Sur la mesure des espaces linéaires qui coupent un corps convexe et problèmes qui s'y rattachent

par M. L. A. Santaló (Buenos Aires)

Introduction

Le premier problème de la Géométrie intégrale a été celui d'obtenir les « densités » pour variétés linéaires de l'espace euclidien à n dimensions E_n, c'est-à-dire, généraliser à l'espace n-dimensionnel les densités pour mesurer des ensembles de droites ou de plans de E_3, densités bien connues dans la théorie classique des Probabilités géométriques et qui avaient été données d'une manière systématique par E. Cartan [4]. La condition d'être invariantes par rapport au groupe des déplacements détermine ces densités à un facteur constant près.

Cette généralisation à E_n a été faite par Blaschke [1] et aussi, pour le cas non euclidien par Petkantschin [9] et Müller [8] (voir aussi [11]). Ces densités obtenues, le problème se pose de calculer la mesure de quelques ensembles particuliers; par exemple la mesure des variétés linéaires r-dimensionnelles L_r^n (nous dirons r-espaces) qui coupent un corps convexe donné de E_n. Cette mesure, que nous noterons par H_r^n, est liée à l'intégrale de la courbure moyenne d'ordre $r-1$ de la surface du corps convexe par la formule (3-7).

Les invariants H_r^n donnent lieu à deux sortes de formules intégrales :

a) Soit K^{n-q} la projection du corps convexe K^n sur une variété linéaire L^n_{n-q}. A partir des invariants H_{r-q}^{n-q} de K^{n-q} on peut obtenir H_r^n moyennant les formules équivalentes (2-8), (2-11); c'est-à-dire : H_r^n apparaît comme une sorte de valeur moyenne des H_{r-q}^{n-q} si l'on considère la projection de K^n sur tous les L^n_{n-q} de l'espace ;

b) On peut considérer aussi les corps convexes

$$K^r = K^n \cap L_r^n ,$$

intersection de K^n avec un r-espace L_r^n. A partir des invariants H_q^r de K^r on peut obtenir H_q^n moyennant la formule (5-3); c'est-à-dire, H_q^n apparaît aussi comme une sorte de valeur moyenne des H_q^r si l'on considère toutes les intersections $K^n \cap L_r^n$ (L_r^n variable).

Après la densité pour variétés linéaires, la « densité cinématique », a joué un rôle fondamental dans la Géométrie intégrale, c'est-à-dire, la densité pour mesurer des ensembles de figures congruentes. Dans la deuxième partie de cet exposé nous rappellerons ce qu'on appelle la « formule fondamentale » et nous en ferons, à titre d'exemple, une application à l'obtention d'une limite supérieure pour le nombre de cubes ou de sphères (à n dimensions) suffisantes pour couvrir un domaine de E_n de la connexion de la sphère.

I. PREMIÈRE PARTIE

1. Densités pour variétés linéaires dans E_n

Dans le plan euclidien la densité pour des ensembles de points est égale à l'élément d'aire, c'est-à-dire, à la forme différentielle extérieure

$$dP = dx \wedge dy . \tag{1-1}$$

Pour mesurer des ensembles de droites R, si p est la distance de R à l'origine et φ l'angle de la normale à R avec l'axe x, on a la densité

$$dG = dp \wedge d\varphi . \tag{1-2}$$

Dans l'espace E_3, les densités pour les ensembles de points, plans et droites sont, respectivement,

$$dP = dx \wedge dy \wedge dz , \tag{1-3}$$

$$dE = \sin\theta \, d\theta \wedge d\varphi \wedge dp = dO_2 \wedge dp , \tag{1-4}$$

$$dR = \sin\theta \, d\theta \wedge d\varphi \wedge d\xi \wedge d\eta = dO_2 \wedge d\xi \wedge d\eta , \tag{1-5}$$

où $dO_2 = \sin\theta \, d\theta \wedge d\varphi$ est l'élément d'aire sur la sphère de rayon unité correspondant aux directions θ, φ (directions normales à E dans (1-4) et parallèles à R dans (1-5); p est la distance du plan E à l'origine; ξ, η sont les coordonnées du point d'intersection de la droite R avec un plan normal à R, prises dans un système d'axes rectangulaires dans ce plan. Ces densités, qu'on considère toujours en valeur absolue, sont bien connues et ont été la base de la théorie classique des Probabilités géométriques (voir, par exemple, le livre de Deltheil [6]).

La généralisation à E_n se fait de la manière suivante :

Soit L_r^n un r-espace ou variété linéaire r-dimensionnelle de E_n. Pour $r=0$, la densité est égale à l'élément de volume de l'espace,

$$dL_0^n = dx_1 \wedge dx_2 \wedge \ .. \wedge dx_n \, . \qquad (1\text{-}6)$$

Pour $0 < r \leqslant n-1$, nous allons premièrement déterminer la densité pour r-espaces qui passent par un point fixe O, espaces que nous désignerons par $L^n_{r[O]}$. Soient $e_1, e_2, \ldots, e_n$ n vecteurs orthogonaux de module unité et origine O. Si le repère (O ; e_i) peut tourner autour du point O, les vecteurs e_i seront fonctions des coordonnées curvilignes $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$ des points de la sphère $(n-1)$-dimensionnelle de centre O et rayon unité. Considérons les formes de Pfaff

$$\omega_i^h = -\omega_h^i = e_h \cdot de_i \, . \qquad (1\text{-}7)$$

La densité pour les $L^n_{r[O]}$ déterminés par $e_1, e_2, \ldots, e_r$ est le produit extérieur (toujours considéré en valeur absolue)

$$dL_{r[O]}^n = [\Pi \omega_i^h] \qquad (1\text{-}8)$$

avec

$$i = 1, 2, \ldots, r; \qquad h = r+1, r+2, \ldots, n \, .$$

En considérant les $L^n_{n-r[O]}$ déterminés par $e_{r+1}, e_{r+2}, \ldots, e_n$, on trouve la dualité

$$dL_{r[O]}^n = dL_{n-r[O]}^n \, . \qquad (1\text{-}9)$$

Par exemple, pour $r=1$, la densité pour des droites qui passent par O, s'écrit

$$dL_{1[O]}^n = \omega_1^2 \wedge \omega_1^3 \wedge \ldots \wedge \omega_1^n \qquad (1\text{-}10)$$

où le second membre, eu égard à (1-7), est égal au produit de $n-1$ éléments linéaires orthogonaux de la sphère $(n-1)$-dimensionnelle unité de centre O, c'est-à-dire, est égale à l'élément d'aire de cette sphère, que nous désignerons par dO_{n-1},

$$dL_{1[O]}^n = dO_{n-1} = \omega_1^2 \wedge \omega_1^3 \wedge \ldots \wedge \omega_1^n \, . \qquad (1\text{-}11)$$

D'une façon plus générale, pour la densité des r-espaces $L^n_{r[q]}$ qui contiennent un L_q^n fixe $(q < r \leqslant n-1)$, en supposant L_q^n déterminé par O, $e_1, e_2, \ldots, e_q$ et $L^n_{r[q]}$ par L_q^n plus les vecteurs $e_{q+1}, e_{q+2}, \ldots, e_r$, on a

$$dL_{r[q]}^n = [\Pi \omega_i^h] \qquad (1\text{-}12$$

avec

$$i = q+1, \ldots, r; \qquad h = r+1, \ldots, n \, .$$

Soit maintenant un r-espace L_r^n général. Soit $L^n_{n-r[O]}$ le $(n-r)$-espace orthogonal à L_r^n passant par l'origine O et soit $d\sigma_{n-r}$ l'élément de volume de $L^n_{n-r[O]}$ correspondant au point d'intersection de $L^n_{n-r[O]}$ avec L_r^n. Si $L^n_{r[O]}$ représente le r-espace parallèle à L_r^n par O, la densité pour les ensembles de L_r^n est donnée par

$$dL_r^n = d\sigma_{n-r} \wedge dL_{r[O]}^n. \tag{1-13}$$

On peut voir immédiatement que (1-13) contient (1-2), (1-4), (1-5) comme cas particuliers.

On démontre que ces densités (1-8), (1-12), (1-13) sont invariantes par rapport au groupe des déplacements de E_n, propriété qui les définit à un facteur constant près. Pour la démonstration voir [1], [11].

2. Quelques formules intégrales

Soit O un point fixe de E_n et considérons un r-espace $L^n_{r[O]}$ $(1 < r \leqslant n-1)$ passant par O. Soient $e_1, e_2, \ldots, e_r$ r vecteurs orthogonaux de module unité contenus dans $L^n_{r[O]}$ et considérons l'hyperplan $L^n_{n-1[O]}$ normal à e_1 par O. Si $L^n_{r-1[O]}$ désigne l'intersection de $L^n_{r[O]}$ avec $L^n_{n-1[O]}$, en vertu de (1-8) la densité des $L_{r-1[O]}^{n-1}$ dans $L^n_{n-1[O]}$ est

$$dL_{r-1[O]}^{n-1} = [\Pi \omega_i^h] \tag{2-1}$$

avec

$$i = 2, 3, \ldots, r; \qquad h = r+1, r+2, \ldots, n.$$

De (1-8), (1-11) et (2-1) on déduit

$$dL_{r[O]}^n \wedge \omega_1^2 \wedge \omega_1^3 \wedge \ldots \wedge \omega_1^r = dL_{r-1[O]}^{n-1} \wedge dO_{n-1} \tag{2-2}$$

ce qui s'écrit, en désignant par dO_{r-1} l'élément d'aire sur la sphère unité $(r-1)$-dimensionnelle qui contient les vecteurs $e_1, e_2, \ldots, e_r$,

$$dL_{r[O]}^n \wedge dO_{r-1} = dL_{r-1[O]}^{n-1} \wedge dO_{n-1}. \tag{2-3}$$

En multipliant cette égalité successivement par dO_{r-2}, dO_{r-3}, ... et en appliquant chaque fois la même formule (2-3), on obtient

$$dL_{r[O]}^n \wedge dO_{r-1} \wedge \ldots \wedge dO_{r-q} = dL_{r-q[O]}^{n-q} \wedge dO_{n-1} \wedge \ldots \wedge dO_{n-q}. \tag{2-4}$$

Pour $q = r-1$, en tenant compte de (1-11), on a

$$dL_{r[O]}^n \wedge dO_{r-1} \wedge \ldots \wedge dO_1 = dO_{n-1} \wedge \ldots \wedge dO_{n-r}. \tag{2-5}$$

En intégrant cette égalité sur toutes les demi-sphères

O_{n-1}, O_{n-2}, ..., O_1 (ce qui équivaut à considérer les $L^n_{r[0]}$ non orientés), on trouve que *la mesure totale des* r*-espaces qui passent par un point fixe* O, a la valeur

$$\int dL^n_{r[0]} = \frac{O_{n-1}O_{n-2}\dots O_{n-r}}{2\,O_{r-1}O_{r-2}\dots O_1}\,, \qquad (2\text{-}6)$$

où O_i représente l'aire de la sphère i-dimensionnelle

$$O_i = \frac{2\,\pi^{\frac{i+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{i+1}{2}\right)}\,. \qquad (2\text{-}7)$$

La formule (2-4) peut servir pour obtenir certaines relations entre la mesure H_r^n des L_r^n qui coupent un corps convexe donné K^n et les mesures analogues pour les corps convexes K^{n-q}, qu'on obtient par projection orthogonale de K^n sur les $(n-q)$-espaces qui passent par O.

Soit K^{n-1} la projection de K^n sur l'hyperplan L^n_{n-1} orthogonal à e_1 (vecteur dont la direction correspond à l'élément d'aire dO_{n-1}); K^{n-2} la projection de K^{n-1} sur le L_{n-2}^{n-1} de L^n_{n-1} orthogonal à e_2 (vecteur dont la direction correspond à l'élément dO_{n-2}), c'est-à-dire, la projection de K^n sur le L^n_{n-2} orthogonal à e_1 et e_2; ..., K^{n-q} la projection de K^n sur l'espace L^n_{n-q} orthogonal à e_1, e_2, ..., e_q. Si σ_{n-q} représente le volume $(n-q)$-dimensionnel de K^{n-q}, en multipliant (2-4) par σ_{n-q} et en tenant compte de (1-13) on obtient

$$H_r^n = (O_{r-1}\,\dots\,O_{r-q})^{-1}\int H_{r-q}^{n-q}\,dO_{n-1}\wedge\dots\wedge dO_{n-q} \qquad (2\text{-}8)$$

où H_{r-q}^{n-q} représente la mesure des L_{r-q}^{n-q} contenus dans l'espace linéaire orthogonal à e_1, e_2, ..., e_q qui coupent la projection K^{n-q} de K^n sur le même espace. L'intégrale est étendue à toutes les sphères de rayon unité O_{n-1}, ..., O_{n-q}.

La formule (2-8) est valable pour $1 < r \leqslant n-1$, $0 < q \leqslant r-1$. Pour $q = r$, en appliquant directement (2-5), on a

$$H_r^n = (2\,O_{r-1}\dots O_1)^{-1}\int \sigma_{n-r}\,dO_{n-1}\wedge\dots\wedge dO_{n-r} \qquad (2\text{-}9)$$

où l'intégrale est étendue à toutes les sphères O_{n-1}, ..., O_{n-r}.

En vue de ce que nous considérons les L_r^n non orientés, l'intégration de (2-5) devrait être étendue aux demi-sphères O_{n-1}, ..., O_{n-r}; néanmoins, il est commode de considérer les sphères complètes, ce qui donne lieu au facteur 2 dans le dénominateur de (2-9).

Le cas $r=1$, qui reste exclu de (2-8) et (2-9), se trouve directement de (1-11) et (1-13)

$$H_1^n = \frac{1}{2} \int \sigma_{n-1} dO_{n-1} \tag{2-10}$$

où l'intégrale est étendue à toute la sphère O_{n-1}.

La formule (2-8), en tenant compte de (2-4), et en faisant l'intégration de dO_{r-1}, dO_{r-2}, ..., dO_1 en maintenant fixe $L^n_{r[0]}$, peut s'écrire

$$H_r^n = \frac{O_{q-1} \dots O_1}{O_{r-1} \dots O_{r-q}} \int H_{r-q}^{n-q} dL^n_{q[0]} \tag{2-11}$$

où l'intégrale est étendue à tous les $L^n_{q[0]}$ et H_{r-q}^{n-q}, désigne la mesure des $(r-q)$-espaces contenus dans l'espace L^n_{n-q} orthogonal à $L^n_{q[0]}$ qui coupent la projection de K^n sur L^n_{n-q}.

3. Les invariants H_r^n et les courbures moyennes d'un corps convexe

Nous allons comparer les mesures H_r^n des ensembles des r-espaces L_r^n qui coupent un corps convexe K^n avec d'autres invariants de K^n déjà considérés dans la littérature.

Bonnesen et Fenchel [3, p. 49] utilisent les travers extérieurs (*Quermassintegrale*) W_r^n : une sorte de valeurs moyennes des volumes des projections de K^n sur les espaces L^n_{n-r}. Pour ces W_r^n, en appliquant successivement la formule suivante de Kubota [3, p. 49],

$$W_r^n = \frac{n-1}{nO_{n-2}} \int_{O_{n-1}} W_{r-1}^{n-1} dO_{n-1} \tag{3-1}$$

on obtient

$$W_r^n = \frac{n-q}{nO_{n-2} \dots O_{n-q-1}} \int W_{r-q}^{n-q} dO_{n-1} \wedge \dots \wedge dO_{n-q} \tag{3-2}$$

et, pour $q=r$,

$$W_r^n = \frac{n-r}{nO_{n-2} \dots O_{n-r-1}} \int \sigma_{n-r} dO_{n-1} \wedge \dots \wedge dO_{n-r} \tag{3-3}$$

où les intégrales sont étendues aux sphères O_{n-1}, ..., O_{n-q}.

La comparaison de (3-3) avec (2-9) donne

$$H_r^n = \frac{nO_{n-2} \dots O_{n-r-1}}{2(n-r) O_{r-1} \dots O_1} W_r^n . \tag{3-4}$$

Si l'hypersurface qui limite K^n a des courbures principales finies on peut considérer les intégrales de la courbure moyenne d'ordre r ($r=0, 1, 2, \ldots, n-1$) de K^n, définies par

$$M_r^n = \frac{1}{\binom{n-1}{r}} \int S_r \, d\sigma \tag{3-5}$$

où S_r est la r^{me} fonction symétrique élémentaire des $n-1$ courbures principales et $d\sigma$ désigne l'élément d'aire de l'hypersurface de K^n ; l'intégrale étant étendue à cette hypersurface.

Les W_r^n et M_r^n sont liés par la relation [3, p. 63],

$$M_{r-1}^n = n W_r^n . \tag{3-6}$$

On a donc

$$H_r^n = \frac{O_{n-2} \ldots O_{n-r-1}}{2(n-r) O_{r-1} \ldots O_1} M_{r-1}^n . \tag{3-7}$$

Par exemple, moyennant les M_r^n, la formule (2-11) s'écrit

$$M_r^n = \frac{O_{q-1} \ldots O_1}{O_{n-2} \ldots O_{n-q-1}} \int M_{r-q}^{n-q} \, dL_{q[0]}^n \tag{3-8}$$

où M_{r-q}^{n-q} désigne l'intégrale de la courbure moyenne d'ordre $r-q$ de la surface du corps K^{n-q}, projection de K^n sur l'espace de dimension $n-q$ orthogonal à $L^n_{q[0]}$. L'intégrale est étendue à tous les $L^n_{q[0]}$.

Pour $q=1$, (3-8) s'écrit

$$M_r^n = \frac{1}{O_{n-2}} \int_{O_{n-1}} M_{r-1}^{n-1} \, dO_{n-1} \tag{3-9}$$

qui équivaut à la formule de Kubota [3, p. 49].

4. Cas particuliers

Considérons les cas $n=2, 3$.

a) $n=2$. Soit K^2 une figure convexe du plan. Si le contour de K^2 a une courbure finie en tout point, on déduit de (3-5) $M_0^2 = u =$ longueur de K^2 ; $M_1^2 = 2\pi$. La formule (3-7) nous donne alors $H_1^2 =$ mesure des droites qui coupent $K^2 =$ longueur, résultat bien connu.

b) $n=3$. Soit K^3 un corps convexe de E_3. En supposant que la surface de K^3 a des courbures principales finies en tout point, on a $M_0^3 = F =$ aire, $M_1^3 = M =$ intégrale de la courbure moyenne ; $M_2^3 = 4\pi$. (3-7) donne

$$H_1^3 = \frac{\pi}{2} F , \qquad H_2^3 = M . \tag{4-1}$$

Soit K^2 la projection de K^3 sur le plan orthogonal à la direction définie par l'élément d'aire dO_2 et soient σ l'aire et u la longueur de K^2. Les formules (2-9) et (3-9) nous donnent

$$\int_{O_2} \sigma dO_2 = \pi F , \qquad \int_{O_2} u dO_2 = 2\pi M , \tag{4-2}$$

formules bien connues [3, p. 67].

5. Autres formules intégrales

Nous avons déjà obtenu la mesure totale (2-6) des $L^n_{r[0]}$. Pour obtenir la mesure totale des $L^n_{r[q]}$ qui passent par un L_q^n fixe ($q < r$), il suffit de couper L_q^n par un L^n_{n-q} orthogonal ; si O est le point d'intersection, chaque $L^n_{r[q]}$ est déterminé par l'espace $L^n_{r[q]} \cap L^n_{n-q[0]}$ et par conséquent la mesure de tous les r-espaces qui contiennent l'espace fixe L_q^n est égal à la mesure de tous les $(r-q)$-espaces contenus en L^n_{n-q} et qui passent par O. La même formule (2-6) nous donne donc

$$\int_{\text{Total}} dL_{r[q]}^n = \frac{O_{n-q-1} \ldots O_{n-r}}{2\, O_{r-q-1} \ldots O_1} . \tag{5-1}$$

Soit L_q^n un espace linéaire contenu en L_r^n ($q < r$). A partir de (1-12) et (1-13) on obtient facilement la relation

$$dL_r^n \wedge dL^r_q = dL^n_q \wedge dL_{r[q]}^n . \tag{5-2}$$

Soit K^n un corps convexe de E_n et évaluons l'intégrale de (5-2) étendue à tous les L_q^n qui coupent K^n et à tous les L_r^n qui contiennent L_q^n. Dans le premier membre, l'intégrale de dL_q^r nous donne la mesure $H_q^r(K^n \cap L_r^n)$ des $L_q^r \subset L_r^n$ qui coupent l'intersection $K^n \cap L_r^n$. Dans le second membre, l'intégrale de $dL^n_{r[q]}$ a la valeur (5-1) et l'intégrale de dL_q^n est la mesure H_q^n des L_q^n qui coupent K^n. Nous avons donc la formule

$$\int H_q^r(K^n \cap L_r^n)\, dL_r^n = \frac{O_{n-q-1} \ldots O_{n-r}}{2\, O_{r-q-1} \ldots O_1} H_q^n \tag{5-3}$$

où l'intégrale est étendue à tous les L_r^n qui coupent K^n.

Avec les invariants M_q^n la formule (5-3) s'écrit

$$\int M_q^r(K^n \cap L_r^n)\, dL_r^n = \frac{O_{n-2} O_{n-3} \ldots O_{n-r}}{2\, O_1 O_2 \ldots O_{r-2}} \frac{O_{n-q}}{O_{r-q}} M_q^n . \tag{5-4}$$

Par exemple, pour $n=3$, $r=2$, $q=0$, nous avons : $M_0^2 = u =$ longueur de la courbe intersection du plan L_2^3 avec K^3 ; $M_0^3 = F =$ aire de K^3. La formule (5-4) donne le résultat connu

$$\int u dL_2^3 = \frac{\pi^2}{2} F . \tag{5-5}$$

6. Généralisation à E_n d'une inégalité de Minkowski

Soit K^n un corps convexe de E_n. Soient K^{n-1} la projection de K^n sur un espace L^n_{n-1} orthogonal à la direction déterminée par dO_{n-1} ; K^{n-2} la projection de K^{n-1} sur un espace $L_{n-2}^{n-1} \subset L^n_{n-1}$ orthogonal à la direction correspondante à dO_{n-2}, ... ; K^2 la projection de K^3 sur un plan orthogonal aux directions déterminées par dO_{n-1}, dO_{n-2}, ..., dO_2.

Pour chaque direction dO_{n-1} il y a un cylindre Z^n circonscrit à K^n ; considérons le plus petit cylindre de révolution qui contient Z^n et soit R_n le plus petit rayon de ces cylindres correspondant à toute direction dO_{n-1}. D'une façon analogue nous considérons le plus grand cylindre de révolution qui est contenu dans Z^n et soit r_n le plus grand rayon de ces cylindres pour toute direction dO_{n-1}. On a $R_n \geqslant r_n$. Avec les mêmes définitions pour les corps K^{n-1}, K^{n-2}, ..., K^2 nous trouvons la suite

$$R_n \geqq R_{n-1} \geqq \dots \geqq R_2 \geqq r_2 \geqq \dots \geqq r_{n-1} \geqq r_n .$$

Pour toutes les valeurs de ρ, telles que $r_2 \leqslant \rho \leqslant R_2$, on a l'inégalité suivante de Bonnesen

$$\rho u - f - \pi\rho^2 \geqq 0 \qquad (6\text{-}1)$$

où u est la longueur et f l'aire de K^2 [3, p. 112].

Avec les notations du n° 4 cette inégalité s'écrit

$$\rho H_1^2 - \sigma_2 - \pi\rho^2 \geqq 0 . \qquad (6\text{-}2)$$

En multipliant par $dO_2 \wedge dO_3 \wedge \dots \wedge dO_{n-1}$ et en intégrant sur toutes les sphères respectives, les formules (2-8) et (2-9) donnent

$$2\,\rho O_{n-2} H_{n-1}^n - 4\, H_{n-2}^n - \rho^2 O_{n-1} O_{n-2} \geqq 0 . \qquad (6\text{-}3)$$

L'existence d'une valeur de ρ qui satisfait à cette inégalité montre que l'on a

$$O_{n-2}(H_{n-1}^n)^2 - 4\, O_{n-1} H_{n-2}^n \geqq 0 \qquad (6\text{-}4)$$

ou bien, en introduisant les intégrales de la courbure moyenne,

$$(M_{n-2}^n)^2 - O_{n-1} M_{n-3}^n \geqq 0 .$$

C'est la généralisation connue [3, p. 92] de l'inégalité classique de Minkowski $M^2 - 4\pi F \geqslant 0$ pour $n = 3$.

II. DEUXIEME PARTIE

7. La densité cinématique

Le concept de densité cinématique a été introduit par Poincaré [10, p. 141] et est devenu une des idées les plus fécondes de la Géométrie intégrale.

Considérons, comme introduction, l'espace E_3. La position d'un corps mobile Q_1 est déterminée par la position d'un repère $(P\,;\, e_1, e_2, e_3)$ invariablement attaché à Q_1. Pour fixer la position de ce repère il suffit de :

a) Fixer l'origine P ; soit dP l'élément de volume correspondant à ce point ;

b) Fixer la direction du vecteur e_1 ; soit dO_2 l'élément d'aire sur la sphère de rayon unité correspondant à cette direction ;

c) Fixer la direction de e_2 ; soit dO_1 l'élément d'arc sur le cercle de rayon unité du plan normal à e_1.

La densité cinématique, qui sert à mesurer les ensembles de positions de Q_1 (c'est-à-dire les ensembles de figures congruentes ou ensembles de déplacements) est la forme différentielle, prise en valeur absolue

$$dG = dP \wedge dO_2 \wedge dO_1 . \tag{7-1}$$

Cette densité est bien déterminée, à moins d'un facteur constant, pour la propriété d'être invariante par rapport au groupe des déplacements de E_3 [2].

Soit Q_0 un corps fixe de E_3. Supposons que Q_0 et Q_1 sont limités par des surfaces deux fois différentiables. Soient : F_i les aires et M_i les intégrales de la courbure moyenne des surfaces de Q_i ; V_i les volumes et χ_i les caractéristiques d'Euler-Poincaré de Q_i $(i = 1, 2)$. Si $\chi(Q_0 \cap Q_1)$ représente la caractéristique d'Euler-Poincaré de l'intersection $Q_0 \cap Q_1$, la « formule fondamentale » de la Géométrie intégrale est

$$\int \chi(Q_0 \cap Q_1)\, dG = 8\,\pi^2 (\chi_1 V_0 + \chi_0 V_1) + 2\,\pi\,(F_0 M_1 + F_1 M_0) \tag{7-2}$$

où l'intégrale est étendue à toutes les positions de Q_1. Pour la démonstration, voir [2].

Si les surfaces de Q_i ne sont pas suffisamment régulières, les M_i peuvent se calculer en certains cas en considérant le corps parallèle à distance ε et en faisant $\varepsilon \to 0$. Par exemple, si Q_0 est un polyèdre convexe dont les arêtes ont les longueurs a_i et les angles correspondants sont φ_i, on trouve

$$M_0 = \frac{1}{2} \sum_i a_i (\pi - \varphi_i). \tag{7-3}$$

Si Q_0 se réduit à une courbe de longueur L, on trouve $M_0 = \pi L$.

La généralisation à E_n ne présente pas de difficulté. Un corps de E_n est déterminé par un repère $(P; e_1, e_2, \ldots, e_n)$; si dP représente l'élément de volume dans E_n correspondant au point P et si $dO_{n-1}, dO_{n-2}, \ldots, dO_1$ sont les éléments d'aire sur les sphères de rayon unité, respectivement de dimensions égales à $n-1$, $n-2$, ..., 1 sur lesquelles se meuvent les vecteurs $e_n, e_{n-1}, \ldots, e_1$, la densité cinématique est

$$dG = dP \wedge dO_{n-1} \wedge dO_{n-2} \wedge \ldots \wedge dO_1. \tag{7-4}$$

Soient Q_0, Q_1 deux corps de E_n. La généralisation de la formule fondamentale (7-2) est

$$\int \chi(Q_0 \cap Q_1)\, dG = O_1 \ldots O_{n-1} (V_1 \chi_0 + V_0 \chi_1) + O_1 \ldots O_{n-2} \frac{1}{n} \sum_{h=0}^{n-2} \binom{n}{h+1} M_h^{(0)} M_{n-2-h}^{(1)} \tag{7-5}$$

où $M_h^{(0)}$, $M_h^{(1)}$ sont les intégrales de la courbure moyenne définies au n° 3. Pour la démonstration voir [5] et pour la généralisation aux espaces de courbure constante [11].

Les invariants M_h pour polyèdres convexes peuvent se calculer en considérant les hypersurfaces parallèles à distance ε et en faisant $\varepsilon \to 0$. Par exemple, pour un cube d'arête a, on trouve

$$M_h = \frac{n}{h+1} O_h a^{n-h-1}. \tag{7-6}$$

Nous allons faire une application de la formule (7-5).

Considérons E_n divisé en un réseau de cubes $A_0, A_1, \ldots$, d'arête a (par exemple moyennant des hyperplans parallèles aux hyperplans de coordonnées). Soit T_i la translation qui amène A_i sur A_0, c'est-à-dire $A_i = T_i^{-1} A_0$. En prenant $Q_0 = A_0$, le premier membre de (7-5) peut s'écrire

$$\int \chi(A_0 \cap Q_1)\, dG = \sum_i \int_{P \in A_i} \chi(A_0 \cap Q_1)\, dG \tag{7-7}$$

où $P \in A_i$ indique que le point P de (7-4) doit être intérieur au cube A_i.

En faisant dans (7-7) le changement de variables $P \to T_i^{-1} P$ et en tenant compte de l'invariance de dG par déplacements, on trouve

$$\int \chi(A_0 \cap Q_1)\, dG = \sum_i \int_{P \in A_0} \chi(A_0 \cap T_i^{-1} Q_1)\, dG .$$

Nous avons aussi

$$\chi(A_0 \cap T_i^{-1} Q_1) = \chi[T_i(A_0 \cap T_i^{-1} Q_1)] = \chi(T_i A_0 \cap Q_1)$$

et par conséquent

$$\int \chi(A_0 \cap Q_1)\, dG = \int_{P \in A_0} \sum_i \chi(T_i A_0 \cap Q_1)\, dG. \qquad (7\text{-}8)$$

Cette formule nous dit que en appliquant (7-5) à $Q_0 \equiv A_0$ et Q_1, on peut supposer que P reste toujours dans A_0 à condition de substituer à $\chi(A_0 \cap Q_1)$ la somme des caractéristiques d'Euler-Poincaré de toutes les intersections $A_i \cap Q_1$.

Soit N le nombre de cubes A_i qui ont un point au moins en commun avec Q_1. Si Q_1 est une sphère topologique, $\chi_1 = 1$, on a $N \leqslant \sum_i \chi(A_i \cap Q_1)$ et par conséquent la valeur moyenne du nombre des cubes qui ont des points en communs avec Q_1 satisfait à l'inégalité

$$\bar{N} = \frac{\int_{P \in A_0} N\, dG}{\int_{P \in A_0} dG} \leqq \frac{\int_{P \in A_0} \sum_i \chi(A_i \cap Q_1)\, dG}{\int_{P \in A_0} dG} . \qquad (7\text{-}9)$$

En tenant compte des valeurs

$$\int_{P \in A_0} dG = a^n O_1 O_2 \dots O_{n-1}, \quad \chi_0 = \chi_1 = 1, \quad V_0 = a^n,$$

de (7-8), (7-5) et (7-6) on déduit

$$\bar{N} \leqq 1 + \frac{V_1}{a^n} + \frac{1}{O_{n-1}} \sum_{h=0}^{n-2} \binom{n}{h+1} \frac{O_h}{(h+1)\, a^{h+1}} M_{n-2-h}^{(1)}. \qquad (7\text{-}10)$$

On peut donc énoncer le résultat suivant :

Tout corps Q_1 *qui possède la connexion de la sphère peut se couvrir par un nombre de cubes d'arête* a *inférieur ou égal* *au second membre de* (7-10), *où* V_1 *est le volume et* $M_i^{(1)}$ *les intégrales de la courbure moyenne de la surface de* Q_1.

Pour $n=2$, en posant $V_1=f=$ aire de Q_1, $M_0^{(1)}=u=$ longueur du contour de Q_1, on a

$$\bar{N} \leqq 1 + \frac{f}{a^2} + \frac{2u}{\pi a}$$

résultat donné par Hadwiger [7].

Pour $n=3$, on a

$$\bar{N} \leqq 1 + \frac{V_1}{a^3} + \frac{3F_1}{4a^2} + \frac{3M_1}{2\pi a}.$$

En considérant les sphères de rayon $r=\left(\frac{\sqrt{n}}{2}\right)a$ circonscrites aux cubes A_i et en posant dans (7-10) $a=\frac{2r}{\sqrt{n}}$, on trouve :

Tout corps Q_1 *de* E_n *de la connexion de la sphère peut se couvrir par un nombre de sphères de rayon* r *qui est inférieur ou égal à*

$$\bar{N} \leqq 1 + \frac{V_1}{2^n r^n} n^{n/2} + \frac{1}{O_{n-1}} \sum_{h=0}^{n-2} \binom{n}{h+1} \frac{O_h n^{(h+1)/2}}{(h+1)2^{h+1} r^{h+1}} M_{n-2-h}^{(1)}. \tag{7-11}$$

Par exemple, pour $n=3$, on a

$$N \leqq 1 + \frac{3\sqrt{3}}{8r^3} V_1 + \frac{9}{16r^2} F_1 + \frac{3\sqrt{3}}{4\pi r} M_1.$$

Si, au lieu de cubes on considère d'autres subdivisions de l'espace, on peut améliorer les inégalités précédentes. Pour le plan voir [7]. Les formules (7-10), (7-11) se trouvent dans [12].

Bibliographie

[1] Blaschke, W., *Integralgeometrie 1 : Ermittlung der Dichten für lineare Unterräume im* E_n *(Actualités Hermann*, n° 252, Paris, 1935).

[2] — *Vorlesungen über Integralgeometrie (Hamburger Mathematische Einzelschriften*, 20-22, 1936).

[3] Bonnesen, T. et Fenchel, W., *Theorie der Konvexen Körper*, Ergebnisse der Mathematik, Berlin, 1934.

[4] Cartan, E., *Le principe de la dualité et certaines intégrales multiples de l'espace tangentiel et de l'espace réglé (Bull. de la Soc. Math. de France*, 24, 1896, pp. 140-177).

[5] CHERN, S. S., *On the kinematic formula in the euclidean space of* n *dimensions* (*American J. of Math.*, *74*, 1952, pp. 227-236).

[6] DELTHEIL, R., *Probabilités géométriques*, Gauthier-Villars, Paris, 1926.

[7] HADWIGER, H., *Überdeckung einer Bereiche durch Kreise und Quadrate* (*Comm. Math. Helvetici*, 13, 1941).

[8] MÜLLER, A., *Integralgeometrie 16, Dichten linearer Mannigfaltigkeiten im euklidischen und nichteuklidischen* R_n (*Mathematische Zeitschrift*, 42, 1937).

[9] PETKANTSCHIN, B., *Integralgeometrie 6, Zusammenhänge zwischen den Dichten der linearen Unterräume im* n*-dimensionalen Raum* (*Abhandlungen aus dem Math. Sem. Hamburg*, *11*, 1936, pp. 249-310).

[10] POINCARÉ. H., *Calcul des Probabilités*, 2e édition, Paris, 1912.

[11] SANTALÓ, L. A., *Geometria integral en espacios de curvatura constante*, Publ. de la Com. de Energia Atom., Buenos Aires, 1952.

[12] — *Acotaciones para la longitud de una curva o para el número de puntos necesarios para cubrir aproximadamente un dominio* (*Anais da Acad. Brasileira de Ciencias*, XVI, 1944).