CRÓNICA

Acta de la sesión celebrada el día 3 de Febrero de 1934.

Abierta la sesión bajo la presidencia de D. Juan López Soler, fué leída y aprobada el acta de la sesión anterior.

El Secretario da lectura a los balances de la Sociedad Matemática Española y de la Revista Matemática Hispano-Americana cerrados en 31 de Diciembre cuyo resumen es el que sigue: Ingresos por la Revista en 1933, 6.440,50 pesetas. Pagos por la Revista, 8.631,92. Déficit de la Revista, 2.191,42 pesetas. Ingresos de la Sociedad en 1933, 6.083,60 pesetas. Pagos de la Sociedad, 1.169,38 pesetas. Superávit de la Sociedad, 4.914,32 pesetas. Deducción del déficit de la Revista, 2.722,80 pesetas. Aumento por la existencia de Caja del año 1932, que eran 512,75 pesetas, da una existencia actual de 3.235,55 pesetas. Gastos comprometidos de papel e imprenta, 1.500 pesetas. Superávit líquido, 1.735,55 pesetas. Fueron aprobadas las cuentas por aclamación y se acordó por unanimidad un voto de gracias al Administrador.

Se acordó establecer tres premios para los solucionistas de los problemas y cuestiones que se propongan en la Revista. El primer premio consistirá en la suscripción gratuita por un año y en un donativo de libros por valor de 100 pesetas elegidos por mitad entre el premiado y la Redacción de la Revista. Los otros dos premios serán como el primero, con la diferencia de que el valor de los libros sea en cada uno de 50 pesetas.

Se nombró a los Sres. Puig, Barinaga y Gallego Díaz, para que formen una Comisión de propaganda.

Se dió cuenta de una comunicación del Consejo de cultura solicitando la propuesta de Jueces para Tribunales de oposiciones a cátedras de Matemáticas de Instituto y se acordó proponer a los Sres. Alvarez Ude y Barinaga y al señor Pineda como suplente.

El Sr. San Juan expuso un trabajo de investigación personal sobre unicidad de series asintóticas con varias observaciones respecto de los estudios realizados por Carleman y Ostrowski.

Y no habiendo más asuntos que tratar se levantó la sesión.

ACADEMIA DE CIENCIAS EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES DE MADRID

Programa de premios para el Concurso del año 1935.

Concurso con arreglo al artículo 43 de los Estatutos.

En él se adjudicará un premio al autor de la Memoria que desempeñe satisfactoriamente, a juicio de la misma Corporación, el tema siguiente:

«Algún progreso en la teoría de las Series divergentes».

Artículo 1.º Los premios de este Concurso que se adjudicarán, conforme lo merezcan, a las Memorias presentadas, serán de tres clases: premio propiamente dicho, accésit y mención honorífica.

Art. 2.º El premio consistirá en un diploma especial en que conste la adjudicación; una medalla de bronce dorada, exornada con el selló de la Academia, que en sesión pública entregará el Sr. Presidente de la Corporación a quien le hubiere merecido y obtenido o a persona que le represente; retribución pecuniaria, al mismo autor o concurrente premiado, de 2.000 pesetas; impresión por cuenta de la Academia, en la colección de sus Memorias, de la que hubiere sido laureada, y entrega, cuando esto se verifique, de 100 ejemplares al autor.

Art. 3.º El premio se adjudicará a la Memoria que no sólo se distinga por su relevante mérito científico, sino también por el orden y método de exposición de materias y redacción bastante esmerada, para que desde luego pueda procederse a su publicación.

Art. 4.º El accésit consistirá en diploma y medalla iguales a los del premio y adjudicado del mismo modo, en la impresión de la Memoria, coleccionada con las de la Academia, y entrega de los mismos 100 ejemplares al autor.

Art. 5.º El accésit se adjudicará a la Memoria poco inferior en mérito a las premiadas y que verse sobre el tema propuesto, o, a falta de término superior con que compararlo, a la que reuna condiciones científicas y literarias aproximadas, a juicio de la Corporación, a las impuestas para la adjudicación u obtención del premio.

Art. 6.º La mención honorífica se hará en un diploma especial análogo a las del premio y accésit, que se entregará también en sesión pública al autor o concurrente agraciado o persona que le represente.

Art. 7.º La mención honorífica se hará de aquella Memoria verdaderamente notable por algún concepto, pero que por no estar exenta de lunares e imperfecciones ni redactada con el debido esmero y necesaria claridad para proceder inmediatamente a su publicación, por cuenta y bajo la responsabilidad de la Academia, no se considere digna de premio ni de accésit.

Art. 8.º Las Memorias que se presenten optando a los premios ofrecidos en este Concurso se entregarán en la Secretaría de la Academia, dentro del plazo señalado y en pliegos cerrados, sin firma ni indicación del nombre del autor, pero con un lema perfectamente legible en el sobre o cubierta que sirva para diferenciarlas unas de otras. El mismo lema de la Memoria deberá ponerse en el sobre de otro pliego, también cerrado, dentro del cual constará el nombre del autor y las señas de su domicilio o paradero.

Art. 9.º De las Memorias o pliegos cerrados, el Secretario de la Academia dará, a las personas que lo presenten y entreguen, un recibo en que conste el lema que los distinga y el número de su presentación.

Art. 10. Los pliegos señalados con los mismos lemas que las Memorias dignas de premio o accésit, se abrirán en la sesión en que se acuerde o decida otorgar a sus autores uno u otra distinción y recompensa, y el Sr. Presidente proclamará los nombres de los autores laureados en aquellos pliegos contenidos.

Art. 11. El pliego señalado con el mismo lema que la Memoria digna de mención honorífica, no se abrirá hasta que su autor, conformándose con la decisión de la Academia, conceda su beneplácito para ello. Para poder obtenerle se publicará en la *Gaceta de Madrid* el lema de la Memoria en este último concepto premiada, y, en el improrrogable término de dos meses el autor presentará en Secretaría el recibo que de la misma dependencia obtuvo como concurrente al certamen, y otorgará por escrito la venia que se le pide para dar publicidad a su nombre. Transcurridos los dos meses de plazo que para llenar esta formalidad se conceden, sin que nadie se dé por aludido, la Academia entenderá que el autor de aquella Memoria renuncia a la honrosa distinción que legítimamente le corresponde.

Art. 12. Los pliegos que contengan los nombres de los autores no premiados ni con premio propiamente dicho, ni con accésit, ni con mención honorífica, se quemarán en la misma sesión en que la falta de mérito de las Memorias respectivas se hubiese declarado. Lo mismo se hará con el pliego cerrado correspondiente a la Memoria agraciada con mención honorífica cuando, en los dos meses de que trata la regla anterior, el autor no hubiere concedido permiso para abrirlo.

CONDICIONES GENERALES

Artículo 1.° Este concurso quedará abierto el día de la publicación de este programa en la *Gaceta de Madrid,* y cerrado el 31 de Octubre de 1935, a las diecisiete horas; plazo dentro del cual se recibirán en la Secretaría de la Academia, Valverde, 24, los trabajos e instancias que se presenten.

Art. 2.° Podrán acudir al concurso los autores españoles, portugueses e iberoamericanos que presenten trabajos que satisfagan a las condiciones establecidas en este programa. Se exceptúan los individuos numerarios de la Corporación.

Madrid 1.° de Abril de 1934.

El Secretario general,
JOSÉ MARÍA TORROJA.

Organización del Seminario Matemático de la Facultad de Ciencias.

BASE 1.ª—Será objeto del Seminario Matemático de la Facultad de Ciencias:

1.° La ampliación de los conocimientos generales dados en los cursos con desarrollo de temas monográficos y redacción de cuestiones, construcción de modelos e iniciación en el estudio de libros y revistas modernas.

2.° La orientación matemática y didáctica de los futuros Profesores mediante lectura de libros y revistas adecuados, prácticas docentes y clases de prueba con crítica de Profesores y alumnos.

3.° La iniciación en la investigación matemática para un grupo selecto de alumnos de los dos últimos cursos.

BASE 2.ª—Los cursos orientados en estas tres direcciones se titularán respectivamente: 1.° Trabajos de Seminario elemental. 2.° Idem ídem didáctico, 3.° Idem ídem superior.

BASE 3.ª—Los trabajos de Seminario elemental serán obligatorios para todo alumno de la sección de ciencias exactas, pudiendo realizarlos en el segundo o tercer año de la carrera y no se admitirá la matrícula en el cuarto año sin haberlos aprobado.

Los trabajos de Seminario didáctico y de Seminario superior tendrán carácter voluntario y la aprobación de uno u otro podrá sustituir a una asignatura de las que tengan carácter optativo en el cuarto curso del plan actual.

Se solicitará de la superioridad que para la admisión en las oposiciones a cátedra de matemáticas secundarias se exija la aprobación de los trabajos del seminario didáctico y que para matricularse en el Doctorado en ciencias exactas se exija la aprobación previa de los trabajos de seminario superior. Se solicitarán asimismo las facilidades necesarias para efectuar las prácticas docentes de los alumnos del seminario didáctico en establecimientos de enseñanza secundaria.

BASE 4.ª—La organización del seminario estará a cargo de una Comisión formada por tres Catedráticos numerarios de la sección de ciencias exactas, la cual propondrá antes de terminar cada curso las personas que hayan de dirigir los trabajos del año académico siguiente.

Para poder iniciar inmediatamente los trabajos en el presente curso, siquiera sea de una manera parcial, la Facultad nombrará desde luego la Comisión de seminario y encargará por esta vez a un Profesor de dirigir durante el presente curso los trabajos de seminario elemental con una remuneración igual a la de cátedra y a cargo de los fondos especiales destinados al seminario.

BASE 5.ª—En el local destinado al seminario matemático y con cargo a los fondos especiales de éste, se formará una biblioteca de libros y revistas necesarios para la formación docente de los futuros Profesores, además de utilizar preferentemente todo el material de la biblioteca general de la Facultad. Se organizará asimismo, tomando como base las máquinas y modelos ya existententes en la Facultad, un museo y laboratorio matemático donde puedan los alumnos ejercitarse en el manejo de máquinas y construir modelos que se sumarán a la colección.

BASE 6.ª—De la vigilancia de las máquinas y colecciones de modelos, libros y revistas, se encargará un ayudante propuesto por la Comisión entre los licenciados en ciencias exactas y alumnos más distinguidos de los últimos cursos, el cual recibirá y entregará al cesar en su misión todas las colecciones bajo inventario. Su remuneración anual será de 2.000 pesetas con un horario mínimo de servicio de tres horas diarias, durante las cuales facilitará a los alumnos las orientaciones científicas y bibliográficas que soliciten, complementando así la labor del Profesor.

Nueva Revista.

El Centro de Estudios Científicos de San Sebastián ha comenzado en este mes de Marzo la publicación de una nueva Revista dedicada a la Sección de Física y Química, que como la correspondiente a la Sección de Matemáticas, será mensual.

El primer número contiene trabajos de M. Velasco, José Oñate, E. Muñoz Mena y V. Borderas.

Dedica también una parte de la misma a problemas propuestos destinados a los alumnos de los diversos Centros docentes.

Esta plausible iniciativa del Centro de estudios Científicos de San Sebastián será seguramente acogida por el público español con el interés que merece.

Cuestiones propuestas.

113.—Dado un tetraedro de vértices A, B, C, D, y un plano π, hallar el lugar geométrico de los puntos desde los cuales se proyectan dichos vértices sobre π según los de un cuadrilátero A', B', C', D' inscriptible en una circunferencia. Demostrar que hay *una* dirección según la cual dicho tetraedro se proyecta sobre π en un cuadrilátero inscriptible en una circunferencia.

E. Linés.

***

114.—En el plano. ¿Qué clase de conjunto es el complementario de un dominio simplemente conexo respecto de un continuo en el que está contenido?

S. R.

Cuestión resuelta.

Núm. 106.—*Demostrar la imposibilidad de construir con regla y compás un triángulo dadas las longitudes de sus bisectrices, en el caso general.*
Condiciones en que es posible.

E. Linés.

Solución.--Vamos a considerar únicamente el caso particular de ser: 1.° *Las tres bisectrices dadas interiores*. 2.° *El triángulo que se pide isósceles*, es decir, el caso en que dos de las bisectrices dadas sean iguales. Demostrando que aun en este caso el problema es en general irresoluble con la regla y el compás, la primera parte de la cuestión propuesta queda solucionada. No obstante queda en pie todavía la discusión general de los casos particulares en que esta construcción es posible, discusión que hacemos solamente para el caso mencionado del triángulo isósceles y bisectrices interiores.

Sea w_a la bisectriz desigual o sea la correspondiente al ángulo opuesto a la base y w la bisectriz de uno cualquiera de los ángulos iguales.

Tomamos como incógnita

$$m = \tan \alpha$$

siendo α el semiángulo de la base.

Si λ es la mitad de la base del triángulo tendremos

$$\tan 2\alpha = \frac{w_a}{\lambda} = \frac{2m}{1-m^2}$$

En el sistema de coordenados que tiene por ejes la base y la altura del triángulo, los coordena del punto de intersección de la bisectriz w con el lado opuesto son

$$x_1 = \lambda \frac{w_a - m\lambda}{w_a + m\lambda} \qquad y_1 = m \frac{2\lambda w_a}{w_a + m\lambda}$$

de donde

$$w^2 = (x_1 + \lambda)^2 + y_1^2 = \frac{4\lambda^2 w_a^2}{(w_a + m\lambda)^2}(1 + m^2)$$

o bien, teniendo en cuenta [1] y trasponiendo términos

$$4 w_a^2 (1 - m^2)^2 (1 + m^2) = w^2 m^2 (3 - m^2)^2$$

Poniendo

$$m^2 = x \qquad \frac{4 w_a^2}{w^2} = p \qquad [2]$$

y haciendo operaciones, queda en definitiva

$$(p - 1) x^3 + (6 - p) x^2 - (9 + p) x + p = 0 \qquad [3]$$

con lo cual el problema geométrico se ha transformado en otro de naturaleza algebraica: estudiar la reducibilidad de esta ecuación en el campo de los números racionales:

a) Si $p = 1$, la ecuación queda reducida a una de 2.° grado que nos da para m valores de los cuales, teniendo en cuenta que las bisectrices dadas se suponen las tres interiores, sólo es aceptable

$$m = \frac{1}{5}\sqrt{25 - 10\sqrt{5}}$$

valor que coincide con el del semilado del decágono regular circunscrito a la circunferencia de radio unidad, luego:

En el caso de ser $w = 2 w_a$ *el problema es resoluble con regla y compás y el triángulo resultante tiene por ángulos iguales el central correspondiente a un decágono regular, o sea 36°.*

Curioso resultado que puede comprobarse también geométricamente.

b) Suponiendo ya $p \neq 1$, vamos a estudiar detenidamente la función [3].

$$f(x) \equiv (p - 1) x^3 + (6 - p) x^2 - (9 + p) x + p = 0 \qquad [3]$$

Desde luego, dando a x un valor cualquiera entero, racional o irracional cuadrático, obtendremos una ecuación de primer grado en p que si resuelta da un valor mayor que cero, para él la ecuación [3] es reducible, y, por tanto, el problema resoluble con regla y compás. Existen, pues, como es natural, infinitos casos en que esto es posible.

Vamos a demostrar que esto no ocurre siempre. Supongamos a p entero y positivo y veamos ya con estas restricciones cuáles son sus únicos valores para los que [3] es irresoluble con irracionales cuadráticos.

Seguiremos el método general (*). Sean $x_1 = 1$ y $x_2 = -1$ dos valores arbitrarios, pero que en este caso son convenientes por ser

$$f(1) = -4 \qquad f(-1) = 16$$

independientes de p.

Toda función $\alpha(u)$ de primer grado y coeficientes enteros que tome los valores $\alpha(+1) = u_1$ y $\alpha(-1) = u_2$ puede ponerse en la forma

$$\alpha(x) = u_1 \frac{x+1}{2} - u_2 \frac{x-1}{2} = \frac{(u_1 - u_2)x + u_1 + u_2}{2}$$

debiendo ser u_1 y u_2 de la misma paridad.

Si $f(x)$ es reducible, siendo de tercer grado será divisible por un polinomio $\alpha(x)$ de primer grado con coeficientes enteros. Luego $f(x_i)$ será divisible por $\alpha(x_i) = u_i$, que nos dice que u_1 y u_2 deben ser elegidos entre los divisores de igual paridad de $f(1)$ y $f(-1)$. Los divisores de $f(1) = -4$ son ± 1, ± 2, ± 4 y los de $f(-1) = 16$ son ± 1, ± 2, ± 4, ± 8, ± 16. Prescindiendo del caso $u_1 = u_2$ en que $\alpha(x)$ se reduce a una constante se tienen los siguientes casos posibles:

u_1	u_2	$\alpha(x)$	u_1	u_2	$\alpha(x)$
1	-1	x	2	-8	$5x-3$
2	-2	$2x$	2	16	$-7x+9$
2	4	$-x+3$	2	-16	$9x-7$
2	-4	$3x+1$	4	2	$x+3$
2	8	$-3x+5$	4	-2	$3x+1$

Las demás combinaciones entre u_1 y u_2 así como aquellas que se obtienen al tomar $-u_1$ dan para $\alpha(x)$ los mismos valores anteriores multiplicados por 2 o por -1.

Entre estos diez valores de $\alpha(x)$ hay que ver si hay alguno que divida a $f(x)$ para valores enteros de p. Observemos que si

$$f(x, p) = P(x)(a + b)$$

será

$$f\left(-\frac{b}{a}, p\right) = 0 \qquad [4]$$

(*) Ver por ejemplo NETTO: «*Vorlesungen über Algebra*». T. I, página 51.

o sea, tenemos que buscar para qué soluciones de las ecuaciones $\alpha(x) = 0$ hay valores enteros de p que cumplen la condición [4]. Siendo

$$p = x \frac{x^2 - 6x + 9}{x^3 - x^2 - x + 1}$$

esto es sólo posible para

$$\alpha(x) = 3x - 1 \qquad x = \frac{1}{3} \qquad p = 4$$

en cuyo caso

$$w = w_a$$

el triángulo es equilátero.

Con este resultado y el anteriormente obtenido llegamos a la conclusión: *El problema de construir un triángulo isósceles dadas las tres bisectrices interiores no es, en general, resoluble con regla y compás. Si la razón*

$$p = \frac{4 w_a^2}{w^2}$$

es un número entero, únicamente esta construcción será posible en los casos de ser $p = 1$ *o* $p = 4$. De una manera parecida se demuestra haciendo en la ecuación [3] el cambio

$$p = \frac{4}{q} \qquad q = \frac{w^2}{w_a^2}$$

que la ecuación resultante solo es reducible para $q = 1$ y $q = 4$.

Es decir, con la condición de ser una cualquiera de las bisectrices parte alícuota de otra no igual, el problema solo es construíble en los dos casos citados.

L. A. Santaló.