Sobre la medida del Conjunto de figuras convexas congruentes contenidas en el interior de un rectángulo o de un triángulo

L. A. Santaló

1. INTRODUCCION. Para fijar en el plano la posición de figura convexa K, que se supone movil de manera indeformable, hay que dar la posición de un punto P (x, y) invariablemente unido a K mas el ángulo φ de una rotación al rededor de P.

Determinada la posición de K por estas coordenadas x, y, φ, se sabe que para medir un conjunto de posiciones de K o, lo que es lo mismo, un conjunto de figuras congruentes con K, se toma la integral. extendida al conjunto, de la forma diferencial.

$$dK = dx \quad dy \quad d\varphi. \qquad (1.1)$$

Esta medida es la llamada *medida cinemática* en Geometria Integral [1]

(1) Ver W. BLASCHKE, *Vorlesungen Über Integralgeometrie.* Leipzig und Berlin, 1936, pág. 20.

Por ejemplo, si se supone una figura convexa fija K_0 de área F_0 y longitud L_0, la medida del conjunto de posiciones de otra figura convexa K de área F y longitud L, en las cuales tiene punto común con K_0 (o sea $K \cdot K_0 \neq 0$), se demuestra que vale [2]

$$m \quad (K. \, K_0 \neq 0) = \int dK = 2\pi(F+F_0)+L \, L_0. \qquad (1.2)$$

En cambio, si en lugar de la medida del conjunto de posiciónes de K para las cuales es $K. \, K_0 \neq 0$, sea quiere la medida del conjunto de posiciones de K en las cuales ella *está contenida* en K_0 (o sea $K \subset K_0$), salvo los casos triviales en que esta medida sea nula, ya no se puede dar una fórmula general simple como la (1.2). Dicha medida de las posiciones en las que K está contenida en el interior de K_0 debe ser calculada en cada caso particular y en su expresión intervienen nuevos invariantes de K y K_0 distintos del área y la longitud.

El objeto de esta nota es buscar *la medida del conjunto de posiciones de K en las cuales es interior a K_0*, en los casos en que K_0 es un rectángulo. De ellos deduciremos, además, algunos problemas de probabilidades geométricas.

2. CASO DEL RECTANGULO. Consideremos un rectángulo fijo R de lados a, b y una figura convexa móvil K cuya función de apoyo respecto de un punto interior P sea

$$p = p\ (\theta). \qquad (2.1)$$

(2) W. BLASCHKE. loc. cit. pág. 30

Esto significa que $p\ (\theta)$ es igual a la distancia del punto P a la tangente a K normal a la dirección del semirrayo de origen p que forman con otro tomado como origen el ángulo θ. Sea PA esta dirección, invariablemente unida a la figura K, tomada como origen de los ángulos θ. La función $p\ (\theta)$ es periódica de periodo 2π (fig. 1)

Ya hemos dicho en la introducción que la posición de K queda determinada por la del punto $P\ (x, y)$; mas el ángulo φ de una rotación alrededor de este punto. Como ángulo φ tomaremos el que forma la dirección PA, unida a la figu- K, con la dirección fija de los lados de longitud a del rectángulo dado R.

Fijemos primero φ y consideremos "traslaciones" de K. Se observa que el rectángulo $r\ (\varphi)$ circunscrito a K y que tienen los lados paralelos a los de R, tiene por longitudes de sus lados

$$p\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)+p\left(\frac{3}{2}\pi-\varphi\right)\ ;\quad p(-\varphi)+p(\pi-\varphi)$$

y por tanto el área $r\ (\varphi)$ de este rectángulo vale (3)

$$r\ (\varphi)=\left[p\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)+p\left(\frac{3}{2}\pi-\varphi\right)\right]\cdot\left[p(-\varphi)+p(\pi-\varphi)\right].\ (2.2)$$

(3) Indicamos indistintamente por $r\ (\varphi)$ el rectángulo y su área lo cual no puede ocasionar confusión.

Al considerar unicamente traslaciones de K, el conjunto de posiciones en que esta figura queda en el interior de R coincide con el conjunto de posiciones en que el rectángulo $r(\varphi)$ es interior a R y por tanto el área cubierta por el punto P en todas estas posiciones vale.

$$\left[b - p\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) - p\left(\frac{3}{2}\pi - \varphi\right)\right] \cdot$$

$$\cdot \left[a - p(-\varphi) - p(\pi - \varphi) \right] \cdot \qquad (2.3)$$

Si alguno de los dos factores de este producto es negativo, consideremos que el producto es cero.

Por tanto, para medir el conjunto de posiciones de R en las cuales es interior a R, según (1.1) habrá que tomar la integral respecto de φ de la expresión (2.3), o sea,

$$m\ (K \subset R) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int dx\, dy =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[b - p\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) - p\left(\frac{3}{2}\pi - \varphi\right)\right]\left[a - p(-\varphi) - p(\pi - \varphi)\right] d\varphi$$

y de aqui, teniendo en cuenta que para cualquier valor de α vale la fórmula conocida.

$$\int_0^{2\pi} p\ (\varphi+\alpha)\ d\varphi = L \tag{2.4}$$

donde L es la longitud del contorno de K, y recordando (2.2), resulta

$$m\ (K \subset R) = 2\pi a b - 2L\,(a+b) + \int_0^{2\pi} r\ (\varphi)\ d\varphi\ . \tag{2.5}$$

Este resultado se puede enunciar:

Dada una figura convexa K cuya función de apoyo sea la (2.1) y un rectángulo R de lados a, b, si los dos factores del producto (2.3) son siempre positivos para cualquier valor de φ, la medida del conjunto de posiciones de K en las cuales está contenida en el interior de R. está dada por (2.5), siendo $r\ (\varphi)$ el área del rectángulo circunscrito a K que tiene dos lados paralelos a la dirección φ.

3. CASO PARTICULAR. El resultado (2.5) toma una forma simple en el caso en que K sea una figura convexa de anchura constante.

Llamando h a esta anchura constante, vale para todo valor de φ,

$$h = p\,(\varphi) + p\,(\varphi+\pi) \qquad (3.1)$$

y además se sabe que es $L = \pi\ h$, lo cual, por otra parte, es una consecuencia inmediata de (2.4). Por tanto en este caso es

$$m\ (\,K \subset R) = 2\,\pi\ ab - 2\ L\,(a+b) + 2\ \pi\ h^2. \qquad (3.2)$$

En particular, si K es un círculo de radio ρ bastará sustituir $h = 2\ \rho$

4. APLICACION A PROBLEMAS DE PROBABILIDADES GEOMETRICAS. Supongamos el plano dividido en rectàngulos congruentes de lados a, b formando la red de la figura 2.

Una figura convexa K de anchura constante h, tal que $h \leq a$ y $h \leq b$, colocada al azar sobre el plano puede ocupar tres tipos de posiciones, a saber. 1o. no cortar ninguna recta del reticulado; 2o cortar a una sola recta; 3o cortar a dos rectas.

Vamos a calcular la probabilidad de cada caso.

Considerando como equivalentes las posiciones de K que se deducen una de otra por una traslación del plano que superponga toda la red sobre si misma, la medida de posiciones *distintas* de K sera

$$m = 2\,\pi\ a\ b \qquad (4.1)$$

puesto que el punto P puede moverse a toda área de un rectángulo determinado de la red y en cada posición el ángulo φ puede variar entre 0 y 2π Esta medida se compone de la medida m_0 de las posiciones en que K no corta a ninguna recta de la red, o sea, es interior a los rectángulos, mas la medida m_1 de las posiciones en que corta a una sola recta, mas la medida m_2 de las posiciones en que corta a dos rectas. Por tanto (4.1) se puede escribir

$$m_0 + m_1 + m_2 = 2\pi\, a\, b \tag{4.2}$$

y, según (3.2), se tiene también

$$m_0 = 2\pi\, a\, b - 2\pi\, h\, (a+b) + 2\pi\, h^2. \tag{4.3}$$

Para obtener una tercera relación entre m_0, m_1, m_2 debemos recordar una fótmula conocida de Geometría Integral. Ella es que, llamando n al número de puntos de intersección del contorno de K con las rectas de la red de rectángulos y considerando la integración extendida a todas las posiciones distintas de K es [4]

$$\int n\, dK = 4\, L\, (a+b) = 4\pi\, h\, (a+b). \tag{4.4}$$

Prescindiendo de las posiciones en que K es tangente a alguna recta de la red, que son posiciones excepcionales de

[4] Ver L. A. SANTALO, *Sobre valores medios y probabilidades geométricas*, Abhandlungen aus dem Mathematisches Seminar der Hansischen Universität, Vol, XIII, 1940.

medida nula, en (4.4) es $n = 2$ para las posiciones en que K corta a una sola recta y $n = 4$ para aquellas en que corta a dos rectas. Por tanto la expresión (4.4) se puede escribir

$$2m_1 + 4m_2 = 4\pi h (a+b). \tag{4.5}$$

Del sistema de ecuaciones (4.2), (4.3) y (4.5) se deduce

$$\begin{aligned} m_0 &= 2\pi ab - 2\pi h(a+b) + 2\pi h^2 \\ m_1 &= 2\pi h(a+b) - 4\pi h^2 \\ m_2 &= 2\pi h^2. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Dividiendo en cada caso por la medida total m se puede finalmente enunciar:

Dibujada sobre el plano una red de rectángulo congruentes de lados a, b (fig. 2), las probabilidades de que el contorno de una figura convexa de anchura constante h (h menor que a, b) arrojada al azar sobre el plano no corte a ninguna recta de la red, o corte a una o dos de ellas, valen, respectivamente:

$$P_0 = 1 - h\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) + \frac{h^2}{a\,b}$$

$$P_1 = k\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) - 2\,\frac{h^2}{ab} \tag{4.7}$$

$$P_2 = \frac{h^2}{a\,b}$$

Si solo se quiere la probabilidad de pue K corte a alguna recta de la red, será.

$$P = 1 - P_0 = h\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) - \frac{h^2}{ab} \qquad (4.8)$$

5. CASO DEL TRIANGULO. Consideremos ahora la misma figura convexa K de antes y un triángulo EFG fijo de área T (fig. 3).

La dirección PA que fija la posición de K alrededor del punto P la determinaremos por el ángulo φ que ella forma con el lado FG del triángulo dado.

Queremos hallar la medida de las posiciones de K en las cuales es interior al triángulo EFG. Para ellos debemos calcular la integral de la expresión (1.1). Igual que en el caso del rectángulo, figemos primero el ángulo φ y, consideremos unicamente "traslaciónes" de K.

Fijado φ, consideremos el triángulo $E'F'G'$ circunscrito a K y de lados paralelos a EFG. En todas las posiciones de K obtenidas por traslación en las cuales esta figura está contenida en el triángulo EFG, también el triángulo $E'F'G'$ estará contenido en el EFG y reciprocamente. Además el área cubierta por el punto P en este conjunto de traslaciones es igual al área cubierta por otro punto cualquiera, por ejemplo el E', invariablemente unido a K. Pero el área cubierta por E' en todas las posiciones en que el triángulo $E'F'G'$ está contenido en el EFG es el área del triángulo $E E_1 G_1$ de la figura, construido tomando $FE_1 = F'E'$ y $GG_1 = G'G'$.

Veamos de calcular el área T_1 del triángulo $E E_1 G_1$ en función del área T de EFG y del área t de $E' F' G'$. Supondremos que el triángulo $E' F' G'$ es siempre menor que el dado EFG, o sea, que T_1 tiene siempre un valor positivo.

Se tiene

$$\sqrt{\frac{T_1}{T}} = \frac{EE_1}{EF}$$

de donde

$$1 - \sqrt{\frac{T_1}{T}} = \frac{EF - EE_1}{EF} = \frac{F'E'}{FE} = \sqrt{\frac{t}{T}}.$$

y por tanto

$$\sqrt{T} - \sqrt{t} = \sqrt{T_1}$$

de donde

$$T_1 = T + t - 2\sqrt{Tt}.$$

La última raiz cuadrada desaparece introduciendo el perímetro λ del triángulo $E' F' G'$ y el perimetro L del triángulo EEG. En efecto es

$$\frac{t}{T} = \frac{\lambda^2}{L^2}$$

y por lo tanto

$$\sqrt{T\,t} = \frac{T}{L}\,\lambda\,. \tag{5.2}$$

Por consiguiente (5.1) se puede escribir

$$T_1 = T + t - 2\,\frac{T}{L}\,\lambda\,. \tag{5.3}$$

En esta expresión T y L son constantes mientras que t y λ son funciones del ángulo φ.

La integración de la expresión (5.3) para calcular la medida de las posiciones de K en las cuales está contenida en el interior del triángulo EFG dará según lo dicho.

$$m\,(K \subset E\,F\,G) = \int_0^{2\pi} T_1\, d\,\varphi\,,$$

o sea, sustituyendo el volor (5.3)

(5.4)

$$m\,(K \subset EFG) = 2\pi\,T + \int_0^{2\pi} t\,d\varphi - 2\,\frac{T}{L}\int_0^{2\pi} \lambda\,d\varphi\,.$$

Este resultado se puede enunciar:

Sean dados una figura convexa K y un triángulo EFG. Para cada dirección φ se puede circunscribir a K un triángulo semejante al EFG que tengan uno de sus lados paralelo a la dirección φ; sea $t\,(\varphi)$ el área y $\lambda\,(\varphi)$ el perímetro de este triángulo. En el supuesto de que todos estos triángulos, al variar φ, sean siempre menores que el EFG, la medida del conjunto de posiciones de K en las cuales está contenida en el interior del triángulo EFG está dada por (5.4) siendo T el área y L el perímetro del triángulo EFG.

6. CASO PARTICULAR Y APLICACION A UN PROBLEMA DE PROBABILIDADES GEOMETRICAS. La medida (5.4) toma una forma simple en el caso de ser el triángulo EFG equilátero y K una figura convexa perteneciente al tipo de las que tienen todos los triángulos equiláteros circunscritos iguales entre si.

En efecto, hay una clase de figuras convexas, estudiadas principalmente por MEISSNER y FUJIWARA (5) y que podemos llamar *curvas triangulares* que gozan de la propiedad

(5) Buenos Aires, Seminario Matemático de la Facultad de Ciencia. Literatura sobre estas curvas se puede ver en BONNESEN-FENCHEL, *Teorie der konvexen Korper*, Ergebnisser der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Berlin, 1934, pág. 139 - 140.

de tener congruentes entre si todos los triángulos equiláteros circunscritos, es decir, figuras convexas tales que pueden girar dentro de un triángulo equilátero manteniéndose siempre tangentes a los tres lados. El ejemplo mas simple de esta clase de figuras convexas es la indicada en la fig. 4 compuesta de dos arcos de circunferencia formando un huso. Todas las curvas paralelas exteriores a esta. serán también *curvas triángulares.*

Para estas curvas t y λ son constantes y por tanto se tiene

$$m\ (K \subset EFG) = 2\pi\ T + 2\pi\ t - 4\pi \frac{T}{L}\ \lambda\ . \tag{6.1}$$

Para hacer una aplicación de este resultado a un problema de probabilidades geométricas, supongamos el plano cubierto por una red de triángulos equiláteros como indica la fig. 5

Dada una figura convexa triangular K, cuyos triángulos equiláteros circunscritos sean menores que los triángulos que forman la red, la medida de las poseciones de K en las cuales es interior de un triángulo de la red está dada por (6.1). Por otra parte, tal como dijimos en el Nº 4 la medida total de las posiciones diferentes de K respecto de la red considerada es igual a $2\,\pi\,T$ siendo T el área de los triángulos equiláteros de la red.

Por tanto se tiene:

Supongamos el plano cubierto por una red de triángulos equiláteros de área T y perímetro L tal como indica la figura 5. Dada una figura convexa triangular K cuyos triángulos equiláteros circuscritos tengan el área t y el perímetro λ, la probabilidad de que al ser arrojada al azar sobre el plano queda sin cortar a ninguna recta de la red es

$$P_0 = 1 - 2\frac{\lambda}{L} + \frac{t}{T} .$$

y por tanto la probabilidad de que corte a alguna recta será

$$P = 1 - P_0 = 2\frac{\lambda}{L} - \frac{t}{T} .$$