



**CONGRESO PEDAGOGICO**  
Compromiso y Creatividad

# **LA MATEMATICA EN LA EDUCACION**

**LUIS A. SANTALO**

**LUIS A. SANTALO**

**LA MATEMATICA  
EN LA EDUCACION**

  
**EDITORIAL DOCENCIA**

Queda hecho el depósito que marca la Ley 11.723  
Reservados todos los derechos  
Copyright © 1986 By Editorial DOCENCIA ,  
Juan María Gutiérrez 2728, Tel. 802-5764, Buenos Aires  
Printed and published in Argentina

## CONTENIDO

I.	Historia .....	7
II.	Objetivos .....	9
III.	Los ciclos de la educación formal .....	12
IV.	La Matemática en el ciclo elemental obligatorio: ...	13
	1. La solución de problemas.	
	2. Contenidos.	
	3. Pensar determinista y pensar probabilista.	
	4. La computación: el pensar informático.	
	5. La evaluación.	
V.	La Matemática en el ciclo secundario. Olimpiadas matemáticas .....	27
VI.	La Matemática en el ciclo terciario .....	30
VII.	La Matemática en el ciclo cuaternario .....	33
VIII.	Problemas urgentes referentes al papel de la matemática en la educación. ....	34

## I. Historia

La inclusión de la matemática en las distintas etapas de cualquier sistema educativo tiene un noble origen. Platón, en *La República*, recomienda que quienes habrán de desempeñar las funciones más importantes de la ciudad deberán recurrir a una enseñanza a la que, a su vez, "recurren todas las artes, todas las formas de razonar, todas las ciencias, y que es imprescindible aprender entre las primeras: la que enseña a conocer lo que es el uno, el dos y el tres. Me refiero, en suma, a la ciencia de los números y el cálculo; ¿o no es verdad, acaso, que ningún arte y ningún conocimiento pueden prescindir de ella?". "¿No has observado, además, que los que son por naturaleza calculadores tienen gran facilidad para todas o casi todas las enseñanzas y que hasta los espíritus tardos, cuando se han educado y ejercitado en el cálculo, aunque no deriven de él ninguna otra ventaja, sí obtienen, por lo menos, volverse más sutiles que lo que eran antes?". Con análogas palabras, prescribe también la enseñanza de la geometría, cuyo "objeto es el conocimiento de lo que siempre existe y no de lo que nace y muere con el tiempo..."; además "facilita el estudio de las otras ciencias, pues, a este respecto, hay una diferencia absoluta entre el que es versado en geometría y el que no lo es".

Seguramente por el peso de estas recomendaciones, la mate-

mática ha formado parte de la educación en todas las épocas. En la edad media, el llamado *Quadrivium* de disciplinas científicas estaba formado por aritmética, geometría, astronomía y música, completando el *Trivium* de artes literarias, compuesto de gramática, retórica y dialéctica. En las edades moderna y contemporánea, la matemática, separada por la tradición en aritmética y geometría, siguió enseñándose en todos los niveles. La aritmética fue la ciencia del cálculo, con la idea directriz de enseñar a operar con los números. La geometría, en cambio, pretendía ser esencialmente formativa, siguiendo el desarrollo axiomático y deductivo de los *Elementos* de Euclides.

En todos los tiempos, la enseñanza de la matemática ha tenido el doble objetivo de suministrar una herramienta útil para las necesidades prácticas (la matemática como instrumento de cálculo) y de ejercitar y agilizar el pensamiento lógico, con sus cadenas de deducciones que conducen al descubrimiento de nuevas ideas partiendo de otras más primitivas (la matemática como filosofía). En cada período de la historia, ha predominado uno u otro de estos dos aspectos; pero los mejores resultados se han obtenido siempre cuando ambos se han desarrollado armoniosamente, apoyándose el uno en el otro. Una matemática dirigida únicamente a las aplicaciones y a los cálculos necesarios para las mismas termina por estancarse y perder vitalidad. Una matemática dedicada solamente a las especulaciones teóricas, alejada de los problemas de la vida real, se transforma en pura filosofía o en un conjunto de virtuosismos del pensamiento, que se desvanecen por falta del alimento que suministran la naturaleza y sus fenómenos. La educación matemática debe ser un justo balance y un puente fluido entre el mundo de las ideas y el mundo de las acciones.

La frase de que la geometría —y, por extensión, toda la matemática— “tiene por objeto el estudio de lo que siempre existe y no de lo que nace y muere con el tiempo” excluyó del tratamiento matemático todas las ciencias biológicas, incluidas las ciencias del hombre. Esta situación perduró prácticamente hasta el presente siglo, en que de golpe, por su gran crecimiento en extensión y generalidad, la matemática desbordó su cauce tradicional e invadió y sometió al cálculo casi todas las ramas del conocimiento. El pensar matemático, que resultó primero útil a las ciencias naturales, ha pasado a tener importancia en las

ciencias del hombre. Con ello se han enriquecido estas ciencias, pero también la matemática ha resultado favorecida y renovada ante la necesidad de adaptarse a la forma particular de las mismas.

La enseñanza de una ciencia va siempre retrasada respecto de los progresos de la ciencia misma. Se necesita cierto tiempo para que las novedades se incorporen a la enseñanza. Respecto de la matemática, este tiempo, que en otras épocas ha sido de siglos, modernamente es tan solo de algunos años, y hay que procurar reducirlo al mínimo posible. Por esto, la enseñanza de la matemática debe cambiar continuamente, tanto en contenidos como en metodología, y hay que estar alerta para no retrasarse en esos cambios, pues el mundo avanza a gran velocidad, y un retraso en la educación puede significar dejar a toda una generación desconectada del mundo en el que debe vivir.

## II. Objetivos

Como objetivos generales de la educación, se han indicado: a) Proporcionar a cada alumno posibilidades de adquirir habilidad, conocimiento y discernimiento; b) Proporcionar a cada alumno posibilidades para su desarrollo como individuo y como miembro de la sociedad.

Estos objetivos valen para todas las disciplinas y son independientes del lugar y del tiempo. Pero no hay duda de que, dentro de las normas anteriores, los objetivos de la educación deben adaptarse a cada momento histórico y a cada país. Por esto se ha dicho también que la educación es la ciencia mediante la cual cada sociedad inicia a su generación joven en los valores, técnicas y conocimientos que caracterizan su propia civilización y modo de vida, mediante el desarrollo y perfeccionamiento de las facultades intelectuales y morales del niño o del adolescente. Cada civilización, por tanto, tiene su propia educación. Una civilización contemplativa, cuyos principales valores sean los puramente intelectuales, educará esencialmente para una rica vida interior. Una civilización guerrera, ávida de conquistas territoriales o ideológicas, educará principalmente con miras a la guerra. En las ciudades democráticas de la antigua Grecia, en las que todo se decidía por voto mayoritario, la retórica o arte del bien decir desempeñaba un papel esencial en la educación. Para considerar la educación en el mundo de hoy y en la Argentina, debemos a-

nalizar las características esenciales de su modo de vida, el que tiene y el que desearíamos que tuviera.

Las características principales de la civilización actual de las que formamos parte son: a) Dominio preponderante de la ciencia y de la técnica, es decir, vivimos en un mundo científico-tecnológico en el que la influencia de estas actividades se manifiesta en todos los aspectos de los quehaceres diarios; b) Velocidad de cambio, es decir, el mundo y el modo de vida cambian rápidamente con el tiempo; c) Gran desarrollo de los medios de comunicación y de información, lo que hace que el mundo aparezca empequeñecido al influirse mutuamente todas las regiones y todas las ideas.

La educación debe tener en cuenta estas características. Respecto de la primera, la educación debe ser científica y razonada, a la vez que instruir sobre las técnicas más usuales y sobre su empleo adecuado. La escuela no puede diferenciarse de la vida, y si sobre esta influyen grandemente los avances científico-tecnológicos, los mismos deben ser tenidos en cuenta en la escuela, tanto para su análisis como para un mejor provecho en su manejo.

En cuanto a la velocidad de cambio, su influencia en la educación haciendo que esta se torne en gran parte potencial, enseñando a aprender por cuenta propia, pues durante toda su vida, fuera de la escuela, los actuales educandos deberán ir asimilando y haciendo uso de novedades que no les fueron enseñadas. Hay que tender a una educación continua; pero, mientras esta llega, los ciudadanos tendrán que informarse y educarse por sus propios medios, para lo cual la escuela debe suministrar la suficiente inercia.

Respecto al crecimiento continuo de los medios de información y comunicación, que empequeñecen al mundo a la par que agrandan el campo de acción de cada uno de sus habitantes, la escuela debe enseñar a sacar provecho de ellos y a formar hombres con visión universal, sin perder las propias características regionales o nacionales.

Para todos estos aspectos generales de la educación, la responsabilidad de la matemática es grande. La ciencia y la técnica se basan en gran medida sobre la matemática, sin la cual pronto se estancarían o verían disminuidas sus realizaciones. El creciente desarrollo y complicación de la ciencia y de la técnica obliga,

para su comprensión y uso, a un coordinado desarrollo de la matemática que lo sustenta. Cada vez habrá que dar mayor extensión y mayor profundidad a los estudios matemáticos, lo que obligará a una cuidadosa selección de contenidos y a profundas investigaciones metodológicas.

La velocidad de cambio debe también ser tenida en cuenta para la enseñanza de la matemática. Un mundo dinámico, inestable, necesita de una matemática capaz de adaptarse fácilmente a situaciones nuevas y diversificadas. Debe reconocerse la matemática, no como algo eterno y terminado, sino como un tema abierto, en constante desarrollo y evolución.

El crecimiento incesante de los medios de información obliga a adaptar la matemática a la forma más indicada para su eficaz utilización. Hay que educar en el uso de la información, y para ello, el papel de las computadoras es esencial. En todos los casos, la matemática debe ser reconocida como un medio para descubrir y entender el mundo circundante, y al mismo tiempo capaz de efectuar predicciones acerca de la evolución futura de situaciones problemáticas. Es decir, la matemática aparece como un "lenguaje para el conocimiento", como un "instrumento para la interpretación de los fenómenos" y como un "instrumento de previsión". Ella ayuda a que los alumnos vayan adquiriendo una visión del mundo de tipo científico-cuantitativo, que les permitirá comprenderlo mejor y actuar en él con comodidad y soltura.

Se han señalado varias actividades que la matemática debe desarrollar en el alumno, como ser: a) Analizar las diferentes componentes de una situación; b) Reconocer situaciones análogas; c) Elegir la estrategia adecuada a cada situación; d) Tener una actitud crítica; e) Construir deducciones y cadenas de deducciones; f) Construir modelos.

También, con ligeras variaciones, se han enunciado abundantes objetivos particulares de la educación matemática, entre los que figuran como universalmente admitidos: 1) Desarrollar la capacidad de analizar, relacionar, comparar, clasificar, ordenar, sintetizar, evaluar, abstraer, generalizar y crear; 2) Desarrollar el hábito del rigor y precisión, del orden y claridad, de la concisión, de la perseverancia para llegar a la solución de los problemas y de la crítica y discusión de los resultados obtenidos; 3) Adquirir habilidades específicas para medir, calcular,

consultar tablas, dibujar e interpretar gráficos, utilizar e interpretar correctamente los símbolos y terminología matemática; 4) Desarrollar la capacidad para obtener resultados utilizando el método deductivo.

Varios de estos objetivos son permanentes en todos los niveles de la educación; otros son más bien propios de determinados niveles.

#### BIBLIOGRAFIA:

1. *Nuevas tendencias en la Enseñanza de la Matemática*, IV, UNESCO, Edición Castellana. Montevideo, 1979. Artículo de Ubiratán D'Ambrosio, págs. 205-226.
2. *Las aplicaciones en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática*. UNESCO, Montevideo, 1974. Artículo de B. Christiansen, págs. 84-102.
3. Freudenthal, H, *Mathematics as an Educational Task*. Reidel, Dordrecht, Holanda, 1973.

### III. Los ciclos de la educación formal

Distinguiremos cuatro ciclos en la educación general, en cada uno de los cuales la matemática desempeña un papel importante que analizaremos, a saber:

1. *Ciclo elemental obligatorio* (de 6 a 15 años de edad). Hasta ahora, en la Argentina, es más breve y comprende únicamente las edades de 6 a 12 años. Sin embargo, dada la complicación creciente del mundo científico-tecnológico actual, la cantidad de conocimientos necesarios para desempeñarse con cierta comodidad en la vida es muy superior a los que se necesitaban hasta hace pocas décadas, por lo que existe la tendencia universal a prolongar este ciclo en tres años más. Esta prolongación es uno de los puntos fundamentales a considerar en todo proyecto de reforma educativa. Nosotros, aquí, lo consideramos como un hecho ya realizado, por tratarse de una necesidad inevitable.

2. *Ciclo secundario o preparatorio* (de 15 a 18 años de edad, tres años de duración). Esencialmente, se trata de un ciclo preparatorio para los estudios terciarios, pero puede haber muchas variantes con estudios terminales y una salida laboral.

3. *Ciclo terciario* (a partir de los 18 años de edad). Se trata esencialmente del ciclo universitario, destinado a la formación de profesionales. Puede haber también varios tipos de escuelas

profesionales no universitarias, como los actuales Instituto del Profesorado, destinados a la formación de profesores de enseñanza elemental y media.

**4. Ciclo cuaternario.** Dedicado a estudios de post-grado y a la investigación. Tiene lugar en las universidades o en institutos especiales, y su característica esencial es la investigación original, por lo que hacen falta los conocimientos previos que se consideran necesarios, más una fuerte vocación y una especial capacidad para la creatividad y la imaginación. Para nuestro objeto, la investigación puede ser sobre matemática propiamente dicha o sobre la didáctica y metodología de la enseñanza de la matemática en sus distintos niveles.

Para cada uno de estos ciclos o niveles la matemática desempeña un papel importante, que nos proponemos considerar con detalle.

#### **IV. La matemática en el ciclo elemental obligatorio**

Por estar dirigido a todos los ciudadanos y de una manera compulsiva, este ciclo es el que mayor atención debe merecer de las autoridades educativas responsables. Si se obliga a recibir una determinada enseñanza, esta debe ser útil para la vida y estar de acuerdo con las necesidades de los individuos para desenvolverse con comodidad dentro del mundo actual. Hay que seleccionar bien los contenidos y aplicar la didáctica más conveniente para su mejor aprendizaje. De otra manera, la deserción escolar será inevitable.

La enseñanza de la matemática debe ser formativa e informativa. Debe formar la mente de modo que resulte apta para comprender y resolver los problemas de la vida real y, al mismo tiempo, desarrollar las habilidades más convenientes para ello. Debe también informar acerca de la matemática como herramienta o instrumento de cálculo para llegar a la solución cuantitativa de dichos problemas. Hay que aprender, poco a poco, el simbolismo de la matemática y la correcta operatoria con el mismo. La enseñanza de la matemática debe servir para mostrar y desarrollar la potencia del pensamiento lógico, ejercitando el razonamiento deductivo para demostrar proposiciones no evidentes. Hay que aprender a limpiar las situaciones reales de los distractores superfluos, esquematizando la esencia de las

mismas, para poder tratarlas luego con rigor y pulcritud, buscando semejanzas entre situaciones diferentes y tendiendo a la economía del pensamiento.

Vamos a señalar algunas características que debe tener la enseñanza de la matemática en este ciclo elemental obligatorio.

1. *La solución de problemas.* "Hacer matemáticas" es resolver problemas. Claro que para ello hace falta disponer de ciertas herramientas y tener una adecuada preparación intelectual. Ambas cosas deben ser suministradas en la enseñanza, pero sin perder de vista que ellas son tan solo medios para ayudar a resolver futuros problemas, pero no un fin en sí mismas. Hay que aprender a multiplicar, pero no para "saber" multiplicar, sino para saber aplicar la multiplicación cuando se presente el caso en un determinado problema. La técnica de la multiplicación es una cosa secundaria, que deberá hacerse de la manera más cómoda y fácil; por ejemplo, mediante calculadoras. De la misma manera, hay que aprender las nociones elementales de conjuntos y las operaciones entre ellos, pero no como un conocimiento final sino como medio para mejor comprender las ideas matemáticas y mejor poder aplicarlas a la solución de los problemas que se presenten. Por esto no tiene sentido dedicar unas clases del curso al estudio de los conjuntos y luego olvidarse de ellos durante el resto del año.

Hay algunos modelos o problemas-tipo bien definidos que es útil conocer por su uso frecuente. Por ejemplo, resolver sistemas de ecuaciones lineales. Pero de ninguna manera la enseñanza debe reducirse a ellos, pues lo más probable es que en el futuro aparezcan otros tipos de problemas, que respondan a otros modelos que hoy nos son desconocidos y que el alumno, una vez dejada la escuela, tendrá que descubrir por sí solo o buscarlos en otras fuentes de información. Por esto, más que el aprendizaje de modelos, lo que puede reducirse a unos pocos más fundamentales, debe desarrollarse en los alumnos la actitud de investigación. Hay que dejar a los alumnos, individualmente o en grupos, a que desarrollen sus propias estrategias, permitiendo que tengan éxito en algunas soluciones, aunque el camino seguido no sea el más directo; así se sienten alentados e incitados a atacar problemas de dificultad creciente.

No hay que confundir problemas con ejercicios. Los ejerci-

cios sirven para aprender una determinada técnica, y su repetición es necesaria hasta conseguir que el alumno se familiarice con la misma. Pero son operaciones de rutina que poco tienen que ver con la actividad matemática. Los problemas, en cambio, exigen poner en juego todas las habilidades de razonamiento, ordenación y deducción que son típicas del pensar matemático. Por esto, a través de ellos se educan y desarrollan estas habilidades.

Los problemas deben ser atractivos e interesar a los alumnos. Como en las clases generales hay alumnos de muy distintas vocaciones y maneras de ser, conviene buscar problemas variados, adaptados a las distintas tendencias: aplicaciones a la vida real, problemas de ingenio, juegos, aplicaciones deportivas, problemas geométricos vinculados con el arte, etc. El profesor no debe apresurarse en dar la solución, sino que su papel debe ser más bien el de moderador, encauzando las ideas y propuestas de los alumnos y haciendo que ellos mismos descubran si van por buen camino o si han elegido una dirección equivocada. Es también interesante que el alumno se plantee problemas y los lleve a la clase para su consideración. Muchas veces serán problemas mal planteados, con datos insuficientes o sobreabundantes, pero su discusión servirá para aprender a plantear correctamente otros problemas. Lo importante es evitar que las clases de matemática consistan en una sistemática o en una simple descripción de esquemas de pensamiento que el profesor enuncia y el alumno aprende sin discusión. Muchos problemas admiten distintas maneras de solución, y ellas pueden servir para que el profesor vaya investigando las tendencias y maneras de pensar de cada alumno, para ayudar a su desarrollo y encauzarlo por la buena senda, señalando y corrigiendo sus errores.

Todo problema debe ir seguido de una discusión del resultado, para ver cómo se puede generalizar y cómo influyen ciertos cambios en los datos iniciales sobre el resultado final. El espíritu de generalización de situaciones concretas y la idea del control de los resultados partiendo de los datos son aspectos importantes de la educación matemática. Alrededor de cada problema se pueden desarrollar diferentes actividades. Por ejemplo: a) Dado un problema, determinar si tiene suficiente información, o si sobran o faltan datos; b) Planteado un problema, decidir acerca de los datos necesarios para su solución (por ejemplo, dado

un polígono plano, decidir acerca de las medidas que hay que dar para poder calcular el área); c) Dada una situación general, idear problemas vinculados con la misma; d) Dada la solución de un problema, decidir rápidamente si ella es razonable y luego comprobarla exactamente; e) Analizar cómo influyen en el resultado final cada uno de los datos del problema; f) Enunciar posibles generalizaciones del problema.

Naturalmente, al referirnos a la solución de problemas, no nos referimos únicamente a problemas numéricos o problemas en que hay que determinar una o más incógnitas, sino a que las "demostraciones" de propiedades son también problemas que hay que ejercitar, tanto en geometría (que es lo más corriente) como en aritmética.

La importancia de los problemas en la educación matemática ha hecho que, tal vez exagerando la nota, se haya desarrollado una tendencia pedagógica basada en la "resolución de problemas" (*problem solving*), consistente en estructurar toda la enseñanza partiendo de problemas. Es decir, todo nuevo concepto debe aparecer como una necesidad para la solución de un determinado problema, y de esta manera queda motivado su estudio y desarrollo. La idea es interesante, pero su exclusividad tal vez sea posiblemente difícil de llevar a cabo; es preferible un sistema mixto, en que los conceptos matemáticos puedan aparecer, según el caso, como consecuencia de un problema o como un método para resolver futuros problemas, introducidos a manera de ejemplos o de aplicaciones. A veces puede convenir ir de los problemas a la teoría, y otras veces, de la teoría a los problemas.

#### BIBLIOGRAFIA:

Sobre la importancia educativa de la solución de problemas, se pueden ver los clásicos libros siguientes de G. Polya: 1. *How to solve it*, Princeton University Press, 1945; 2. *Mathematical discovery*, New York, Wiley, 1961; 3. *Mathematical and plausible reasoning* (2 volúmenes), Princeton University Press, 1954. Existen traducciones castellanas de todos ellos.

Ver también dos artículos de A. H. Schoenfeld en *La Enseñanza de la Matemática en Debate*, Publicaciones del Ministerio de Educación y Ciencia, Madrid, 1985, y el libro *Problem solving in School Mathematics*, editado por el National Council of teachers of Mathematics, U.S.A., 1980. Ver también los *Proceedings of the IV International Congress of Mathematical Education*, Chap. 9. Birkhäuser, 1983.

2. *Contenidos.* Los contenidos del ciclo de enseñanza obligatoria deben estudiarse con mucho cuidado. Deben, además, revisarse con el tiempo, para irlos adaptando a las necesidades de la vida diaria y a los progresos tecnológicos del mundo actual. Siendo un ciclo terminal para la mayoría de los alumnos, hay que estar seguros de que contiene los contenidos mínimos para un eficaz desempeño en la sociedad en todos aquellos quehaceres que no necesiten una particular especialización. Esto es principalmente importante para los tres últimos años (12 a 15 años de edad), que hemos considerado incluidos en este ciclo. Actualmente, el ciclo básico de la enseñanza secundaria no es terminal, sino más bien introductorio para estudios posteriores y, por lo tanto, puede estar justificada la introducción de ciertos fundamentos y el olvido de otros conocimientos que se darán más adelante. Con el pretexto de darlo mejor, aunque es dudoso que así sea, se repiten actualmente muchos conceptos y operatoria que el alumno ya conoce de los primeros grados de la enseñanza, como ser las operaciones con números naturales y racionales y las definiciones y propiedades básicas de la geometría plana. Pero, si este actual ciclo básico de la enseñanza media se decide que forme una unidad con la escuela elemental, la cosa debe cambiar radicalmente. Los tres años que se añaden deben servir para que el alumno aprenda cosas nuevas, no para repetir en forma complicada lo que ya conoce de manera intuitiva y fácil. El mundo actual es complicado y necesita de muchos conocimientos; no habiendo tiempo para dedicarlo a sutilezas que, con el pretexto de un mayor rigor -inútil a esta edad-, no hacen más que aburrir al alumno deseoso de novedades, pero refractario, con razón, a un *seguido* de cosas evidentes cuya importancia conceptual para una construcción lógica de todo el edificio matemático no alcanza a comprender. Hay que dar demostraciones, pero de hechos no evidentes de antemano, pues la matemática sirve precisamente para descubrir lo no evidente, no para enunciar trivialidades en lenguaje complicado.

Los contenidos actuales de la enseñanza de la matemática entre los 12 y 15 años de edad deben revisarse detenidamente. Gran parte de ellos son obsoletos y pueden suprimirse, con ventaja, para una mayor claridad y limpieza de la enseñanza. En compensación, deben introducirse nuevos tópicos que actual-

mente son indispensables para la mayoría de las actividades futuras del alumno. Los más significativos y urgentes son las Probabilidades y Estadística y la Computación, temas prácticamente olvidados en la enseñanza tradicional, que son indispensables en el día de hoy. Por su importancia conceptual y por su interés como técnica calculatoria, deben introducirse cuanto antes, desde los primeros grados. Los contenidos clásicos de Aritmética, Geometría y Álgebra deben analizarse con cuidado, dejando solamente lo que sea actual y útil para una formación destinada al mundo contemporáneo y añadiendo temas y aplicaciones aparecidas en los últimos años, que ayudan a mantener la escuela en relación fluida y coordinada con la vida real (temas de optimización, decisión, información, grafos y sus aplicaciones).

#### BIBLIOGRAFIA:

1. *Mathematics for the middle grades*. National Council of Teachers of Mathematics, 1962.

2. *Nuevas tendencias en la Enseñanza de la Matemática*, IV. UNESCO. Traducción castellana, Montevideo, 1979. Artículos de F. Colmez y A. Krygowska.

3. L.A.Santaló, *Enseñanza de la matemática en la escuela media*. Editorial Docencia, Buenos Aires, 1961.

3. *Pensar determinista y pensar probabilista*. Los griegos consideraron la matemática como un medio para adquirir conocimiento "de lo que siempre existe y no de lo que nace y muere con el tiempo". Era un conocimiento exacto, del mundo de las ideas o del mundo real, pero siempre bien determinado y expresable con toda exactitud. La Nueva Ciencia de Galileo y Newton inició el camino de aplicar la matemática al estudio de la naturaleza y sus fenómenos. Los siglos XVII, XVIII y XIX fueron un continuo de éxitos en este sentido. Se pudieron predecir y calcular con toda exactitud los fenómenos naturales. La matemática era la ciencia "exacta" por antonomasia, y lo que no podía predecir exactamente quedaba fuera de su campo de acción. Con ello se fue estructurando un pensamiento exclusivamente determinista, como si la ciencia pudiera servir únicamente para estudiar los resultados de causas con efecto único, bien deter-

minado. Las probabilidades y la estadística quedaron excluidas de los estudios matemáticos formales. Las ideas probabilistas y estadísticas se fueron desarrollando como temas laterales de investigación, pero no se incluían en los estudios formales de los centros de enseñanza. Esta situación ha durado casi hasta nuestros días. En los niveles elemental y medio, se ignoró la estadística y la probabilidad hasta hace muy pocas décadas. Ello hizo que toda la población tuviera una formación determinista y le costara comprender e intuir las ideas probabilistas, tan usuales en el mundo de hoy.

Efectivamente, en el mundo actual, el azar interviene continuamente en muchos quehaceres habituales: seguros de todas clases, encuestas de opinión, análisis de mercados, juegos de azar, pronósticos deportivos y meteorológicos... En las continuas decisiones que debe tomar toda persona en cada momento, la idea de probabilidad es fundamental. Si se quiere sacar provecho de la gran cantidad de información disponible para decidir cualquier acción, hay que tener cierta educación estadística. Las bases intuitivas de las teorías de la decisión y de la información deben ir introduciéndose en la escuela. El clásico pensar determinista debe ser compartido con el pensar probabilista.

Por otra parte, eso es posible. Piaget e Inhelder, así como Fischbein y otros, han estudiado la formación de la idea de azar en los niños y han llegado a la conclusión de que, después de los 7-8 años, ya se puede captar esta idea y se puede ir conformando el pensamiento para hacer intuitivas y no irracionales las ideas probabilistas.

Según Piaget e Inhelder (*La Genèse de l'Idée de Hasard chez l'Enfant*, Paris, 1951), hasta los 7-8 años, el niño no distingue lo posible de lo necesario: "Su pensamiento oscila entre lo previsible y lo imprevisible, pero no hay nada para él que sea previsible con seguridad, es decir, deducible por necesidad, ni imprevisible con certeza, es decir, fortuito". Con la aparición de las operaciones lógico-aritméticas, después de los 7-8 años de edad empieza un segundo período que indica el primer desarrollo de la idea de azar: "Por un lado, el descubrimiento de la necesidad deductiva u operatoria permite al niño concebir, por antítesis, el carácter no deducible de las transformaciones fortuitas aisladas, diferenciando así lo necesario de lo simplemente posible". En el tercer

período, después de los 11-12 años, "se realiza la síntesis entre el azar y las operaciones, y éstas permiten estructurar el campo de las dispersiones fortuitas en un sistema de probabilidades, por una especie de asimilación analógica de lo fortuito con la operatoria".

Por su parte, Fischbein (*The intuitive sources of probabilistic thinking in children*, Dodrecht, Holanda, 1975) comprueba que a estas edades, con una adecuada y repetida ejercitación, se pueden llegar a hacer intuitivas las leyes del azar; "incluso en edades inferiores a los 10 años, el niño es capaz de asimilar esquemas probabilistas con la ayuda de una instrucción elemental conveniente". Esto prueba que la falta de intuición probabilista en una gran mayoría de las personas es consecuencia de haber tenido una educación puramente determinista. Ha sido considerado, erróneamente, el azar como irreconciliable con la estructura del pensamiento lógico, y así se lo ha relegado a situaciones externas al tratamiento científico y se lo ha excluido de la educación formal.

Esta situación debe cambiar. Desde los primeros grados hay que familiarizar al alumno con el azar y la manera de tratarlo. No es cuestión de dar cursos o clases especiales de probabilidad y estadística, separados del resto de la enseñanza, sino de que en las clases de matemáticas se eduque el pensar probabilista con ejemplos adecuados. Las operaciones con fracciones y toda la combinatoria se ejemplifican con el cálculo de probabilidades, y con la estadística se motiva la construcción de gráficos a distintas escalas y la extracción de raíces cuadradas. Hay que familiarizar al alumno con el uso de tablas de números al azar, con el uso de muestras y su grado de fiabilidad, con las ideas de frecuencia y probabilidad, con la ley de los grandes números y con los sucesos de muy grande o pequeña probabilidad, mencionando aplicaciones a las otras disciplinas (idioma, geografía, biología, sociología, etc.).

Hay que construir y utilizar en la escuela tablas y gráficos estadísticos, enseñando cómo sacar provecho de la información que ellos suministran. Se pueden tomar muchos ejemplos de la vida diaria, mostrando el interés de sus medidas de centralización y de dispersión. En general, la ejercitación con datos estadísticos exige trabajar con muchos datos, lo que puede hacer los cálculos engorrosos en los cursos tradicionales; pero hay que

tender a que el uso de las calculadoras o computadoras sea habitual, con lo que los cálculos se vuelven fáciles y no estorban para poner de manifiesto las propiedades que se quieren destacar.

Cada profesor debería ir seleccionando un banco de ejemplos sobre estadísticas que pueden interesar a los alumnos, para ir comentándolos a medida que aparezca la oportunidad en la clase. He aquí algunos ejemplos.

*La estadística y la escuela.* Alturas y pesos de los alumnos, números de hermanos y de tíos, longitudes del palmo y del paso, fechas de nacimiento, distancias de la casa a la escuela, calificaciones, deportes, temperaturas.

*La estadística y la ciudad.* Medios de transporte de los alumnos, diarios y revistas de mayor circulación y la distribución de su contenido en noticias, artículos literarios, avisos, gráficos, historietas. Estadísticas demográficas. La guía telefónica como posible tabla de números al azar y como muestra de las letras iniciales de los apellidos. Sondeos de opinión.

*Las estadísticas y el país.* Los habitantes y su distribución en ciudades y provincias. Importaciones y exportaciones. Productos industriales y agropecuarios. Precios y salarios. Consumos de alimentos y energía.

*La estadística y la geografía.* Longitud y caudal de ríos. Altura de montañas. Poblaciones de ciudades y países. Estadísticas meteorológicas. Productividad agrícola y ganadera.

*La estadística y las ciencias naturales.* Especies de animales y plantas más frecuentes. Crecimiento y decrecimiento de poblaciones. Influencia de los abonos en el crecimiento de las plantas. Duración de la vida en distintas especies.

*La estadística y el idioma.* Frecuencia de las distintas letras: aplicación a la criptografía. Frecuencia de las primeras letras de las palabras (número de páginas de cada letra en el diccionario) y de las primeras letras de los apellidos (número de páginas de cada letra en la guía telefónica). Longitudes de las frases en distintos autores. Frecuencia de sustantivos y adjetivos.

*La estadística y la matemática.* Frecuencia de los números primos (hasta 500). Frecuencia de los números naturales que son suma de dos cuadrados. Distintos caminos para ir de un lugar a otro en una ciudad cuadrículada. Camino al azar.

## BIBLIOGRAFIA:

1. *Curso inicial de Estadística en el Bachillerato*. (Grupo Azarquiel), Instituto de Ciencias de la Educación, Universidad Autónoma de Madrid, 1982.

2. *Teaching Statistics and Probability*. National Council of Teachers of Mathematics, 1981.

3. M. Glymann—T. Verga, *Les Probabilités a l'Ecole*. CEDIC, 1973. (existe traducción castellana: editorial Teide, Barcelona).

4. *Proceedings of the IV International Congress on Mathematical Education*. Birkhauser, 1983, Cap. 7.

4. *La Computación: el pensar informativo*. Uno de los objetivos principales de la enseñanza de la matemática en el ciclo elemental ha sido siempre el cálculo. Hay que enseñar a calcular y a usar todos los elementos que sirven para ello. Por esto, actualmente, es imprescindible introducir la computación en la escuela. Las calculadoras de bolsillo son suficientes para los cálculos matemáticos necesarios, pero las minicomputadoras y las computadoras tienen unos fines mucho más extensos que la simple computación. El papel de las computadoras es útil en toda la educación, no solo en las clases de matemáticas. No se trata únicamente de calcular, sino de desarrollar y practicar actividades que son útiles para muchos fines. Por esto las posibilidades de la computación en educación deben merecer la máxima atención. Sus distintas maneras de ser usadas hacen que se apliquen a una gran variedad de situaciones que deben ser estudiadas y analizadas por equipos de matemáticos, pedagogos y psicólogos.

En cuanto a las calculadoras de bolsillo, los profesores no solo deben permitir su uso, sino que deben enseñar a los alumnos cómo usarlas. Con ellas nacen nuevos problemas y nuevas metodologías para tratar los contenidos clásicos. La realización de las operaciones elementales mediante calculadoras tiene la ventaja de la rapidez y de poder usar números de la vida real, no necesariamente elegidos de manera conveniente para obtener resultados redondos. Además, el tiempo destinado antes a los cálculos se puede destinar a fines más educativos. Hay que educar en la construcción de modelos matemáticos (lo que supone un razonamiento deductivo) y en la simulación de situaciones

(lo que ejercita el razonamiento inductivo). Ambas cosas son importantes para entender la esencia de los problemas y para hallar su solución en distintas condiciones de contorno. Con la construcción de modelos, que unifican en un esquema único una variedad de casos aparentemente sin conexión, se aprende a descubrir analogías y a clasificar los problemas reales por su estructura esencial, aparte de la forma que pueden tomar en cada caso particular.

Posiblemente, toda la enseñanza, pero desde luego la enseñanza de la matemática, resultará muy influida por el uso de las calculadoras y computadoras. No solamente hay que adiestrar en su uso en horas extra, fuera de clase, sino que toda la enseñanza de la matemática debe verse según lo que las calculadoras y computadoras son capaces de dar. La posibilidad de tratar problemas que antes no se podían considerar por su extrema complicación o excesiva cantidad de datos e incógnitas abre nuevos horizontes y nuevas perspectivas que influyen sobre la misma manera de pensar. Nace un pensamiento informático, que hace ver el nudo de las cuestiones y enseña a limpiar de accesorios y distractores la forma poco precisa en que suelen presentarse muchas cuestiones de la vida real. Los lenguajes de las computadoras obligan a ajustar los conceptos y a simplificar las ideas; con su ejercitación se pensará en forma más exacta, libre de ambigüedades. La interacción entre el alumno y la máquina, que sólo acepta directivas bien elegidas, es importante para el aprendizaje. Las calculadoras y computadoras ayudan a ver la matemática desde un punto de vista algorítmico, entendiendo por algoritmo un conjunto de reglas que, aplicadas en un cierto orden, conducen a la solución de un problema o de un tipo de problemas. Según A. Engel, "los profesores deben considerar que la actividad principal de la clase debe ser diseñar y analizar algoritmos, pues muchos conceptos pueden ser introducidos constructivamente mediante ellos. Observando la estructura y el comportamiento de un algoritmo (programa), el alumno aprende activamente el concepto que el mismo representa. Los alumnos deben aprender a modificar y a construir programas partiendo de otros más simples. La claridad y la simplicidad en los programas o algoritmos son las características del buen estilo y de la buena matemática."

Se ha discutido mucho si la introducción muy temprana de

la computación en la escuela elemental hará que el alumno no adquiera o pierda las habilidades calculatorias tradicionales. Es posible que así sea; pero ello no debe alarmar, pues el progreso ha consistido siempre en la sustitución de ciertas técnicas o habilidades por otras mejores. Cuando se impuso, en los siglos lindantes con el primer milenio, el sistema de numeración indoarábigo que utilizamos hasta el presente, también se olvidaron muchas técnicas operatorias con base en ábacos, piedritas o accionar de los dedos, luego sustituidas con ventaja por las del nuevo sistema de numeración. Las operaciones que pueden realizarse mentalmente es seguro que se seguirán practicando, por su sencillez y comodidad; pero las que necesitan de lápiz y papel, que en el fondo es un instrumento de cálculo primitivo, se realizarán usando calculadoras o computadoras, instrumentos más perfectos, más rápidos y más seguros.

Según A. Engel, "la idea de suprimir completamente los algoritmos de multiplicación y división a mano en la escuela primaria es, evidentemente, demasiado radical; pero se debe trabajar únicamente con números pequeños: la multiplicación (división) por un multiplicador (divisor) de una o dos cifras puede ser suficiente. La adquisición y conservación de la habilidad para los cálculos a mano requiere una práctica constante, que no será necesaria si las calculadoras están a disposición del alumno. Por tanto, el cálculo a mano está siendo un arte moribundo, que hay que dejar morir pacíficamente". Por otra parte, la sustitución de una herramienta de cálculo por otra no influye sobre las aptitudes matemáticas que más conviene desarrollar, como son el planteo y diagramación de las operaciones necesarias para resolver los problemas. El cálculo es una técnica rutinaria que debe reservarse a las máquinas, más adaptadas y seguras para tal objeto.

Cuando se dispone de una microcomputadora, el lenguaje a utilizar puede variar con el tiempo. Lo importante es que el alumno aprenda a programar y a actuar sobre la máquina, que descubra él mismo los errores que puede cometer y que los corrija por su propia cuenta. Actualmente, para la enseñanza elemental, parece recomendable el lenguaje LOGO de Seymour Paper, que trata de desarrollar la inteligencia construyendo diagramas complicados partiendo de un conjunto simple de instrucciones: el alumno aprende haciendo y pensando en lo que

está haciendo. En los años sucesivos, finales del ciclo elemental, y en el ciclo secundario, hay tendencia a usar el lenguaje BASIC, muy apropiado para el cálculo numérico y la simulación de situaciones.

#### BIBLIOGRAFIA:

1. *Nuevas tendencias en la enseñanza de la Matemática*, IV. UNESCO. Traducción castellana, Montevideo 1979. El artículo de A. Engel, en págs. 287-319.

2. A. Engel, *Elementarmathematik vom algorithmischen Standpunkt*. Klett, Stuttgart, 1977.

3. S.Pepert, *Desafío a la mente: computadoras y educación*. Ediciones Galápagó, Buenos Aires, 1981.

4. H.Reggini, *Alas para la mente: LOGO un lenguaje de computadoras y un estilo de pensar*. Ediciones Galápagó, Buenos Aires, 1982.

5. D.C.Johnson—J.D.Tinsley, *Informatics and mathematics in secondary schools*. North-Holland, 1977.

6. V.P.Hansen—M.J.Zweng, *Computers in Mathematics Education*. National Council of Teachers of Mathematics, 1984.

7. *La computadora de bolsillo como instrumento pedagógico*. Grupo Azarquici y José Colera, Instituto de Ciencias de la Educación, Universidad Autónoma de Madrid, 1983.

5. *La evaluación*. En todos los ciclos de la educación matemática, pero de manera especial en el ciclo primario obligatorio, es fundamental la evaluación de todos los aspectos del proceso de enseñanza-aprendizaje, desde los alumnos y profesores hasta los demás elementos auxiliares del sistema, como son los contenidos, textos y material educativo, proyectos, metodologías y los mismos métodos de evaluación. Además, estas evaluaciones deben ser continuas, para tener en cuenta sus resultados en las sucesivas normas y directivas con que hay que ir ajustando el sistema.

Respecto al alumno, hay que evaluar su comportamiento tanto respecto de los objetivos afectivos como de los cognoscitivos (conocimiento, comprensión y aplicación). Es relativamente fácil evaluar destrezas o conocimientos, pero es más difícil evaluar las aptitudes o habilidades para adquirir estas destrezas o

conocimientos. Muchos métodos clásicos de evaluación sirven para averiguar lo que el alumno sabe, pero son menos eficaces para poner de manifiesto lo que el alumno es capaz de saber. Sin embargo, ello es necesario para dirigir al alumno y lograr que realice al máximo sus posibilidades. Una de las tareas importantes del maestro o profesor es descubrir inteligencias sobresalientes entre sus alumnos, para luego cultivarlas con la mayor atención y cuidado. La mayor riqueza de los países es la inteligencia de sus habitantes, y está en manos de los educadores descubrirla y hacer que no se pierda y pueda desarrollarse con plenitud.

La formación matemática de un alumno, para decidir, por ejemplo, si pasa de grado o si ingresa en una determinada institución, es un conjunto de muchas componentes, que no pueden expresarse con un solo número (calificación), sino que es más bien un vector cuya determinación y comparación con otros es difícil. Por esto, la evaluación del nivel matemático de un alumno no es fácil ni precisa mediante el método tradicional de los exámenes o *test*. Es preferible el análisis de las interacciones del profesor con el alumno durante el curso, o bien realizar entrevistas y mantener conversaciones a través de las cuales se puedan ir considerando todas las componentes de habilidad, rapidez de comprensión, interés, laboriosidad, creatividad, imaginación, perseverancia, etc., para poder predecir, con cierto grado de certeza, las características futuras del alumno y poder influir en su progreso.

La evaluación de un proyecto curricular presenta también dificultades. En general, no basta evaluar los resultados obtenidos con los alumnos de determinada escuela, pues el mismo puede depender de muchos factores, no fácilmente trasladables de una escuela a otra o de un profesor a otro. Hay que analizar todos los parámetros involucrados en el proyecto. De todas maneras, la creación o conservación de escuelas-piloto para experimentar y evaluar contenidos y metodologías es muy impotente. Ellas deberían también redactar guías de clase y elaborar material didáctico, que, una vez ensayado y evaluado, podrá servir para las demás escuelas comunes.

Debido al rápido e incesante progreso científico-técnico del mundo y su influencia sobre la vida diaria, la matemática necesaria en cada nivel de la enseñanza presenta una pendiente que

se acentúa en modo notorio. Hay que ir introduciendo nuevos contenidos y luego trasladándolos cada vez a niveles más bajos. Ello constituye un desafío a la didáctica y a las técnicas educativas y obliga a una evaluación de los distintos ensayos que se realicen. En general, la capacidad de aprendizaje de los alumnos es muy grande; solo hay que estudiar la manera de presentar conceptos, evaluando cada vez la eficacia de estas presentaciones.

Una cuestión importante es la evaluación de los libros de texto. Es bien sabido que las opiniones sobre un libro de texto de los matemáticos universitarios suelen ser muy distintas y, a veces, opuestas a las de los alumnos y docentes de matemáticas de los ciclos primario y secundario. Posiblemente, ambos tengan su parte de razón, pues una cosa es mostrar la matemática para entendidos y conocedores y otra cosa es mostrarla para "aprender" matemática. El aprendizaje se hace muchas veces a saltos y a través de intuiciones no ciento por ciento rigurosas. Por esto conviene hacer evaluar los textos y, en general, todo el material educativo por equipos de matemáticos profesionales y por profesores y maestros, a fin de que se pongan de acuerdo en el justo medio.

#### BIBLIOGRAFIA:

1. *Nuevas tendencias en la Enseñanza de la Matemática*, IV, UNESCO. Traducción castellana, Montevideo, 1979. Artículo de J. Kilpatrick, en págs. 183-203.
2. *Evaluation in Mathematics*. The National Council of Teachers of Mathematics, 1961.
3. K.I.Travers, L.Pikaert, M.N.Suydam, G.E.Runion, *Mathematics Teaching* (Cap. 6). Harper & Row, New York, 1977.

#### V. La matemática en el ciclo secundario

El presente capítulo corresponde a las edades entre 15 y 18 años; o sea, se refiere a los alumnos que terminaron el ciclo elemental obligatorio. Este ciclo secundario es muy variado, y la matemática cambia mucho de una especialidad a otra.

Para los alumnos que después van a seguir estudios terciarios, el ciclo corresponde al tradicional Bachillerato. Convendría dis-

tinguir entre los alumnos que piensan seguir una carrera científica, en que la matemática va a desempeñar un papel importante, y los alumnos que piensan seguir una carrera humanística, en que la matemática tiene un papel secundario, menos evidente. En ambos casos debería haber algunas materias básicas obligatorias y otras materias electivas, para satisfacer las distintas inquietudes de los alumnos. Para los futuros estudiantes de carreras científicas, habría que completar algunos temas clásicos de álgebra, geometría y análisis numérico, con el repaso y complemento de las ideas de probabilidad y estadística dadas en el ciclo elemental y el uso constante de la computación. Caben, como aplicaciones, elementos de las teorías de la decisión y de la información. También se han recomendado cursos sobre la llamadas "matemáticas finitas", que cubren un amplio espectro de temas adecuados para despertar la creatividad y el redescubrimiento en los alumnos. Para los futuros estudiantes de materias humanistas la matemática puede ser poca. Tal vez algunos modelos axiomáticos para desarrollar el pensamiento lógico, sin olvidar las nociones ya aprendidas de probabilidad, estadística y computación.

Para los estudios secundarios que pueden considerarse terminales y con salida laboral (escuelas técnicas y profesionales de nivel medio), la matemática debe ser adaptada a las necesidades de cada carrera.

D.A. Quadling, al analizar la educación matemática en el ciclo superior de la escuela secundaria, distingue cuatro tipos de curso, a saber:

a) *Cursos académicos*, planeados generalmente para satisfacer las necesidades de los alumnos que van a continuar estudios universitarios. Estos cursos tienden a presentar la matemática como una disciplina aislada y enfatizan sus principios teóricos y su coherencia lógica.

b) *Cursos generales*, destinados a alumnos de capacidad media que no tienen en vista ninguna carrera particular. Estos cursos van creciendo en importancia a medida que aumenta el número de alumnos que desean prolongar su educación más allá de la obligatoria. Su objetivo es enfatizar aspectos de la matemática de importancia especial para la vida del ciudadano medio en el mundo moderno.

c) *Cursos técnicos*, destinados a proveer los conocimientos

matemáticos necesarios para determinadas áreas de trabajo. Algunos de estos cursos —por ejemplo, los destinados a ingeniería, industria o comercio— pueden contener bastante matemática, aunque el énfasis está puesto en las aplicaciones a situaciones particulares. Los estudiantes capaces pueden seguir luego estudios superiores en la universidad o institutos tecnológicos.

d) *Cursos profesionales*, seguidos, en general, por alumnos que trabajan en determinados oficios y desean adquirir los conocimientos matemáticos necesarios para los mismos. El contenido matemático de los mismos no suele ser superior al que el alumno ya aprendió en la escuela elemental o secundaria inferior, pero está dirigido hacia un área específica de aplicación.

*Competencias matemáticas: Olimpiadas.* Una manera de estimular el interés por la matemática y, al mismo tiempo, descubrir talentos matemáticos consiste en realizar olimpiadas o competencias matemáticas. Se dividen los alumnos en distintos niveles y para cada uno de ellos se van seleccionando los mejores por sucesivas tandas de problemas. Tienen lugar en muchos países. También en la Argentina se han realizado algunas con pleno éxito, aunque no han tenido continuidad. Suele haber dos o tres niveles, según las edades de los alumnos participantes, y se realizan en varias instancias, primero por ciudades o áreas, luego por provincias y, finalmente, con carácter nacional. Hay también olimpiadas internacionales entre los triunfadores de las nacionales. La preparación de los alumnos para tomar parte en las olimpiadas debe tener lugar fuera de las horas de clase; la participación debe ser voluntaria, pero con ayuda de los profesores o personal capacitado. Durante la preparación, los alumnos trabajan en grupos, pues el intercambio parece ser muy conveniente.

La importancia educativa de las olimpiadas estriba en el estímulo que proporcionan y el interés que despierta la solución de problemas, siempre que hayan sido bien elegidos y bien presentados. A través de los problemas propuestos se puede ir orientando la dirección y el énfasis que se deseen dar a los distintos capítulos de la matemática. A veces se han criticado las olimpiadas por el hecho de que los alumnos no vencedores pueden sentirse deprimidos, considerarse incapaces y perder afición por la matemática. Hay que evitar que esto suceda, preparando a los alumnos para los posibles fracasos, lo que también es pre-

parar para la vida, que no puede ser una sucesión continua de éxitos.

Para que el valor de las olimpiadas sea completo, a los vencedores o a los que llegan a las etapas finales, hay luego que cuidarlos, estimulándolos de alguna manera (becas, concurrencia a cursos, suministro de bibliografía), para que sigan por su cuenta trabajando en matemáticas.

#### BIBLIOGRAFIA:

1. *Nuevas tendencias en la enseñanza de la matemática*. IV. UNESCO. Edición castellana, Montevideo, 1979. Artículo de D.A.Quedling, en págs. 49-70.

2. *Proceedings of the IV International Congress on Mathematical Education*. Birkhauser, 1983, Cap. 11 y 15.

## VI. La matemática en el ciclo terciario

Para los estudios universitarios, hay que dejar que cada facultad decida acerca de los cursos de matemática que estima convenientes para la formación de sus alumnos. Excepto el caso de las Facultades de Ciencias Exactas, en que la matemática es un fin, en las demás facultades la matemática es un instrumento necesario para las profesiones respectivas. Los profesionales deben decidir acerca de la matemática que necesitan. Sin embargo, es recomendable que en el establecimiento de contenidos y en la metodología se busque la colaboración de matemáticos, que son quienes deben estar más al día y conocer las novedades y las maneras de presentarlas a los alumnos. Los profesionales son propensos a la rutina de la matemática que aprendieron cuando eran estudiantes; así quedan ajenos a los progresos posteriores e incesantes de esta ciencia. Es cierto que saben la matemática que aplican, pero también es cierto que muchas veces aplican tan solo la matemática que saben, dejando de aplicar técnicas y métodos más actuales y mejores.

Dentro del nivel terciario, la matemática debe desempeñar un papel importante y merecer la máxima atención en los Institutos del Profesorado, destinados a la formación de los profesores de matemática en los niveles elemental y medio.

Los contenidos de las asignaturas cursadas en estos institutos deben considerarse periódicamente, para irlos adaptando a las necesidades de las escuelas en que los egresados tendrán que ejercer la docencia. Hemos insistido en las Probabilidades y Estadística y en la Computación para la formación de cualquier ciudadano; por consiguiente, el profesor de enseñanza elemental y media debe ser buen conocedor de estas disciplinas y de sus aplicaciones. Naturalmente, no hay que olvidar los temas clásicos de Álgebra, Geometría y Cálculo, pero ellos se pueden reducir y podar de tópicos no actuales, para dar cabida a la matemática necesaria en la vida de hoy. Por otra parte, dichos temas clásicos deben enseñarse teniendo en cuenta las necesidades didácticas del futuro profesor, incluyendo, por ejemplo, detalles históricos y aplicaciones de la matemática a las otras ciencias, para motivar el estudio, interesar al alumno y contribuir a la formación cultural del mismo. Es cierto que la matemática en la educación juega un papel formativo que no hay que olvidar, pero la ejercitación de las cualidades con que ella va conformando la mente puede hacerse con temas nuevos en lugar de los tradicionales, muchos de los cuales han perdido todo interés. Los profesores deben saber cómo ejemplificar las ideas matemáticas con contenidos de actualidad en la vida real o referentes a otras materias del plan de estudios, con temas que motiven al alumno y lo inciten al trabajo matemático.

El futuro profesor debe estar informado de las tendencias actuales y ensayos que se realizan referentes a la enseñanza de la matemática. Puede prescindir del estudio de metodologías históricas, pero no de los esfuerzos actuales que se hacen para poner la enseñanza de acuerdo con las necesidades de hoy. Debe ser educado para observar la clase y deducir consecuencias del comportamiento de los alumnos y de la marcha de su aprendizaje, por lo que debe conocer las investigaciones recientes sobre la psicología y la pedagogía de las matemáticas, así como tomar parte en las discusiones y valoraciones de los proyectos referentes al tema. Por esto, es fundamental que todo centro de formación de profesores esté equipado con una buena biblioteca que esté al día con los textos, revistas y publicaciones especializados en didáctica de la matemática que se editan en los países más avanzados.

El profesor está siempre tentado a llevar al aula los métodos

---

que le fueron útiles en su propio aprendizaje durante sus estudios. Por esto conviene que las características esenciales que se anuncian para la enseñanza en las escuelas elemental y media (despertar de la creatividad, solución de problemas, ver la matemática como una ciencia en construcción, desarrollo de la intuición matemática, sin pérdida de rigor, construcción de modelos y búsqueda de analogías entre ellos) presiden también los cursos de matemáticas de los profesores.

La actualización de los docentes debe ser continua, por lo que conviene que los centros de enseñanza organicen cursos de información y perfeccionamiento para los profesores y maestros en actividad. Dado el gran número de estos, un método que ha resultado eficiente es el de los cursos de actualización organizados a distancia, por correspondencia, con algunas sesiones presenciales para uniformar y evaluar.

En las universidades, la carrera superior de matemáticas es la Licenciatura en Ciencias Matemáticas. En ella se imparten los conocimientos más avanzados de la matemática actual. Los egresados deben ser buenos conocedores de esta matemática y estar, además, entrenados para sus aplicaciones a las distintas ramas de la ciencia y de la técnica. Si la enseñanza elemental y media, dedicada en gran parte a alumnos que no van a ser matemáticos, la matemática debe ser intuitiva e inductiva, para la licenciatura en matemáticas, destinada a alumnos que la han elegido por vocación, hay que extremar el rigor y analizar todos los aspectos de la matemática, como ciencia del cálculo y como filosofía. Sin olvidar la intuición, como faro que ilumina lo desconocido, la enseñanza debe ser esencialmente axiomática y deductiva, desde los fundamentos hasta las más complejas realizaciones. Los alumnos deben familiarizarse con las principales fuentes de información para mantenerse al día y conocer los progresos más recientes que tienen lugar en las distintas naciones. Para ello, es imprescindible que los Departamentos de Matemática de las universidades cuenten con una biblioteca buena y actualizada, sin la cual toda enseñanza se tornará rápidamente obsoleta. Se debe también iniciar a los alumnos en la investigación, con el fin de poder seleccionar a los que tengan vocación y aptitud para pasar al ciclo cuaternario, dedicado esencialmente a realizar la tesis de doctorado y a contribuir al conocimiento matemático con aportes originales.

## BIBLIOGRAFIA:

1. *Nuevas tendencias en la enseñanza de la Matemática*, IV. UNESCO. Traducción castellana, Montevideo, 1979. Artículos de J.H. van Lint (págs. 71-91) y M.Otte (págs. 119-150).

2. *Proceedings of the IV International Congress on Mathematical Education*. Birkhauser, 1983, Cap. 4.

3. *The education of secondary school teachers of mathematics*. Studies in Mathematics Education, vol. 4. UNESCO' París, 1985.

## VII. La matemática en el ciclo cuaternario

El ciclo cuaternario está destinado a la investigación. Todos los países no solo necesitan estar preparados para recibir las novedades ajenas, en el campo científico, sino que también deben contribuir al esfuerzo general de su creación. La enseñanza del nivel cuaternario se imparte en las universidades o en institutos especiales. Consta de cursos de post-grado de contenidos variables, dirigidos siempre hacia la preparación de los alumnos para abordar temas de investigación original, comenzando por la realización de una tesis de doctorado. Los alumnos son por lo general becarios que han elegido la investigación como profesión y habrán de ser los futuros investigadores científicos. La importancia de los países con investigadores propios no está solamente en el prestigio que ganan como nación sino en el hecho de que ellos, por sus conocimientos y su experiencia personal, son los más indicados para aconsejar sobre las necesidades del país en su especialidad, por cuanto se encuentran preparados para comprender y asimilar las novedades alcanzadas en otros países que sea conveniente introducir en el propio.

Los países no solo deben formar investigadores originales, sino que también deben saber conservarlos y utilizarlos como consejeros y asesores acerca de los temas científicos de alto nivel. De otra manera emigran y muchas veces consiguen ocupar en otros países las posiciones de gran responsabilidad en el campo científico que nos les fueron ofrecidas en su país de origen.

El rápido progreso de la tecnología hace que cada día hagan falta mayores conocimientos de matemática para entender y usar con eficacia la complicada tecnología actual. Se necesita desarrollar la investigación en todos los campos de la matemá-

tica actual, tanto pura como aplicada. Ya que cada investigador debe especializarse en un campo reducido de su disciplina, se necesitan muchos centros de investigación y muchos investigadores para que, juntamente, dominen todos los campos. También hay que desarrollar la investigación en la didáctica de la matemática, pues para la eficaz comprensión y uso de la refinada tecnología actual hace falta ir haciendo descender los conocimientos matemáticos a niveles cada vez más bajos de la educación, lo que obliga a una enseñanza eficaz y profunda y constituye al mismo tiempo un desafío a las técnicas educativas. Por esto se han creado en muchos países institutos de investigación de nivel cuaternario, en los que matemáticos, educadores y psicólogos trabajan juntos para estudiar los procesos del aprendizaje y, de acuerdo con ellos, ver la mejor manera de enseñar la matemática que los alumnos de cada nivel necesitan para el mundo de hoy. En estos institutos se elaboran y prueban nuevos métodos pedagógicos, nuevos materiales de enseñanza y nuevas propuestas curriculares. A veces, trabajan también en la redacción de módulos, guías y libros de texto que luego se ensayan y evalúan en clases experimentales. Habría que seguir creando este tipo de institutos y prestando ayuda a los ya existentes.

#### BIBLIOGRAFIA:

1. *Proceedings of the IV International Congress on Mathematical Education*. Birkhauser, 1983, Cap. 13.

### VIII. Problemas urgentes referentes al papel de la matemática en la educación

Como resumen de lo anterior, vamos a indicar algunos problemas a los que es necesario prestar la máxima atención en los próximos años:

1. Sentado que la enseñanza primaria obligatoria se prolonga de los 12 años actuales hasta los 15, hay que decidir acerca de los contenidos de las matemáticas en todo el ciclo. Puede haber unos contenidos mínimos, que conviene precisar y elaborar, junto con su didáctica, y unos contenidos deseables, un poco más extensos, para ciertas escuelas o para ciertos alumnos más capacitados. Ambos contenidos deben evaluarse y ajustarse pe-

riódicamente, con relativa frecuencia, para tener en cuenta las necesidades del alumno al dejar la escuela, pues ellas varían con el tiempo. Como no se sabe con exactitud la matemática que el alumno va a necesitar al dejar la escuela, dada la rapidez de cambio del mundo actual, hay que buscar conceptos básicos y modelos de aplicación que en cierto modo enseñen a aprender, a la vez que inicien al alumno en el manejo por su cuenta de la bibliografía y de toda clase de fuentes de información. Comparando con los contenidos actuales, las novedades principales son, sin duda, la introducción desde el comienzo de las probabilidades y estadística y de la computación, seleccionando las más corrientes aplicaciones de estas disciplinas. Los programas actuales del ciclo básico de la enseñanza media (12 a 15 años) son en gran medida obsoletos y deberían cambiarse radicalmente cuando este ciclo se incorpore a la enseñanza obligatoria y aun antes si esta incorporación se retrasa.

2. La matemática consiste esencialmente en resolver problemas. Hay que mostrar que el método deductivo, el razonamiento lógico, las aptitudes de síntesis y abstracción y la formalización de conceptos tienen interés en cuanto son útiles para resolver problemas no evidentes. Hay que huir de las demostraciones de propiedades intuitivamente evidentes y de los enunciados triviales. Hay que dar al alumno novedades, no repeticiones de cosas sabidas.

Con estas premisas que parecen tan claras, los programas del actual ciclo básico de la enseñanza media pueden fácilmente reducirse a la mitad o a la tercera parte, y así quedaría tiempo para introducir temas que interesarán más al alumno y contribuirán a su mejor formación intelectual. El estudio de estas reducciones y el convencer a los profesores de que la matemática no es un conjunto de definiciones, enunciados y reglas operatorias que hay que memorizar es también una tarea urgente.

3. Hemos dicho que es preciso introducir la computación en todas las clases de matemática, en cualquiera de sus niveles. Pero las computadoras sirven también para ayudar a la enseñanza de la matemática. Se están haciendo muchas experiencias para ver cómo las computadoras pueden usarse con provecho para enseñar matemática. Pueden para ello usarse programas especiales, elaborados de antemano, o hacer que el mismo alumno progra-

me ciertas actividades. Se están usando también para ciertos juegos de ingenio y rapidez mental. Pero esto está todavía en período experimental. Urge evaluar las distintas metodologías para ver si efectivamente la enseñanza ayudada por computadoras es eficiente y hasta qué punto puede sustituir a la enseñanza tradicional o cómo debe coordinarse con ella. Se dice que los juegos o los dibujos con computadoras desarrollan la inteligencia, pero hay que analizar en qué sentido lo hacen y cuáles son las aptitudes que mejor desarrollan. Se debe estudiar la manera más conveniente de usar las calculadoras y computadoras para desarrollar la comprensión matemática.

4. Es un hecho experimental que la mayoría de los alumnos no gusta de la matemática. Hay que estudiar las causas de ello. ¿Es algo intrínseco a la matemática o depende de la manera como se la presenta? Posiblemente, esto último tenga gran parte de responsabilidad. En un mundo científico y tecnológico como el actual, la educación matemática es muy importante, y si los alumnos no se sienten atraídos o, al menos, motivados por su estudio, las consecuencias para ellos y para la sociedad pueden ser graves. Hay que estudiar detenidamente cómo presentar la matemática; tal vez haya que hacerlo en formas distintas, según la manera de ser de cada alumno, para que su enseñanza resulte atractiva. La matemática obliga a pensar, lo que supone cierto esfuerzo; pero también muchos juegos y entretenimientos exigen pensar y, sin embargo, se hacen con gusto, seguramente porque logran interesar al alumno. Hay que estudiar los procesos de aprendizaje y lograr que la adquisición de conocimientos matemáticos se haga con placer e interés. Tal vez las computadoras, que coordinan el pensamiento con las manualidades y que en cierta manera transforman la matemática en una ciencia experimental, puedan ayudar a ello.

5. La educación oficial tiene lugar en las escuelas mediante los cursos formales. Pero el auge de los actuales medios de comunicación masiva hacen que la sociedad en conjunto eduque a sus miembros a través de ellos. La influencia de la radio, televisión, películas, revistas y diarios sobre la formación de las personas es cada día más grande. Conviene estudiar la manera como estos medios educativos externos a la escuela pueden colaborar con ella. Los cursos a distancia, la televisión educativa, el periodismo científico y otros medios son elementos que deben cui-

darse y desarrollarse adecuadamente. No puede ser que la escuela vaya por un lado y los demás medios indirectos de educación, por otro. La escuela debe tener en cuenta que estos medios existen y que su actuación debe coordinarse con los mismos.

6. Dada la rapidez de cambio del mundo actual, se hace cada vez más necesaria la educación permanente, que engloba a la educación de adultos. Tal vez el mejor medio para ello sea la educación a distancia, por radio, televisión o correspondencia, o por varios de estos medios a la vez. Hay que estudiar los programas necesarios y las metodologías más convenientes. No es lo mismo enseñar un tema nuevo a adultos que incluirlo dentro de los contenidos de un curso regular en la escuela. El adulto tiene una experiencia que a veces ayuda a la comprensión, pero, a veces, la falta de ejercicio dificulta la misma. Es preciso estudiar los métodos para la enseñanza de la matemática para adultos y también la diferencia de metodología según que la matemática sea enseñada como una disciplina propia o como tópico integrado en programas más amplios como instrumento para desarrollar otras disciplinas. Preparar y poner en marcha programas variados para educación a distancia y para adultos es otro problema actual que debe merecer la máxima atención.

7. En la actualidad, y cada día más, por su gran generalidad, las ideas matemáticas están en la base de todo conocimiento científico técnico. Es importante poner este hecho de manifiesto, procurando mostrar en la educación general cómo la matemática interviene en casi todas las disciplinas. Esto puede servir como motivación para el estudio y para ejercitar en ejemplos concretos los conocimientos adquiridos. El profesor de matemáticas debe mencionar las aplicaciones a otras ciencias, pero también los profesores de estas otras ciencias deben usar los conocimientos matemáticos de los alumnos, lo cual no es difícil, principalmente a través de la computación. Las posibilidades de las computadoras, sobre todo al actuar como ordenadores, son útiles en todas las ramas del saber. Hay modelos matemáticos en todas las disciplinas. A través de la matemática muchos temas de ciencias biológicas, sociales o económicas y aun de las humanidades se tratan con mayor claridad y precisión no sólo cualitativamente sino también cuantitativamente. Reunir bancos de datos con las distintas aplicaciones actuales de cada capítulo de la matemática es una tarea importante. cuyo

**interés se renueva todos los días por las novedades que tanto en el campo mismo de la matemática como en el de sus aplicaciones aparecen constantemente.**

## COLECCION "CONGRESO PEDAGOGICO"

Coordina: Eugenio Gómez de Mier

1. EL CONGRESO PEDAGOGICO. *Finanzas, temario y etapas*. Comisión Organizadora Nacional.
2. GUIA PARA LA PARTICIPACION EN EL CONGRESO PEDAGOGICO. Equipo Episcopal de Educación Católica.
3. PERSONA, PROYECTO NACIONAL Y SISTEMA EDUCATIVO. Gustavo F.J. Cirigliano.
4. UNA NUEVA POLITICA EDUCATIVA. *Enfoque sociológico*. Juan Carlos Agulla.
5. LA LEY GENERAL DE EDUCACION. *¿Es realmente necesaria?* José Luis Cantini.
6. EL NUEVO REGIMEN PARA LA ESCUELA MEDIA. *Aportes para los docentes*. Eugenio Gómez y Sebastián Pachó García (Coordinadores).
7. LA EDUCACION EN UNA SOCIEDAD PLURALISTA. Rafael Braun.
8. SISTEMA EDUCATIVO Y UNIVERSIDAD. Juan Carlos Agulla, Antonio F. Salonia, Alfredo M. Van Gelderen, Alberto C. Tequini y Marcelo Zapiola.
9. HOMBRE, CULTURA Y EDUCACION. *Comentario a "Educación y Proyecto de Vida"*. Cesáreo Campos.
10. PERSONA Y COMUNIDAD EDUCATIVA. *Comentario a "Educación y Proyecto de Vida"*. Mons. Emilio Bianchi Di Cárcano.
11. EL SISTEMA EDUCATIVO. *Comentario a "Educación y Proyecto de Vida"*. José Luis Cantini.
12. EL CONGRESO PEDAGOGICO. *Encuentros y Documentos*. Comisión Organizadora Nacional.
13. EDUCACION Y ECONOMIA. *Formación profesional y empleo*. Ariel E. Bianchi.
14. CIENCIA, TECNOLOGIA, TRABAJO Y PROYECTO NACIONAL. Gustavo F.J. Cirigliano.
15. EL PERFIL DEL HOMBRE ARGENTINO. Miguel Petty.
16. EL NIVEL CUATERNARIO Y EL SISTEMA EDUCATIVO. Juan Carlos Agulla.
17. ¿EXISTE UN PROYECTO EDUCATIVO CATORICO? Ana María Cambours de Donini.
18. LA MATEMATICA EN LA ESCUELA. Luis A. Santaló.
19. AUTORITARISMO Y PARTICIPACION. Miguel Petty.
20. EDUCACION Y MADUREZ HUMANA. *Comentario a "Educación y Proyecto de Vida"*. Cesáreo Campos.
21. LA EDUCACION A DISTANCIA. Gustavo F.J. Cirigliano.
22. EDUCAR CON EL PUEBLO DESDE SU CULTURA. Septimio Walsh, Bianchi Di Cárcano, Farrell, Imaz, Karlic, Komar, Llech, Monserrat, Risco Fernández.
23. EL SISTEMA EDUCATIVO HOY (Tomo I), Bianchi, Mandrioni, Baragli, Leocata, Santaló, Medina Rubio, Cirigliano, Rodríguez Dieguez, Morales de Spagnolo.
24. EL SISTEMA EDUCATIVO HOY (Tomo II), Zanotti, Floria, Auza, Medina Rubio, Rodríguez Dieguez, Beltrán de Tena, Alliani, Reboiras, De la Orden, Prieto García, Suárez Gueventter, Bertoni, Maffei, Vidal Muñoz.
25. LOS PARTIDOS POLITICOS ANTE EL CONGRESO PEDAGOGICO. *Justicialismo, Radicalismo, D.C., M.I.D., P.I.*
26. EN TORNO AL PROBLEMA DE LA CULTURA ARGENTINA. Bernardo Canal Feijóo.
27. RELACION ENTRE EL SISTEMA POLITICO Y EL SISTEMA EDUCATIVO, Emilio F. Mignone.
28. VALORES DE LA PERSONA Y TECNICAS EDUCATIVAS. (Tomo I). Yela, Gozzer, De la Orden, López Quintás, Prini, Beck, Bianchi, Mandrioni, Seifert.
29. VALORES DE LA PERSONA Y TECNICAS EDUCATIVAS (Tomo II). Ofativia, García Hoz, Quiles, Marín Ibañez, Vázquez Gómez, Storni, Gueventter, Artiles, Martínez Sánchez, Alvarez Turienzo.
30. VALORES DE LA PERSONA Y TECNICAS EDUCATIVAS (Tomo III). Auza, De Finances, Komar, Leocata, Petty, López Quintás, Medina Rubio, Oliveros, Prini, Pro, Sastre de Cabot, Vázquez.
31. LA FORMACION DE LA INTELIGENCIA ARGENTINA. Juan B. Terán.