

GEOMETRIA: INTUICION Y RAZONAMIENTO

Disertación del Dr. Luis A. Santaló con motivo de recibir la investidura de Dr. Honoris Causa por la Universidad CAECE.

Debo agradecer, y lo hago con emoción y placer, a la Universidad CAECE por haberme otorgado este alto honor de Doctor Honoris Causa de la misma. Desde su fundación, la Universidad CAECE, Centro de Altos Estudios en Ciencias Exactas, que estos días está cumpliendo su 25 aniversario, se ha distinguido por su eficacia y seriedad en el estudio y la enseñanza de la ciencias, en particular la matemática, con la computación y toda la informática incluidas, y la biología, junto con la metodología y didáctica de esta y otras ramas del conocimiento. Por esto, junto con el agradecimiento, vaya mi cordial felicitación a las autoridades de la Universidad CAECE y a todos los que han contribuido a su desarrollo y éxito a lo largo de su joven, pero fructífera existencia.

En esta oportunidad, y siguiendo la costumbre general, me voy a permitir hacer algunas consideraciones sobre la rama de la matemática en que mayormente he trabajado, que es la geometría, rama de límites no muy precisos pero que presenta ciertas características propias que vamos a analizar.

Dentro del campo de las ciencias, la geometría está entre la matemática y la física. La matemática, en su máximo grado de pureza, es exclusivo razonamiento. Es una ciencia creada y desarrollada en el mundo de las ideas, aunque muchas veces, a posteriori, sus logros fueron aplicados a los fenómenos naturales. La geometría, en cambio, tiene su origen en la naturaleza misma, en las formas y en las transformaciones de sus objetos constituyentes. Se asemeja a la física, cuyo objetivo es el estudio de los fenómenos

naturales. Ante una naturaleza distinta, aún conservando las mismas leyes de la lógica y del razonamiento, la geometría, como la física, serían diferentes, mientras que la matemática en su sentido estricto, junto con el cálculo que la acompaña podrían seguir siendo los mismos.

Con el progreso en extensión y en profundidad de la matemática, se han hecho cada vez más imprecisos los límites entre sus diferentes partes, pero sin embargo, tal vez por tradición histórica, lo que llamamos geometría sigue conservando cierto sabor que lo distingue del resto de la matemática, sobre todo en cuanto ella utiliza la intuición para adquirir conceptos y también ciertas técnicas especiales para construir modelos a partir de esos conceptos, técnicas que van desde el clásico uso de la regla y el compás, pasando por los distintos tipos de astrolabios y teodolitos para medir ángulos y formas, hasta el reciente uso de las computadoras para dibujar gráficos y descubrir misterios de complicados entes matemáticos como son los llamados fractales.

La geometría nació en el antiguo Egipto, siglos -XX a -X como aplicación directa de la intuición ante las necesidades de medir terrenos, construir pirámides y observar los astros. No sabemos hasta qué punto se combinaba el razonamiento deductivo con las observaciones y prácticas experimentales. Los primeros resultados teóricos, obtenidos a través del razonamiento deductivo, fueron los de Tales y Pitágoras en el siglo -VII, con los teoremas que llevan su nombre y que todavía se estudian actualmente en los primeros cursos de matemática. En estos comienzos la intuición se mezclaba con el razonamiento. Se enseñaba a razonar sobre figuras concretas y se ayudaba el razonamiento con el dibujo, aunque fuera imperfecto y poco preciso por ser hecho sobre la arena u otros materiales blandos, sobre los cuales se podía dibujar. Así procede Sócrates, cuando en el Menon quiere conducir a un esclavo a la construcción del cuadrado de área doble de otro cuadrado dado.

El gran paso sobre el razonamiento puro fue dado por Euclides en sus "**Elementos**" (siglo -III). Partiendo de un cierto número de definiciones, nociones comunes y postulados, edifica toda la geometría entonces conocida, inaugurando el método de hipótesis, teorema y demostración, que prevaleció durante siglos para toda la matemática. Si bien las demostraciones eran puro razonamiento lógico, la geometría de Euclides partía, a través de sus definiciones y postulados, de la intuición vulgar de la naturaleza. Las definiciones, no aceptables desde un punto de vista moderno riguroso, respondían a los conceptos naturales de la intuición. Así, el "punto" es lo que no tiene partes, la "línea" es una longitud sin anchura, y "superficie" es lo que tiene solamente longitud y anchura. Vemos que, intuitivamente, está incluido en estas definiciones el concepto de dimensión (cero para los puntos, uno para las líneas y dos para las superficies). No caben dimensiones fraccionarias, que solamente aparecieron a mediados del siglo actual con los fractales, de los que hablaremos más adelante.

Es de notar, además, que Euclides define a las superficies como objetos independientes de su entorno, mientras que los matemáticos que le sucedieron, hasta Gauss, consideraban a las superficies como los contornos o límites de volúmenes tridimensionales. Así Euler, a su memoria fundamental sobre las superficies, la titula "Sobre la superficie de los Cuerpos" (**De superficiebus corporum**). Otras definiciones de Euclides tienen también marcado origen intuitivo, por ejemplo la definición de recta como la "línea en la cual todos los puntos yacen igualmente", definición obscura si no se tiene previamente la idea de recta.

A partir de estos y otros conceptos intuitivos, Euclides enuncia sus famosos cinco postulados a partir de los cuales edifica, por puro razonamiento lógico, toda la geometría. Parte, pues, de la intuición, para desembocar en la geometría basada en el razonamiento. Los defectos de los **Elementos**, que no se pusieron de manifiesto

hasta el siglo XIX, estaban en las bases y puntos de partida, es decir, en la parte intuitiva de sus definiciones y nociones comunes. A partir de ello, como en toda obra de puro razonamiento, la geometría de Euclides era impecable.

La geometría y la intuición.

En su parte más intuitiva, la geometría estudia la “forma” de los objetos, es decir, es una ciencia esencialmente visual. En este sentido conviene mencionar que en tiempos recientes se ha construido toda una “teoría de la forma” (**theory of shape**) que esencialmente consiste en estudiar la forma de las figuras geométricas, con prescindencia de su tamaño y posición en el espacio. Es decir, todas las figuras semejantes a una dada se consideran equivalentes. Se tiene así el espacio de las “formas” en el cual se puede definir una métrica, que permite definir en cierta manera cuán diferente es la forma de una figura respecto de otra. Por ejemplo, todos los triángulos semejantes están determinados por dos de sus ángulos. Por tanto, se comprende que el espacio de las formas de los triángulos tiene dos dimensiones y se ha identificado de manera apropiada con la superficie de la esfera.

No es mucho lo que se ha avanzado en el estudio de los espacios de las formas, pero se han estudiado conjuntos de figuras formadas por un cierto número finito de puntos del plano, lo que ha conducido a resultados diversos de probabilidades geométricas y sus aplicaciones. Por ejemplo, un problema clásico consiste en hallar la probabilidad de que un triángulo determinado por tres puntos dados al azar dentro de cierto conjunto convexo, sea acutángulo. Más particularmente, se ha estudiado la probabilidad de que dicho triángulo, elegido al azar, tenga un ángulo próximo a 180° , por ejemplo, igual o mayor que 175° , como manera de obtener una apreciación de si los tres puntos que lo definen están “casi” en línea

recta. Esto se ha usado por ejemplo, en arqueología, para saber si un conjunto de menhires o yacimientos arqueológicos fueron diseñados como pertenecientes a sucesivas líneas rectas, o si su situación está dada por el azar. La comparación entre subconjuntos de conjuntos finitos de puntos de figuras diversas, analizando probabilísticamente la distancia entre sus formas, para ver si se apartan mucho o poco de ser semejantes, ha tenido también aplicaciones en astronomía, geología y geofísica. La métrica utilizada en el espacio de las formas se llama métrica "procrustea" y se relaciona con la métrica proyectiva del espacio complejo. Sobre ello se pueden ver la interesante memoria de David G. Kendall (**Buletin London Mathematical Society**, vol.16, 1984, 81-121) y la más reciente de C. Goodall (**Journal Royal Statistical Society**, B, 1991, vol.53, 285-339).

También es una geometría esencialmente visual la que estudia las curvas del plano, incluida la recta como curva de curvatura nula. Cabe considerar las curvas acotadas (elipse, lemniscata, cardioide. ...) y las no acotadas (parábola, hipérbola, senoide, espirales, ...). Las curvas planas se estudiaban en la antigüedad por su método de generación o bien como secciones planas de superficies del espacio (caso de las cónicas como secciones de un cono de revolución). Con el cálculo infinitesimal de Newton y Leibnitz se pasó a estudiar las curvas como gráficos de funciones, con lo cual se pudo aplicar a ellas todos los potentes recursos del cálculo infinitesimal. Con las primeras derivadas se estudiaron las tangentes, y con las segundas las curvaturas en cada punto, pasando al estudio de las curvas planas por sus propiedades infinitesimales. Tuvo importancia la determinación de las curvas planas por su ecuación intrínseca, que da la curvatura en función del arco.

En años recientes Mendes France y algunos colaboradores han introducido nuevos conceptos para el estudio y clasificación de las curvas planas, conceptos que toman la

nomenclatura de la física y muestran nuevas relaciones entre la geometría y esa ciencia. Tal vez el más importante es el de “entropía” de una curva. Para un conjunto finito de N puntos del plano, supuestos dados con ley de distribución uniforme, la entropía se define como el logaritmo de N . Para una curva de longitud finita, Mendes France considera el valor medio de los números de puntos en que la curva es cortada por una recta del plano (en el sentido de las probabilidades geométricas o de la geometría integral) y define la entropía como el logaritmo de este valor medio. Así, un segmento tiene entropía nula, y una curva cerrada convexa tiene la entropía igual al logaritmo de 2.

Para las curvas de longitud infinita, se toma la entropía de un arco de longitud finita y se divide por el logaritmo de la longitud del mismo. El límite de ese cociente cuando el arco tiende a ser toda la curva, es por definición la entropía de la curva. De esta manera resulta que la entropía de una curva acotada de longitud infinita vale 1 y se dice que la curva es de comportamiento caótico. Para curvas ilimitadas el comportamiento puede ser determinista (entropía cero, como para la recta o la espiral exponencial) o ser caótico (entropía 1, como para la espiral logarítmica). Existen curvas con la entropía comprendida entre 0 y 1. Por ejemplo la espiral cuyo radio vector es igual al ángulo central elevado a un exponente positivo fijo, tiene por entropía la inversa de la unidad más el exponente. Para curvas planas rectificables, Mendes France define también la entropía termodinámica, y por analogía con la física deduce de ella la “temperatura” de la curva. Como límite de la temperatura de un arco cuando el mismo se reduce a un punto, se tiene la temperatura de la curva en un punto. Resultan así muchas e importantes propiedades de las curvas, además de la clásica curvatura, propiedades que convendría estudiar más y ver, por ejemplo, hasta qué punto ellas determinan a la curva (se trata siempre de curvas planas). La generalización al espacio está por hacer. Sobre este tema se pueden ver los trabajos de Mendes France y colaboradores en el

Archiv Rational Mechanics and Analysis, vol.94, 1986, 155-165 y en el **Seminar de théorie de nombres**, Paris 1981-82, editado por Birkhauser.

Geometría y razonamiento.

El siglo XIX fue el siglo de la revisión de los fundamentos de la matemática. Los analistas aclararon los problemas de convergencia de sucesiones y series, solidificaron las bases del cálculo infinitesimal y dieron plena carta de ciudadanía matemática a los números complejos. Por su parte, los geómetras analizaron con detalle los fundamentos, naciendo las geometrías no-euclidianas y desarrollándose ampliamente la geometría proyectiva y su construcción axiomática rigurosa.

Sin embargo, la geometría conservó su carácter intuitivo que le había dado origen. Los elementos básicos, como puntos, rectas y planos eran conceptos, como en Euclides, supuestos conocidos de antemano, a pesar de que a veces se vestían de pseudodefiniciones. Puede decirse que toda la geometría, ayudada por la lógica y el razonamiento deductivo, seguía usando figuras que servían de base al razonamiento. Con mayor o menor intensidad, seguía siendo una ciencia visual.

El cambio radical vino en 1899 cuando David Hilbert publicó sus "**Fundamentos de la Geometría**", que transformó a esa disciplina en una construcción exclusivamente de razonamiento. En sus primeras frases se rompía la tradición de siglos: "pensemos -dice Hilbert- en tres distintos sistemas de entes: a los del primer sistema los llamamos **puntos** y los designamos por A, B, C, ...; a los del segundo sistema los llamamos **rectas** y los representamos por a,b,c,...; y a los del tercer sistema los llamamos **planos** y los designamos por $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ ". Es decir, no se pretende definir, ni tan siquiera dar una

idea intuitiva a priori de lo que son los puntos, las rectas y los planos. Son sistemas de entes a los cuales se imponen ciertas condiciones que sirven para caracterizarlos. Para edificar toda la geometría, a lo Hilbert, no hace falta “ver”, sino exclusivamente “razonar”. Cada uno es libre de representarse los puntos, las rectas y los planos como mejor le plazca, con tal de que se cumplan los axiomas establecidos, que no son 5 como en Euclides, sino 20, divididos en cinco grupos (enlace, ordenación, congruencia, paralelismo, continuidad).

Limitándonos a la geometría plana, la representación de los elementos geométricos que dio mejores resultados fue la de considerar a los puntos como pares de coordenadas y a las rectas como ecuaciones lineales. Primero se tuvieron en cuenta, como coordenadas y como coeficientes, únicamente los números reales, lo que dio lugar a la geometría real clásica. Pero enseguida vino la generalización a los números complejos y, posteriormente, a conjuntos de números convenientemente definidos. Se observó que para poder escribir las ecuaciones de las rectas y poder hallar las intersecciones entre ellas, era necesario poder realizar las operaciones de suma y producto, junto con sus inversas, o sea, más precisamente, que dichos elementos cumplieran la condición de pertenecer a un “cuerpo”. Ello originó una fundamental conexión entre la geometría y las estructuras algebraicas. Se obtuvieron resultados curiosos, como la equivalencia entre la validez del llamado teorema de Pappus (“Si un hexágono tiene las dos ternas de vértices no consecutivos respectivamente alineados, entonces los pares de lados opuestos se cortan en puntos de una misma recta”) y la conmutabilidad del cuerpo base. Por otra parte, Hilbert demostró la existencia de geometrías no-desarguesianas (en las que no vale el teorema de Desargues, sin salir del plano) y planteó el problema de si en ellas se podrían introducir coordenadas pertenecientes a alguna estructura algebraica más general que los cuerpos, cuestión que fue resuelta en 1943 por Marshall Hall, al introducir los llamados “anillos ternarios”, conjuntos de elementos entre los cuales se definen operaciones de

composición entre ternas de elementos (ver, por ejemplo, nuestra **Geometría Projectiva**, EUDEBA, 1966).

Otro hecho importante, consecuencia de introducir coordenadas cuyos elementos son elementos de un cuerpo, es la posibilidad de geometrías finitas, es decir, geometrías con un número finito de elementos, las cuales dieron lugar a una abundante cantidad de trabajos, por ejemplo el estudio de curvas algebraicas sobre cuerpos finitos y sus particularidades según la característica del cuerpo (ver P.Dembowski, **Finite Geometries**, Springer, Berlin, 1968). Se trata de estudios puramente algebraicos, que solamente toman de la geometría la nomenclatura y la orientación de las investigaciones. Son geometrías de puro razonamiento y deducciones lógicas, sin contacto con la realidad ambiente y, por tanto, su tratamiento es más propio del álgebra que de la geometría en su significado histórico. Se han estudiado también geometrías sobre un anillo, en vez de sobre un cuerpo, geometrías no-arquimedianas (en las que no se cumple el postulado de Arquímedes) y otras varias. Son geometrías creadas en el mundo de las ideas, en las que poco tiene que ver la intuición espacial de nuestros sentidos.

La geometría computacional

Con las computadoras y sus facilidades de cálculo, han aparecido otros aspectos de la geometría, llamada geometría computacional, en la cual juegan papel importante, simultáneamente, la intuición y el razonamiento abstracto.

Un primer ejemplo, es el resultado de combinar la geometría con la estadística, que a través de métodos experimentales, como el método de Monte Carlo, y el uso de resultados probabilistas y estadísticos, como teoremas ergódicos o leyes de los grandes números, ha permitido estudiar experimentalmente situaciones

geométricas difíciles de intuir directamente o de obtener por puro razonamiento deductivo. Ejemplos de ello se pueden ver en la llamada geometría estocástica (D.Stoyan, W.S.Kendall, J.Mecke, **Stochastic Geometry and its Applications**, Academie-Verlag, Berlin, 1987) con sus aplicaciones a la estereología, a la tomografía y a los mosaicos aleatorios. Es curioso, por ejemplo, observar como los diferentes mosaicos que se encuentran en muchas obras de arquitectura y decoración de los árabes (Alhambra de Granada) y que fueron creados seguramente bajo la sola guía intuitiva de un artista, dieron posteriormente lugar a importantes estudios sobre los grupos finitos (grupos cristalográficos) y también a notables creaciones en las artes plásticas (pinturas del holandés Escher).

También pertenecen a la geometría computacional muchos problemas referentes a las propiedades de la cápsula convexa de un número finito de puntos dados al azar en el plano, así como la llamada "reconstrucción de imágenes", por ejemplo, cuando a partir de un conjunto de puntos del plano se desea averiguar la probabilidad de que ellos hayan sido dados al azar dentro de una cierta figura que se desea reconstruir (U.Grenander, **Lectures on Pattern Theory**, vols. 1, 2, 3, Springer, Berlín, 1981). También en la geometría de los poliedros, H. Reggini ha utilizado hábilmente la computación para obtener a partir de ellos varios resultados, como ser los caminos hamiltonianos y las posibles redes de polígonos que pueden obtenerse al desarrollarlos, sin cortes ni superposiciones, sobre un plano (H.Reggini, **Regular Polyhedra: random generation, Hamiltonian paths and single chain nets**, Monografía n°6 de la Academia Nacional de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Buenos Aires, 1991).

Pero, posiblemente, la novedad más importante introducida en la geometría gracias a la computación, es la geometría fractal de Mandelbrot, en la que aparecen los "fractales" como límites de curvas o de contornos de dominios, límites que pueden ser muy complicados, pero que las computadoras permiten dibujar con

aproximación creciente dependiente de la potencia de las mismas. La idea es simple y atractiva. Se trata de una sucesión infinita de pequeños arcos o áreas que se expanden y ramifican sobre el plano, al mismo tiempo que van tomando formas y estructuras variadas, sin ley aparente. Vienen a ser una extensión bidimensional de las expresiones decimales de los números reales, representativos de los puntos de la recta real. Sobre la recta, se tienen los números racionales cuya expresión decimal es una sucesión periódica y, por tanto, bien conocida de antemano en su totalidad. En cambio, los números irracionales tienen la expresión decimal no periódica y, por tanto, las cifras o los grupos de cifras aparecen aleatoriamente y de manera imprevisible, no pudiendo conocerse una de ellas sin conocer todas las anteriores. Con probabilidad uno, se sabe, por ejemplo, que en la expresión decimal del número raíz cuadrada de 2, aparecerá alguna vez cualquier número o grupo de números dados de antemano. En los fractales, aparecen sucesiones de figuras bidimensionales, cada vez más pequeñas, formadas por puntos cuyas coordenadas pueden ser del orden de diez elevado a menos veinte o más, imposibles de dibujar a la escala natural, pero que sí se puede tomar sobre cada eje escalas infinitésimas, usando números infinitamente pequeños pero con los cuales las computadoras pueden operar. Puede ocurrir que las figuras sucesivas de un fractal sean semejantes entre sí y entonces el fractal se llama autosemejante y se conoce íntegramente, como ocurre con el desarrollo de los números racionales, pero puede ocurrir también que no sean semejantes entre sí y vayan apareciendo sucesivamente figuras no predecibles (fractales no autosemejantes) con todo el interés que presenta el misterio y de aquí los deseos de quienes se dedican a estos problemas de tener cada vez computadoras más potentes, para ir obteniendo más y más detalles. Al operar con números de varias decenas de cifras, las computadoras actúan como potentes microscopios, ampliando formas imposibles de adivinar por medios directos o de puro razonamiento.

A principios de siglo E. Borel llamaba la atención sobre la aleatoriedad de la aparición de cualquier cifra o grupo de cifras en

el desarrollo decimal de un número irracional. Si en un tal desarrollo todas las cifras aparecen con la misma frecuencia, que será igual a $1/10$, el número se llama "normal" y si lo mismo ocurre con el desarrollo del número en cualquier sistema de numeración, Borel dice que se trata de un número "absolutamente normal", y demuestra que la probabilidad de que un número irracional dado al azar sea absolutamente normal es igual a 1. De aquí se deduce una curiosa consecuencia: "Supongamos -dice Borel- que las letras del alfabeto en un determinado idioma, más los signos de puntuación constituyan un total de 100 caracteres de imprenta distintos y adoptemos un sistema de numeración de base 100 cuyas 100 cifras estén representadas precisamente por estos 100 caracteres de imprenta. Entonces, un número irracional, tal como "pi" o logaritmo de 3, se encontrará escrito en este sistema de numeración según una serie ilimitada de páginas en las cuales los caracteres se sucederán según una ley aritmética que desconocemos pero que está rigurosamente determinada por la definición misma del número considerado. Si este número es absolutamente normal, todas las agrupaciones de caracteres son igualmente probables y por tanto prolongando suficientemente la escritura de este número, estamos seguros de encontrar, con tanta frecuencia como se quiera, todas las agrupaciones posibles. Escribiendo el número "pi" (supuesto absolutamente normal) en este sistema de numeración, encontraremos por tanto, tarde o temprano, la página que estoy escribiendo; se encontrará igualmente el texto completo de las obras de Víctor Hugo y también el texto de los diarios que aparecerán dentro de un siglo, si en aquella época todavía hay diarios. Todo ello está contenido en el número "pi", con muchas otras cosas.

Pasando al plano y a los fractales no autosemejantes, al variar cada vez las figuras que resultan al ir tomando aproximaciones sucesivas del fractal, puede ocurrir que también, tarde o temprano, aparezcan todas las figuras posibles, llegando a la misma conclusión de Borel, no para las obras literarias, sino para

todas las obras posibles de ser dibujadas. Así como en el caso de los números irracionales es difícil saber si un número irracional dado es o no absolutamente normal, a pesar de ser igual a 1 la probabilidad de que así sea, en el caso de los fractales es difícil, y tal vez imposible con los conocimientos actuales, saber si un determinado dibujo parecerá en el desarrollo sucesivo de algún fractal, bien definido por iteración de una determinada aplicación no lineal del plano sobre sí mismo o por algún otro método de generación.

En este rápido bosquejo hemos visto cómo la geometría, la más antigua de las llamadas ciencias exactas, utilizando alternativamente la intuición y el razonamiento, y también recientemente las posibilidades de cálculo de las computadoras, ha ido progresando e infiltrándose en la mayoría o en todos los campos de las demás ciencias, no solamente las matemáticas. Actualmente, con las computadoras, que han permitido dibujar en lo infinitamente pequeño, la geometría vuelve a aparecer como la ciencia de las formas, tendiendo lazos de continuidad entre las ciencias y las artes plásticas, así como entre el orden y el caos. La geometría fue creada para medir la Tierra, extendiéndose luego a la medida y el estudio del Universo, pensando siempre en el Universo estable y ordenado de nuestra intuición. Actualmente, empieza a utilizarse para estudiar el universo turbulento y caótico que aparece tanto en lo infinitamente pequeño de los átomos y partículas elementales, como en lo infinitamente grande del cosmos, infinitudes, pequeñas o grandes, tanto en dimensiones espaciales como en intervalos de tiempo. Harán falta, para el futuro, nuevas intuiciones y nuevos razonamientos, es decir, una nueva geometría y una nueva matemática para poder concebir mundos que por sus dimensiones y eternidad, presentan formas y se ajustan a leyes que en el presente son difíciles de concebir, dadas nuestras dimensiones tanto espaciales como temporales, ambas infinitésimas. La esperanza está en el espíritu y su fantasía inagotable que, como expresaba Hamlet “puede estar encerrado en una cáscara de nuez y sin embargo sentirse rey de espacios infinitos”.

APENDICE

Vamos a dar algunos detalles matemáticos para complementar lo dicho sobre la interpretación termodinámica de las curvas planas, de acuerdo con Mendes France y colaboradores.

Si se tiene un sistema finito S de puntos del plano, sean P_1, P_2, \dots, P_n cada uno con una cierta probabilidad p_1, p_2, \dots, p_n , la entropía de S se define por

$$H(S) = \sum_1^n p_i \log(1/p_i) \quad (1)$$

Si la probabilidad es uniforme, $p_i = 1/n$, resulta

$$H(S) = \log n \quad (2)$$

Supongamos una curva plana L de longitud finita $|L|$. Cortando por las rectas G del plano se tendrá sobre cada una de ellas un cierto número n_G de puntos de intersección con la curva. El valor medio o esperanza matemática de n_G para todas las rectas, se demuestra que vale

$$E(n_G) = 2|L|/|C|$$

donde $|C|$ es la longitud de la curva convexa mínima que contiene L (cápsula convexa). Entonces, por analogía con (2) Mendes France define la **entropía** de la curva rectificable L (que puede estar compuesta de varios pedazos) por

$$H(L) = \log \frac{2|L|}{|C|}$$

Los segmentos de recta tienen entropía nula y las demás curvas entropía estrictamente positiva. Las curvas convexas tienen entropía $\log 2$. Una semicircunferencia de radio r tiene entropía $\log 2\pi/(\pi + 2)$.

Para las curvas infinitas, la entropía se define a partir de un arco limitado L_s de la misma, de longitud s , y tomando el límite

$$h(L) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{H(L_s)}{\log s}$$

suponiendo que existe, o si no, se definen la entropía inferior y superior por el límite respectivo.

Para una curva acotada L de longitud infinita, la entropía vale

$$h(L) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{(\log 2 + \log|L| - \log|C|)}{\log s} = 1$$

Se dice en este caso que la curva es de comportamiento caótico. Para las curvas ilimitadas el comportamiento determinista (entropía 0, como las rectas o la espiral $r = \exp \alpha$) o el comportamiento caótico (como la espiral $r = \log \alpha$, de entropía 1) no son distinguibles por el aspecto visual. Hay que hacer el cálculo correspondiente y se encuentra que existen curvas de entropía comprendida entre 0 y 1. Por ejemplo, la espiral $r = \alpha^a$ tiene entropía $h(r = \alpha^a) = 1/(1+a)$.

Para curvas de longitud finita se define la **entropía termodinámica** por la expresión

$$H^\circ(L) = H(L) + \frac{\beta}{\exp \beta - 1}$$

de donde

$$\beta = \log \frac{2|L|}{2|L| - |C|}$$

Por analogía con la termodinámica de la física, se define la **temperatura** de la curva L como la inversa de β , o sea

$$T = \left(\log \frac{2|L|}{2|L| - |C|} \right)^{-1} \quad (3)$$

Si se identifica la longitud L con el **volumen V** de la curva, entonces la **presión P** se define por $|C|^{-1}$ y (3) se puede escribir

$$2 P V = (1 - e^{-VT})^{-1}$$

que recuerda la ecuación de Boyle para altas temperaturas.

Como límite de la temperatura de un arco, cuando el mismo se reduce a un punto, se tiene la temperatura $T(A)$ en el punto A de la curva, para la espiral $r = \exp(-\alpha)$ en el origen es $T(0)=0,5296\dots$. Para la espiral $r = \alpha^{-\lambda}$, $\lambda > 1$ la temperatura en el origen es infinito. Para la espiral $r = \exp(-\alpha^2)$ la temperatura en el origen es 0.

Se puede demostrar que para todas las curvas rectificables casi todos sus puntos tienen la temperatura cero, pero sin embargo el conjunto de los puntos con temperatura positiva puede ser denso y no numerable.