recta EH paralela a los lados AB y CD y equidistante de ellos. Pegando con goma el lado BC con el AD invertido (C con A y B con D) se tiene construída la famosa "banda de Moebius", tan interesante como cualquiera de los clásicos poliedros, incluso por su aspecto decorativo. Se pide luego a los alumnos que corten con una tijera a lo largo de la línea EH, antes dibujada; ¿qué resulta? A pesar de haber cortado a lo largo de una curva cerrada, la banda sigue de una sola pieza. Se repite la operación de cortar a lo largo de la línea media de la nueva banda y sucede que ahora se parte en dos pedazos entrelazados entre sí. Juegos de este tipo, junto con la imprescindible práctica de calcular el área de la banda, la longitud del camino recortado, el precio de la pintura que se necesitaría para pintarla (¡observación de que tiene una sola cara!) van instruyendo a la intuición y ejercitando el cálculo operatorio, posiblemente sin aburrir al alumno.

b) *Teoría de conjuntos.* En toda la matemática de la escuela primaria es bueno ir introduciendo, paulatinamente, la nomenclatura y relaciones fundamentales de la teoría de conjuntos. Ello contribuye a desarrollar el espíritu de análisis, al mismo tiempo que enseña a ordenar y clasificar datos sobre fenómenos o propiedades de las figuras. Veamos algunos ejemplos ilustrativos.

1) En cuanto los alumnos sepan leer números se les enseña a leer el termómetro. Todos los días a la misma hora —la del primer recreo, por ejemplo —se leerá la temperatura y se anotará en una hoja especial. También se anotará a la misma hora si hace sol o no. A fin de mes se enseñará a ordenar los datos obtenidos con gráficos y tablas y se harán problemas del siguiente tipo: a) ¿cuántos días hubo de sol?; b) ¿cuántos días la temperatura estuvo entre 8 y 15 grados?; c) ¿cuántos días hubo sol "o" temperatura superior a 10 grados (unión de conjuntos)?; d) ¿cuántos días hubo de sol "y" temperatura mayor de 10 grados (intersección de conjuntos)? Si en vez de dos datos se anotan diariamente tres o cuatro (si llueve o no, números de alumnos que faltan, etc.) se tienen más conjuntos y caben más variantes en las operaciones de unión e intersección de conjuntos, así como material para gráficos y tablas estadísticas. Conviene observar también la operación de inclusión: los días de lluvia están incluidos en los que no hace sol. Aparece de manera natural el conjunto vacío (no falta ningún alumno, intersección de los días de sol y los de lluvia). Ejercicios parecidos pueden hacerse al anotar para cada alumno su mes de nacimiento o el número de hermanos. Esto permite clasificar a los alumnos en clases; cada elemento individualiza a la clase y dos de ellas no tienen elemento común (clases de equivalencia). No debe desaprovecharse ninguna oportunidad para que el alumno construya tablas y gráficos de datos numéricos.

2) Se enseña siempre la adición y sustracción de números concretos y homogéneos. Se puede sumar manzanas con manzanas, pero no manzanas con peras. Sin embargo, en cierto momento, conviene puntualizar un poco más; conjuntos diferentes pueden ser subconjuntos de un mismo conjunto más grande y en este caso, como elementos del conjunto total, caben las operaciones de suma o resta. Las manzanas y las peras pertenecen al conjunto de las frutas; como tales, tres manzanas más cinco peras son ocho frutas.

c) *Aprender de la naturaleza*. Aunque no es cosa moderna, conviene insistir en la conveniencia de enseñar al alumno, desde los primeros grados, a utilizar la matemática para mejor comprender el mundo que le rodea y, al revés, aprovechar del medio ambiente para adquirir conceptos matemáticos. Es decir, enseñar a ver el mundo con ojos de matemático. Desde Galileo ("el libro de la naturaleza está escrito en lengua matemática, sus caracteres son triángulos, círculos y otras figuras geométricas, sin cuyos medios no se puede humanamente entender una palabra"), dicha necesidad al parecer, es admitida por la mayoría de los educadores y psicólogos (Kenwrick[2], Piaget[3], Lovell[4]) pero también olvidada por un gran porcentaje de maestros. Hay que disponer de una cinta métrica para medir y de una balanza para pesar todo lo que esté a mano, con precisión y dificultad progresiva con el grado. Hay que medir longitudes y áreas de la mesa, del cuaderno, del aula y del patio de la escuela. Hay que comparar estas medidas, hay que hacer torneos a ver quién adivina con mejor aproximación una cierta medida antes de efectuarla, ¿quién adivina los pasos de una punta a la otra del patio de la escuela? y ¿el número de pies?, ¿cuántos centímetros mide mi lápiz, o la tiza, o el pie de tal alumno, o el puntero del maestro? De esta manera las relaciones de mayor a menor, de tamaño, de cambio de unidad, etc., se van afirmando en el alumno. Hay que descubrir figuras geométricas en la clase, en el patio y durante los paseos que se hagan ¿Dónde ha visto el alumno rectas paralelas, rectas perpendiculares, triángulos, paralelogramos, etcétera? Todo esto es antiguo, pero sigue teniendo validez dentro de la más pura ortodoxia moderna.

Aparte de estos detalles generales, la didáctica en cada etapa de la enseñanza puede dejarse en manos del gusto y de la experiencia personal de cada maestro. Con Cuisenaire y Gattegno[5] se ha puesto de moda el uso de regletas de longitudes y colores variables para la enseñanza elemental de la aritmética. También se han usado bolitas, cartones, fichas y muy diversos materiales tangibles derivados de los antiguos ábacos o contadores (Dienes[6]). Cualquier método es bueno cuando es utilizado inteligentemente por el maestro. Pero no hay que olvidar que transcurrida cierta etapa inicial, el niño debe abstraer y operar con números, ya que no ha de poder ir cargado con su bolsa de regletas o cartones cada vez que la calle le obligue a un cálculo aritmético.

4. *La matemática moderna en la escuela secundaria*

La etapa en que la introducción de la matemática moderna es más necesaria, más urgente y también más difícil, es la correspondiente a la segunda enseñanza. Ello es por dos razones fundamentales: a. los alumnos que no van a seguir estudios superiores necesitan una matemática más acorde con la vida de hoy; necesitan conceptos nuevos y puntos de vista actuales respecto a los viejos. Unas nociones de probabilidades y estadística, para mencionar tan sólo un ejemplo evidente, son actualmente imprescindibles para cualquier persona de una cultura media. Pero no solamente nuevas cosas, sino que también las tradicionales deben verse dentro de los esquemas generales de la matemática moderna para que resulten útiles en la gran variedad de disciplinas invadidas por esta nueva matemática; recordemos que muchas de las llamadas ciencias del hombre admiten actualmente tratamiento matemático; b. los alumnos que van a seguir estudios superiores, cualquiera que sea la especialidad, necesitan una educación matemática ágil y abierta a las novedades, en contraste con la rígida y estereotipada matemática de la enseñanza media clásica.

Sin embargo, las dificultades son grandes. La gran extensión de la enseñanza secundaria en alumnos y profesores, el aislamiento y excesivo trabajo de estos últimos, la escasez de apuntes o libros que indiquen claramente lo que se entiende por matemática moderna al nivel medio y la tradición con su inercia contraria a todo cambio, son factores importantes que frenan el necesario golpe de timón.

El problema es universal y por ello ha preocupado por igual a distintas entidades de carácter internacional, a saber: la Unión Internacional de Matemáticos (IMU) a través de su Comisión Permanente de Enseñanza de la Matemática, la Organización Europea para Cooperación Económica y Desarrollo (OECD, primeramente indicada con OEEC), la Organización de los Estados Americanos (OEA), la UNESCO y otros organismos similares. Con su ayuda y en gran parte gracias a la iniciativa e incansable labor del matemático norteamericano Marshall H. Stone, han tenido lugar en distintas partes del mundo sucesivas reuniones para considerar y debatir el problema de la enseñanza de la matemática en la escuela media. He aquí una lista de las principales de estas reuniones, interesante pues a través de las comunicaciones y discusiones que en ellas tuvieron lugar puede conocerse la opinión de muchos matemáticos y educadores con respecto al problema, a la vez que los límites mínimo y máximo de la reforma que se preconiza.

1. *Seminario de Royaumont.* Organizado por la OEEC bajo el título de *New thinking in school mathematics.* Realizado del 23 de noviembre al 4 de diciembre de 1959 en Royaumont, Asnières-sur-Oise, Francia. Se publicaron las comunicaciones y discusiones.

2. *Reunión de Dubrovnik* (Yugoeslavia). Celebrada del 21 de agosto al 19 de septiembre de 1960. Se preparó en ella el informe

titulado *Synopses for modern secondary school mathematics*, publicado por la OEEC (1961).

3. *Seminario de Aarhus.* Organizado por la International Commission for Mathematical Instruction (ICMI) del 30 de mayo al 2 de junio de 1960 y celebrado en Aarhus (Dinamarca). Se dedicó a la enseñanza de la geometría al nivel secundario. Se publicaron (mimeografiadas) las comunicaciones y discusiones.

4. *Segunda conferencia sobre educación matemática en Sud-Asia.* Tuvo lugar en el Tata Institute for Fundamental Research, en Bombay (India) entre el 20 y el 27 de enero de 1960. La primera conferencia se había celebrado en el mismo lugar entre el 22 y el 28 de febrero de 1956. Se publicaron las comunicaciones.

5. *Reunión de Bolonia (Italia)* sobre la enseñanza de la matemática. Celebrada del 4 al 7 de octubre de 1961. Un resumen de las conferencias y comunicaciones se publicó en el *Bollettino della Unione Matemática Italiana,* serie III, año XVII, junio de 1962.

6. *Primera conferencia interamericana sobre educación matemática.* Celebrada en Bogotá (Colombia) del 2 al 9 de diciembre de 1961. Estuvieron presentes delegados prácticamente de todos los países americanos y asistieron también matemáticos europeos especialmente invitados. Las comunicaciones y discusiones se publicaron en el volumen titulado *Educación matemática en las Américas,* editado por Howard F. Fehr, Bureau of Publications, Teachers College, Columbia University, 1962.

En todas estas reuniones hubo general coincidencia respecto a la necesidad de cambiar el contenido de los programas vigentes para la enseñanza de la matemática al nivel secundario. Otro documento importante al respecto es el *Informe Kemeny* que pasamos a resumir.

5. *El Informe Kemeny.* En el Congreso Internacional de Matemáticos de Edimburgo (1958), la Comisión Internacional para la Enseñanza de la Matemática decidió que las subcomisiones nacionales estudiaran el siguiente tema; ¿Cuáles son los tópicos de matemática moderna y de sus aplicaciones que deben incluirse en los programas de la enseñanza secundaria? Las respuestas debían comunicarse a la Comisión para ser discutidas en el próximo congreso internacional.

Contestaron a la encuesta 21 naciones. Las respuestas fueron tenidas en cuenta en un importante informe que el profesor John G. Kemeny presentó al Congreso Internacional de Matemáticos de Estocolmo (1962) actuando como relator del tema. En opinión de la mayoría de los países que contestaron, dichos tópicos son: a) elementos de la teoría de conjuntos; b) introducción a la lógica; c) probabilidades y estadística; d) álgebra moderna. Al mismo tiempo se recomendaba la modernización del lenguaje y de la estructura conceptual de la matemática. Respecto de la intensidad en que estos temas deben ser introducidos veamos, libremente traducidos, algunos párrafos del informe Kemeny:

a) el concepto de conjunto, así como los de unión, intersección y complemento entre conjuntos, es básico para toda la matemática moderna. La mayoría de las naciones opinantes abogaron por una pronta introducción y uso de estas ideas fundamentales;

b) lo mismo puede decirse de la lógica simbólica elemental. Las estructuras isomorfas del álgebra de Boole y del cálculo proposicional pueden estudiarse simultáneamente. La lógica juega un doble papel en la matemática, pues aparte de constituir la base de todos sus razonamientos, es un interesante tema en sí misma. Después de siglos de hacer libre uso de la lógica, sin examinar detenidamente sus fundamentos, los matemáticos han invertido el proceso, haciendo de la lógica una rama de la matemática;

c) las probabilidades y estadística se introducen por su importancia práctica y por el interés que despiertan, más bien que por su utilidad dentro de la estructura de la matemática. La intensidad en que deben darse está sujeta a discusión. Tal vez baste limitarse a los casos discretos o aun finitos, como aplicación interesante de la combinatoria. Puesto que los problemas más familiares al alumno se refieren a un número finito de casos posibles, la formulación de los fundamentos de la probabilidad en tales términos corresponde bien a la experiencia diaria del alumno;

d) respecto del álgebra moderna, dentro de la opinión unánime de ser necesaria su enseñanza, se distingue la tendencia de introducir temas referentes a las estructuras algebraicas (grupos, anillos, cuerpos) de la más polarizada hacia el álgebra lineal. Una y otra tendencia tiene la ventaja de dar una visión más profunda de ciertas estructuras, ya familiares al alumno; el álgebra lineal es la formulación algebraica de ideas geométricas (rectas y planos con sus mutuas relaciones de pertenencia e intersección), mientras que las estructuras algebraicas aparecen como la generalización natural de la experiencia del alumno con los números.

La introducción axiomática de las estructuras del álgebra tiene la saludable ventaja de borrar la falsa idea de que la axiomática es una exclusividad de la geometría; idea expresada en la frase del alumno que observaba: "en geometría se demuestran las cosas; en álgebra, se dice cómo deben hacerse las cosas", o, en otras palabras, "en geometría hay teoremas, en álgebra hay reglas". Esta idea desaparece con la introducción axiomática de las estructuras de grupo o de espacio vectorial.

La estructura de grupo es la más simple y la más útil. Es también muy atractiva por el hecho de ser aplicable tanto a ciertos conjuntos de números, bien conocidos del alumno (los enteros forman grupo respecto de la operación de suma, los racionales excepto el cero forman grupo respecto de la operación producto), como a conjuntos de operaciones geométricas (transformaciones, simetrías que dejan invariante una figura plana). El estudio de los espacios vectoriales es tal vez más complicado, pero es muy útil en geometría y también para comprender mejor las posibles soluciones de los sistemas de ecuaciones lineales;

e) otra disciplina que también se ha indicado para ser introducida en la enseñanza secundaria es la topología naturalmente, en sus nociones más elementales. Francia, por ejemplo, propone dar la noción intuitiva de contorno y aplicarla a los conceptos de convergencia, límites y continuidad. Polonia va más lejos y sugiere que deben darse, sin demostración, el teorema de Jordan sobre curvas cerradas del plano, la clasificación de las superficies poliedrales y algunos ejemplos de superficies no orientables, hasta la discusión del teorema de Euler;

f) como aplicaciones de la matemática moderna se señalan cuatro direcciones: estadística, física, máquinas calculadoras y programación lineal. La parte de máquinas, naturalmente, sólo como información del tipo de problemas que ellas pueden resolver;

g) finalmente, la introducción de nuevos temas plantea la necesidad de suprimir otros que tradicionalmente figuraban en los programas. La opinión general es que debe reducirse el tiempo dedicado a la geometría sintética y sobre todo a la trigonometría, geometría del espacio y a ciertas prácticas de cálculo numérico de poco o ningún uso en la actualidad.

En el informe del profesor Kemeny no se trata el problema de la introducción del cálculo infinitesimal en la escuela secundaria y la extensión del mismo, ya que ello no es propiamente una cuestión de matemática moderna. En la mayoría de las escuelas técnicas de nivel secundario su estudio es ya muy común. Hay países que lo incluyen en todas las especialidades de la enseñanza secundaria; otros en que se reserva para los estudios universitarios. Depende, en gran parte, del número de años asignados a la enseñanza media. Si su duración es de seis años (de 12 a 18 años de edad), creemos que la introducción de unos elementos de cálculo diferencial e integral es indispensable. La preparación moderna recibida con anterioridad puede ayudar mucho a clarificar los fundamentos, pero en líneas generales su exposición y contenido ha variado poco con la modernización de la matemática.

6. *La enseñanza de la geometría*

La geometría, considerada como la matemática por excelencia durante muchos siglos, ha sido en la actualidad desplazada por el álgebra. Los motivos son fácilmente comprensibles. Cuando Euclides, en sus *Elementos*, creyó edificar toda la geometría sobre la base de cinco postulados, se tuvo un modelo de construcción axiomática, no excesivamente complicado, que parecía perfecto. El hecho de poder deducir muchas cosas por sucesivos razonamientos a partir de unos pocos postulados, definiciones y nociones comunes, fue y sigue siendo la característica principal de la matemática. Por otra parte, este método axiomático fue exclusivo de la geometría; la axiomatización de la aritmética o del álgebra empieza tan sólo en la mitad del siglo pasado, con Dedekind y Peano. Por consiguiente, es natural que la geometría, basada en los *Elementos* de Euclides fuese la base de toda educación matemática durante más de veinte siglos.

Sin embargo, al llegar al siglo XIX y nacer las geometrías no euclidianas y con ellas un afán revisionista de todos los fundamentos de la geometría y aún de toda la matemática, apareció la sorpresa de que edificar correctamente la geometría era mucho más difícil de lo que se había creído desde Euclides. La réplica moderna de los *Elementos* fue hecha por David Hilbert en sus *Grundlagen der geometrie* (1899), con la cual quedaba a salvo la consistencia del edificio geométrico, pero a expensas de aumentar mucho el número de postulados y, en consecuencia, de hacer del mismo un gigante de gran valor matemático, pero didácticamente inservible, un "venerable diplodocus" al decir de Dieudonné.[7] En vista de ello, si bien durante la mitad del siglo actual se tuvo en muchos países la idea de poner al alcance de la enseñanza media el sistema de Hilbert, poco a poco se llegó al convencimiento de que se trataba de una idea irrealizable, pues el sistema es demasiado complicado para ser comprendido en esa etapa escolar o, por lo menos, que su comprensión exige un tiempo desmesurado en comparación con el total disponible.

Por otra parte, el método axiomático, cuya enseñanza sigue pareciendo indispensable como base de toda educación matemática, ya no es exclusivo de la geometría. El álgebra moderna presenta numerosos ejemplos de sistemas axiomáticos mucho más simples que el de la geometría, más fácil de comprender en su totalidad y más variados para mejor mostrar las posibilidades de la matemática y, por todo ello, con mayor valor educativo.

¿Qué queda de la geometría? Creemos que su enseñanza al nivel medio debe presentar dos etapas. Una primera etapa de geometría intuitiva en los primeros años (12 ó 13 años de edad), en la cual se enseñe la geometría del mundo físico, como una prolongación más detallada de lo que se aprendió en la escuela primaria, añadiendo observaciones más delicadas y también demostraciones para enseñar la potencia del razonamiento, ejercitar el espíritu crítico y desarrollar la habilidad deductiva. Lo que se suprime en este primer año es el prurito de hacer una geometría axiomática; no se parte de la nada, sino de los conceptos intuitivos que el alumno ya tiene de punto, recta, plano, longitud, área, etc., como abstracción de imágenes visibles o como nociones de uso común. No se insiste demasiado sobre lo que el alumno ya sabe o considera evidente; hay que ayudar y guiar a la intuición, no asustarla de entrada con los peligros que el profesor sabe bien que presenta, pero que si los matemáticos no descubrieron hasta el siglo pasado, difícil es creer que puedan ser comprendidos a los 12 ó 13 años de edad. A partir de estos conocimientos intuitivos hay que demostrar resultados o teoremas no evidentes, con lo cual el alumno apreciará la potencia del método deductivo y entenderá que la matemática no es un juego de palabras vacías o de frases evidentes. Por ejemplo, en esta primera etapa hay que demostrar la fórmula del valor de la suma de los ángulos internos de un polígono convexo y el teorema de Pitágoras, pero no hace falta demostrar que un lado de un polígono es menor que la suma de los demás lados, pues el hecho de que la línea recta es la más corta entre dos puntos debe tomarse a esa edad como evidente.

A partir del área del rectángulo hay que demostrar las fórmulas de las áreas del paralelogramo, triángulo y trapecio, pero sobran las disquisiciones sobre equivalencia de figuras, como ser la proposición "si a figuras iguales se le quitan partes iguales, los resultados son iguales", que ya es evidente para los niños desde los siete años de edad según Piaget-Inhelder-Szeminska[3]; ya sabemos que proposiciones o postulados de este tipo son imprescindibles para fundamentar bien cualquier teoría de la medida; pero, ello debe reservarse para etapas superiores de la enseñanza para alumnos con suficiente preparación para que su necesidad pueda ser comprendida. Se estudiará también en esta primera etapa la semejanza de figuras y con ella el dibujo de mapas y planos a una escala dada. Se hará notar las relaciones de equivalencia más usuales (congruencia, semejanza, paralelismo) y la división de los conjuntos en clases de equivalencia.

Durante este primer año (o año y medio) de geometría intuitiva el alumno debe ir practicando toda la matemática que aprendió en la escuela primaria, para no olvidar en ningún momento la parte operatoria y calculatoria de la misma. Con esto y con la introducción de demostraciones del tipo mencionado el alumno se irá preparando para entrar en la etapa del álgebra, más axiomática y precisa, de los años sucesivos. Debe darse bastante énfasis al estudio de las transformaciones: traslaciones, rotaciones, simetrías, reflexiones, homotecias, congruencias, semejanzas. La representación de traslaciones y su composición conduce a la idea de vector y de sus operaciones. Al estudiar la composición o producto de transformaciones se muestra la amplitud que la palabra "producto" tiene en matemática y se tiene ejemplos de productos no conmutativos (dos rotaciones de distinto centro, dos simetrías de distinto centro, etc.). Se llega de manera natural al concepto de grupo de transformaciones. Al mismo tiempo se ejercita al alumno en buscar simetrías o rotaciones en las figuras que se encuentran a mano y a construir, en tablas, los productos de las transformaciones que dejan invariante un cuadrado, un rectángulo o cualquier figura elemental; estos conjuntos de transformaciones forman siempre grupo.

La geometría intuitiva no puede ser la única que se enseñe en la escuela media. Después de ella y de más o menos dos años de álgebra, por consiguiente más o menos en el cuarto año (15 ó 16 años de edad) hay que volver a la geometría por la vía de la geometría analítica. Aquí, si es que parece conveniente, puede hacerse la entrada de manera axiomática, a través de los espacios vectoriales. De cualquier manera, el tratamiento vectorial es indispensable, lo mismo que una introducción al cálculo de matrices por medio de las transformaciones lineales. La geometría lineal del espacio por medio de vectores es simple, clara y precisa. Una observación importante es que no hace falta dar mucha geometría analítica; basta la parte lineal y el estudio por sus ecuaciones reducidas de las cónicas. En la parte lineal del plano se dará la interpretación de las inecuaciones y algún problema simple de programación lineal. Más que la cantidad, lo importante son las ideas fundamentales de la geometría analítica y el método de las mismas, el famoso método que pretendía Descartes al crearla.

7. *La enseñanza del álgebra*

El programa esbozado de geometría es fácilmente comprensible. Se trata de una poda considerable en la geometría axiomática y en la geometría sintética del espacio, en compensación de lo cual se introduce la geometría analítica y alguna de sus aplicaciones modernas. La trigonometría tambien se reduce a las definiciones de las funciones fundamentales, al uso de tablas con sus valores naturales y aplicaciones a los triángulos rectángulos, todo lo cual se va dando de manera intercalada desde el primer año, tanto en geometría como en álgebra.

Si bien la geometría analítica debe introducirse con su ropaje moderno (vectores, transformaciones lineales, matrices, inecuaciones, programación lineal) ella es familiar a todo profesor educado en la matemática clásica, de manera que su incorporación en los nuevos programas no ofrece mayores dificultades; basta buena voluntad y librarse de todo misoneismo a priori, muy comprensible después de algunos años de rutina. Para el álgebra, en cambio, el problema es mucho más difícil. Hay que incorporar muchas novedades y, sobre todo, modificar su mismo espíritu. La tradición condensada en la frase antes mencionada de que "en geometría hay teoremas y en álgebra hay reglas", se rompe bruscamente. El álgebra se construye sobre axiomas y de ellos, por su sucesivas deducciones, resultan teoremas.

La dificultad principal ha radicado en la carencia de libros que expongan esta nueva álgebra al nivel secundario. La revolución vino desde arriba y aunque los conceptos básicos son simples, fueron sistematizados y pensados para la matemática superior. La adaptación al nivel secundario es cosa reciente y, en los detalles, todavía en estado de elaboración. Por suerte van apareciendo textos que permiten, por lo menos, saber a qué atenerse cuando se habla de álgebra moderna al nivel secundario. Ellos no son uniformes, pero los guía el mismo espíritu y hay que esperar que por sucesivas aproximaciones vayan saliendo los textos que el alumno y el profesor necesitan, adaptados a cada escuela y a cada país. Algunos de estos textos están indicados en la bibliografía al final.[13, 14, 24] Aunque estos libros no responden a una misma línea general, puede decirse que en cierta manera se complementan unos con otros; haciendo el promedio entre los que tan sólo insinúan el camino de la modernización y aquellos más radicales en su ortodoxia modernista, posiblemente se encuentre el justo equilibrio, por lo menos como momentáneo puente de transición. Siendo imposible exponer en un artículo los detalles de lo que se pretende con la nueva álgebra, nos parece que lo mejor es referirnos a la bibliografía indicada, para que el lector tenga no sólo ideas generales, sino un tratamiento detallado.

Especialmente interesantes son los [22, 23] y [24]. El [23] de los Papy está pensado como un ordenado y completo libro de texto, el [22] contiene las directivas y conceptos fundamentales y está escrito por un grupo de los mejores matemáticos contemporáneos. El [24], de Varsavsky, es un detallado compendio de los conceptos básicos, con muchos ejemplos e interesantes observaciones, de todo lo cual cada profesor podrá seleccionar lo que considere más adaptado a su gusto personal y al nivel de la clase. Lo importante es introducir desde los primeros cursos de la escuela secundaria la nueva nomenclatura y las nuevas modalidades expuestas en estos libros, las cuales conducen a poner de manifiesto, bajo muchos aspectos y diferente enfoque, las estructuras fundamentales de la matemática. Hay que acostumbrar al alumno, prosiguiendo con lo ya iniciado en la escuela primaria, a pensar en términos matemáticos y a ordenar en esquemas matemáticos (diagramas, matrices) los fenómenos más usuales de la vida corriente y los razonamientos necesarios para su total comprensión. Hay que mostrar cómo las operaciones de la matemática clásica son resultados especiales de puntos de vista superiores. Todo ello sin olvidar el cálculo efectivo de operaciones concretas y el planteo y solución de muchos problemas de la práctica.

8. *Objeciones y peligros de la matemática moderna en la escuela secundaria.*

Veamos las principales objeciones que se hacen a la introducción de la matemática moderna en la escuela secundaria.

1) Objeciones de quienes no la conocen y rechazan de entrada la idea de que los alumnos puedan aprender cosas que ellos ignoran. Para éstos la única solución es procurar convencerles de que se tomen la molestia de estudiar y ensayar. La experiencia ha probado que en muchos casos estas mismas personas resultan luego las más entusiastas de la matemática moderna. Recomendamos leer.[8]

2) La matemática moderna no es fácil de aprender para quienes ya tienen una formación puramente clásica. De aquí que muchos profesores, extrapolando el esfuerzo propio al caso de los alumnos, consideran que éstos no están capacitados para comprenderla. La experiencia prueba lo contrario. Para los alumnos es mucho más fácil y más interesante la matemática moderna que la clásica. Posiblemente es la polarización hacia esquemas demasiado rígidos de los matemáticos ya formados lo que les dificulta entrar fácilmente en las situaciones de gran generalidad y, al mismo tiempo, de mucha precisión, de la matemática moderna. Para los alumnos esta polarización no existe. La mayor facilidad e interés de los alumnos para la matemática moderna ha sido constatada en muchas experiencias. Ver, por ejemplo, las opiniones en [8], provenientes de colegios norteamericanos. En la Argentina la experiencia se está realizando desde hace dos años en

varias escuelas secundarias con autorización del Ministerio de Educación y los resultados han sido muy satisfactorios.[25]

3) Es frecuente oir la objeción de que la matemática moderna no es útil para las necesidades futuras del alumno medio que no va a seguir estudios especializados. Es fácil desvirtuar esta objeción, tanto por comparación con los programas tradicionales, como por su contenido en absoluto. Si se analizan los programas de matemática de la escuela media clásica se observa que de ella lo que generalmente se entiende como verdaderamente útil para la vida del hombre común es la matemática de la escuela primaria, a saber: las cuatro reglas operatorias con enteros, quebrados y decimales; el sistema métrico decimal o unidades de medida en general; las áreas y volúmenes corrientes y la proporcionalidad o regla de tres con sus aplicaciones a la aritmética comercial. A ello hay que añadir el álgebra de las ecuaciones de primero y segundo grado y de los sistemas de ecuaciones lineales. No hay que añadir, en cambio, las pesadas operaciones de factoreo y cálculo de polinomios complicados, el cálculo de logaritmos con sus diferencias tabulares hasta la sexta cifra decimal, ni las fórmulas trigonométricas complicadas de la resolución de triángulos oblicuángulos, todo lo cual ha pasado a la historia, excepto tal vez para los agrimensores o geodestas que vivan alejados de todo centro de cálculo numérico. El resto de los programas clásicos se ha aceptado siempre por su valor educativo o formativo, pues es difícil imaginar que alguien necesite para sus quehaceres cotidianos el hecho de que la cara de un triedro es menor que la suma de los otros dos, la regla de Ruffini o el teorema de las tres perpendiculares.

La matemática moderna no excluye —al contrario, insiste— en que debe repetirse continuamente como ejemplificación de la teoría, la matemática que hemos mencionado como útil. Agrega, además, otros puntos antes olvidados y que hoy día son imprescindibles, como ser unos elementos de probabilidades y estadística, el manejo de vectores, inecuaciones lineales y problemas de máximos y mínimos. No olvida, ni mucho menos, el cálculo numérico, recomendando la regla de cálculo por su valor conceptual y práctico, cálculo matricial y el uso continuo de representaciones gráfilas. La aritmética comercial figura tanto en los programas modernos como en los clásicos. Resulta, por consiguiente, que los programas que se proponen de matemática moderna para la escuela secundaria contienen todo lo útil de los clásicos y mucho más. Lo que hace es sustituir gran parte de lo que se consideraba como de exclusivo valor formativo por otras cosas también de igual o mayor valor formativo. Es un error creer que el teorema de que las tres alturas de un triángulo concurren en un punto es más "útil" que los diagramas de Venn de la teoría de conjuntos; las dos cosas son de valor formativo y en este plano se puede entrar en discusión, pero nunca bajo el pretexto de que lo primero es útil al hombre de la calle y lo segundo, no. Es evidente que muchas cosas de la matemática moderna no tienen aplicación práctica inmediata, como tampoco la tienen un gran porcentaje de las de la matemática clásica, pero ellas responden en ambos casos al segundo aspecto de la matemática que hemos indicado desde el principio, a la matemática como filosofía, como sistema de pensamiento que agiliza el razonamiento y facilita la comprensión.

4) Nos queda por señalar los peligros de la matemática moderna en la escuela secundaria. Como toda novedad, el peligro principal es que no sea comprendida en su esencia sino en su forma externa, que se confunda el ropaje con el contenido. Es muy peligroso creer y enseñar que usando los símbolos de una A invertida, una E mirando para atrás y los diagramas de Venn a todo trapo, ya se ha modernizado la matemática. Todo esto es conveniente y útil, pero hay que tener sumo cuidado con los nuevos ricos de la matemática moderna. Hay que tener siempre presente, como lema que debería grabarse en todo diploma habilitante para la enseñanza de la matemática en cualquier nivel, que "la matemática no puede ser nunca una manera complicada de enunciar resultados obvios". La diagramación de razonamientos es útil, pero su abuso y sobre todo su uso para llegar a resultados triviales, puede ser nefasto.

El empalme entre la forma y el fondo de la matemática moderna, la determinación de los límites en que el uso del nuevo simbolismo es de verdadera utilidad y la elección, para cada edad y cada tema, de lo que puede aceptarse como evidente y de lo que debe demostrarse, son los puntos difíciles que tiene planteados la didáctica de la matemática moderna en la escuela secundaria. Puntos difíciles que solamente a través de ensayos y contraste de opiniones se irán dilucidando. Puntos difíciles pero de ninguna manera irresolubles y que no deben retrasar la implantación de los nuevos programas, pues todos sus peligros e imperfecciones son insignificantes comparados con el suicidio que supone empeñarse en mantener para la escuela media unos métodos y objetivos anacrónicos, inservibles para el mundo de hoy, presidido por una técnica refinada y una continua y rápida evolución.

BIBLIOGRAFÍA

1 JOSÉ BABINI: *La matemática babilónica, ciencias e investigación*. Buenos Aires, Argentina, 1963. pp 318-322.

2 E. E. KENWRICK: *Number in the nursery and infant school*. London, England, 1957.

3 J. PIAGET, B. INHELDER, A. SZEMINSKA: *The child's conception of geometry*. London, England, 1960.

4 K. LOVELL: *Didáctica de las matemáticas. Sus bases psicológicas*. (Traducción al castellano). Madrid, España, 1962.

5 G. CUISENAIRE, C. GATTEGNO: *Numbers in colour*. London, England, 1954.

6 Z. P. DIENES: *Building up mathematics*. London, England, 1960.

7 J. DIEUDONNÉ: *Pour une révision des programmes de mathématiques*. I et II, Gazette des mathématiciens, 2d. année, nº 4, mai, 1964.

8 CONSEJO NACIONAL DE MAESTROS DE MATEMÁTICA DE LOS EE. UU.: *La revolución en las matemáticas escolares*. (Traducción española). Depar-

tamento de Asuntos Científicos. Unión Panamericana, Secretaría General de la OEA, Washington, D. C., 1963.

9 M. H. STONE: *Reforma en educación matemática.* (Traducción española). Boletín Nº 29, Universidad de Chile, mayo, 1962.

10 M. H. STONE: *The revolution in mathematics.* Liberal Education, vol. 97, 1961, pp. 304-327).

11 LUIS A. SANTALÓ: *Nuevas tendencias en la enseñanza de la geometría.* (Conferencias en el Instituto Superior del Profesorado, Buenos Aires, Argentina, 1962).

12 LUIS A. SANTALÓ: *La enseñanza de las ciencias en la escuela media. (La matemática), Ciencia e Investigación.* Buenos Aires, Argentina, 1963, pp. 245-252.

13 SCHOOL Mathematics Study Group. En inglés: 1. *Euclidean geometry based on ruler and protactor axioms;* 2. *Structure of elementary algebra;* 3. *Geometry;* 4. *Number systems;* 5. *Intuitive geometry;* 6. *Concepts of algebra;* 7. *Concepts of informal geometry.*

——— En español: 1. *Matemática para el primer ciclo secundario* (2 partes); 2. *Matemáticas para la escuela secundaria: primer curso de álgebra* (2 partes); 3. *Geometría* (2 partes).

14 ONTARIO Mathematical Commission, *New mathematics.* (Parts 1 & 2), Toronto, Canada, 1960.

15 UNIVERSITY of Illinois Committee on School Mathematics, *Mathematics for High School Geometry* (parts I and II), University of Illinois, 1960.

16 ———. *High School Mathematics (Unit 6) Geometry,* Illinois, 1960.

17 UNIVERSITY of Maryland, *Mathematics for the Junior High School* (Books I & II), Maryland.

18 LUCIENNE FELIX, *Exposé moderne de mathematiques élémentaires,* Dunod, Paris, France, 1962.

19 ———. *Géométrie, Cours de mathématiques pour l'enseignement des premier et second degrés.* Dunod. París, France, 1962.

20 M. DUMONT, *Étude intuitive des ensembles, Cours de mathématiques pour l'enseignement des premier et second degrés,* Dunod, Paris, France, 1964.

21 H. MERKLEN, *Geometría.* Instituto para la promoción de la enseñanza de la matemática, Lima, Perú, 1963.

22 O. C. S. E., *L'insegnamento matemático,* Armando editore, Roma, Italia, 1963.

23 G. PAPY y F. PAPY, *Mathématique moderne* (I) Didier, Bruseles-París, Francia, 1963.

24 O. VARSAVSKY, *Algebra para escuelas secundarias.* (Tomo I, *Matemática Intuitiva*), Buenos Aires, Argentina, Editorial Universitaria, 1964.

25 A. PIANA y JOSE E. ENCINAS, *Informe de los Inspectores.* (Circular Nº 14 de la Dirección General de Segunda Enseñanza, preparada en base de los cursos de los profesores José Gabba, Ana Houssay, Tomás F. Manrique, Aurora Romero y Lidia Vicente, realizados en Buenos Aires, Argentina), 13 de abril de 1964.

A MATEMÁTICA MODERNA NO CURSO PRIMÁRIO E NO SECUNDÁRIO

SUMÁRIO

A necessidade do estudo da matemática moderna no ensino superior já não é discutida. Tanto nas faculdades de ciências como nas escolas de engenharia, o ensino dos modernos aspectos da matemática é imprescindível para que se possa acompanhar e compreender as novas disciplinas com as quais a matemática se relaciona e nas quais tem aplicação. No curso secundário, pelo contrário, a introdução da matemática moderna encontra mais resistência e vai-se desenvolvendo de modo lento. Entretanto, é uma necessidade que se vai tornando cada dia mais urgente. Tanto para o aluno que vá mais tarde seguir estudos superiores, como para aquêle que faça sòmente o curso secundário — e principalmente para êste último — torna-se imprescindível um estudo da matemática que esteja de acôrdo com o mundo atual, com sua refinada técnica e com seu constante progresso e variabilidade. A matemática necessária em um mundo estabilizado não é a mesma de que se necessita em um mundo em contínua tranformação; nem a matemática útil à técnica ou ao comércio tradicional é a mesma que tem utilidade em um mundo com transístores e televisão funcionando por intermédio de satélites artificiais. Não sòmente são necessários novos capítulos da matemática, mas também se torna mister conhecer os novos aspectos que tornaram possível a sua aplicação com bons resultados, tanto nas sutilezas da nova técnica como em vários problemas das ciências sociais. A nova matemática não é útil apenas à engenharia e à contabilidade. Há outros setores de atividade mais amplos (economia, sociologia, biologia e psicologia) nos quais ela vem sendo aplicada com crescente êxito.

A introdução da matemática moderna no curso secundário é uma preocupação mundial. A maior dificuldade tem sido a falta de compêndios adequados. Essa dificuldade, porém, vai desaparecendo ràpidamente. Em muitos países, têm surgido nos últimos anos livros ou ensaios, publicados por grupos de estudo, os quais têm servido de base para se ir delimitando o conteúdo da matemática moderna no nível secundário. Alguns dêsses livros figuram na bibliografia. Por outro lado, o êxito obtido em diversas experiências demonstra que, além de sua grande utilidade, a matemática moderna é mais fácil e mais adaptada ao raciocínio natural do aluno do que a matemática clássica.

No curso primário, o problema da matemática moderna tem sido menos considerado. Ainda não está completamente claro o que significa matemática moderna no nível primário. No presente artigo mencionamos alguns exemplos possíveis, mas seria necessário considerar o problema de maneira global e chegar a um programa detalhado. É importante assinalar que, quando dizemos matemática moderna. não estamos aludindo a novos métodos de ensino, mas a novos conhecimentos. A maneira por que podem ser adquiridos êsses conhecimentos constitui problema de didática ou de psicologia. Oferece, porém, interêsse secundário do ponto de vista da matemática de que nos ocupamos neste artigo.

MODERN MATHEMATICS IN THE PRIMARY AND SECONDARY SCHOOLS

SUMMARY

Modern mathematics is now unquestioned in higher education. In Schools of Science as well as of Engineering the teaching of modern aspects of mathematics is essential in order to be up-to-date and to understand the new disciplines in which mathematics is being developed and applied. The introduction to modern mathematics in the secondary school, on the other hand, meets greater resistance and is being carried out slowly. It is a need, nevertheless, that is steadily becoming more urgent. Both for the student who will advance to higher studies and for the one who will have only the secondary school education, and especially for the latter, an education in mathematics that is in step with the world of today, with its refined technique and its constant progress and variability, is imperative. The mathematics required to move about in a stabilized world is not the same as that required for a world in continuous transformation, just as the mathematics that is useful in traditional techniques or trade is not the same as that which is useful for a world with transistors and television relayed by means of artificial satellites. Not only is there a need for new chapters of mathematics, but there is a lack of knowledge regarding the new approaches that have made it possible to apply it with good results both in the niceties of the new tecnique and in many problems of the sciences of man. Not only

is the new mathematics useful in engineering and accounting, but there are much wider fields of activity (economics, sociology, biology, psychology), in which it is being applied with increasing success.

The introduction of modern mathematics into the secondary school is a world-wide concern. The main difficulty has been a lack of suitable textbooks, but this difficulty is rapidly disappearing. In recent years there have appeared in many countries books of tests published by study groups by means of which the content of modern mathematics at the secondary level is being restricted; some of these books are shown in the bibliography. On the other hand. the success obtained in the various experiments carried out proves that, in addition to its greater utility, modern mathematics is easier and better adapted to the natural thinking of the child than classical mathematics.

The problem of modern mathematics has received less study in the primary school. It is not entirely clear what modern mathematics at the primary school level means. We indicate some possible examples in this article, but it would be lacking in an over-all consideration and arriving at a detailed program It is important to point out that in speaking of modern mathematics we are not referring to new teaching methods but rather of new knowledge The way in which this knowledge can be acquired is a problem of pedagogy or psychology. but this is of secondary interest from the point of view of the mathematics that concerns us in this article.

LES MATHÉMATIQUES MODERNES À L'ÉCOLE PRIMAIRE ET SECONDAIRE

RÉSUMÉ

Les mathématiques modernes sont maintenant sans conteste dans l'enseignement supérieur. Aussi bien dans les Facultés de Sciences que dans les Écoles de Génie, l'enseignement des aspects modernes des mathématiques est indispensable pour une connaissance à jour et une compréhension assurée des nouvelles disciplines où elles s'utilisent et s'appliquent. A l'école secondaire, par contre, l'introduction des mathématiques modernes rencontre davantage de résistance et se fait d'une manière lente. Cependant, c'est une nécessité de jour en jour plus urgente. A l'élève qui plus tard est appelé à poursuivre les études supérieures, que pour celui qui se contente de l'éducation secondaire, et notamment à ce dernier, il est indispensable de donner un enseignement mathématique qui soit conforme au monde d'aujourd'hui, avec la technique très poussée, son progrès constant et sa variabilité. Les mathématiques nécessaires pour se mouvoir dans un monde stabilisé ne sont pas les mêmes pour un monde en perpétuelle transformation, de même les mathématiques utiles à la technique et au commerce traditionnel ne sont pas les mêmes que celles dont a besoin un monde chargé de transistors, de télévisions et entouré de satellites artificiels. Non seulement il faut de nouveaux chapitres des mathématiques, mais encore ne pas manquer de connaître les champs nouveaux qui en ont rendu possible l'application heureuse, aussi bien dans les méandres des techniques raffinées que dans la solution de nombreux problèmes des sciences humaines.

Les nouvelles mathématiques ne sont pas utiles seulement dans les sciences de l'ingénieur et la comptabilité, elles s'étendent aussi à des domaines très vastes (économie, sociologie, biologie, psychologie) où elles s'appliquent avec un succès croissant.

L'introduction des mathématiques modernes à l'école secondaire est une préoccupation mondiale. La principale difficulté a été la carence de manuels adéquats, mais cette difficulté est en train de s'évanouir rapidement. Dans plusieurs pays ont apparu au cours de ces dernières années des ouvrages, des essais publiés par des groupes d'étude, au moyen desquels on a délimité le contenu des mathématiques modernes au niveau secondaire, quelques-uns de ces

livres sont mentionnés dans la bibliographie. D'autre part, le succès obtenu au cours des diverses expériences réalisées prouve qu'en outre de leur grande utilité, les mathématiques modernes sont plus faciles et plus adaptables à la pensée naturelle de l'enfant que les mathématiques classiques.

A l'école primaire, le problème des mathématiques modernes a été moins étudié. La signification des mathématiques modernes n'est pas encore bien définie à ce niveau. Dans le présent article, nous avons indiqué quelques applications possibles, mais il faudrait examiner le problème dans son ensemble et arriver à un programme détaillé. Il est important de mentionner qu'en disant mathématiques modernes il ne s'agit pas de nouvelles méthodes d'enseignement, mais plutôt de nouvelles connaissances. Le mode d'assimilation de ces connaissances est un problème didactique et psychologique, mais d'intérêt secondaire du point de vue des mathématiques qui nous intéressent dans cet article.