ACOTACIONES PARA LA LONGITUD DE UNA CURVA O PARA EL NUMERO DE PUNTOS NECESARIOS PARA CUBRIR APROXIMADAMENTE UN DOMINIO

L. A. SANTALÓ

INTRODUCCIÓN. Sea M un subconjunto limitado del espacio euclidiano de n dimensiones. Fijado un $\epsilon > 0$ consideremos una curva rectificable tal que cualquier punto de M diste $\leqq \epsilon$ de algún punto de la curva. Si esta curva tiene longitud mínima entre todas las que gozan de la propiedad anterior, se dice que es ϵ — ergódica respecto M y su longitud $L(\epsilon)$, considerada como función de ϵ, se llama función ergódica para M [6], [7], (*).

Para el caso del plano, $n = 2$, R. KERSHNER [6] ha estudiado el comportamiento asintótico de $L(\epsilon)$ para $\epsilon \to 0$, demostrando que

$$\lim_{\epsilon \to 0} 2\,\epsilon\, L = med.\ \overline{M} \tag{1}$$

indicando com $\overline{M}$ la clausura del conjunto M.

Para espacios de dimensión $n \geqq 3$ no parece posible un resultado tan preciso como el (1), sin embargo se puede obtener una acotación superior e inferior del limite análogo al del primer miembro de (1). Esto es lo que hacemos en la primera parte § **1**, de esta nota, llegando a las acotaciones (15), (16).

En la segunda parte, § **2**, estudiamos un problema en cierto modo parecido al anterior. Es el siguiente: dado un subconjunto limitado M del espacio euclidiano n — dimensional y un valor fijo $\epsilon > 0$, sea $N(\epsilon)$ el mínimo número de puntos necesarios para que cualquier punto de M diste $\leqq \epsilon$ de alguno de ellos. Nuestro objeto consiste en estudiar la función $N(\epsilon)$, obteniendo acotaciones superiores para la misma. Supondremos en este caso, para obtener un resultado mas preciso, que M es un dominio simplemente conexo del espacio euclidiano n — dimensional, limitado por una hipersuperficie para la cual estén definidos los $n - 1$ radios de curvatura principales en cada punto. Obtendremos así

(*) Estos paréntesis [ ] se refieren a la bibliografia al final.

las fórmulas (24) y (25) que dan acotaciones respectivamente para el número de hipercubos de arista η o hiperesferas de radio ϵ con los cuales se puede cubrir totalmente el mencionado dominio. Para el plano, el caso particular de (24) para $n=2$, ha sido dado por HADWIGER [5], el cual obtiene también una acotación mejor que la (25) pero que no parece posible generalizar a un espacio de dimensión $n > 2$.

§ **1.** ACOTACIONES PARA LA LONGITUD DE UNA CURVA QUE DEBE CUBRIR APROXIMADAMENTE UN CONJUNTO DE PUNTOS.

1. **Fórmulas conocidas.** Representaremos por $V_n(\eta)$ y $O_n(\eta)$ respectivamente el volumen y el área de la esfera n — dimensional de radio η.

Es sabido que [4, p. 580]

$$V_n(\eta) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}\, \eta^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} \quad , \quad O_n(\eta) = \frac{n\, \pi^{\frac{n}{2}}\, \eta^{n-1}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} \tag{2}$$

siendo Γ la función «gamma» de Euler.

Sea C una curva rectificable cualquiera de longitud L y v_i el volumen llenado por los puntos del espacio tales que la esfera n — dimensional de radio η que los tiene por centro corta a C en i puntos. Entonces, es sabido que [8, p. 643],

$$v_1 + 2v_2 + 3v_3 + \ldots = 2\, L\, V_{n-1}(\eta)\ . \tag{3}$$

Además, si v es el volumen llenado por los puntos del espacio que distan $\leqq \eta$ de algún punto de C, vale la desigualdad [8, p. 643]

$$v \leqq L\, V_{n-1}(\eta) + V_n(\eta)\ . \tag{4}$$

Aplicando esta desigualdad (4) y siguiendo un camino análogo al seguido por KERSHNER [6] para el caso del plano, vamos a ver como se llega a las acotaciones (15), (16), que queremos demostrar.

2. **Acotación inferior.** Si C es una curva ϵ — ergódica respecto el subconjunto acotado M, es evidente que el volumen v que figura en (4), para $\eta = \epsilon$, contiene a M y por tanto

$$med\ \overline{M} \leqq L\, V_{n-1}(\epsilon) + V_n(\epsilon)$$

de donde

$$\liminf_{\epsilon \to 0} L\, V_{n-1}(\epsilon) \geqq med\ \overline{M} \tag{5}$$

3. **Acotación superior.** Supongamos un paralelepípedo rectángulo Q del espacio euclidiano n—dimensional; sean $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ sus aristas; con las mismas letras indicaremos también las longitudes respectivas.

Para fijar las ideas supongamos el caso $n = 3$. Supongamos los ejes x, y, z elegidos de manera que los vértices del paralelepípedo Q sean (000), $(a_1 00)$, $(0 a_2 0)$, $(00 a_3)$, $(a_1 a_2 0)$, $(a_1 0 a_3)$, $(0 a_2 a_3)$, $(a_1 a_2 a_3)$. Llevemos sobre a_2 segmentos sucesivos de longitud 2η hasta contener el extremo a_2 y lo mismo sobre la arista a_3. Sea, por ejemplo,

$$2(\upsilon - 1)\eta \leqq a_2 < 2\upsilon\eta \quad , \quad 2(\mu - 1)\eta \leqq a_3 < 2\mu\eta \ . \tag{6}$$

Trazando por los puntos de división planos perpendiculares a la arista respectiva tendremos el paralelepipedo rectángulo Q descompuesto en otros paralelepípedos congruentes entre si, de altura a_1 y sección recta cuadrados de lado 2η. Construyamos entonces la línea siguiente:

Por el punto $(0, \eta, \eta)$ trazamos una recta paralela a la arista a_1 hasta encontrar la cara opuesta $x = a_1$ de Q. Unimos luego este punto (a_1, η, η) con el $(a_1, \eta, 3\eta)$ mediante una semicircunferencia situada en el plano $y = \eta$. Por este punto se traza una paralela a la arista a_1 hasta encontrar de nuevo la cara opuesta $x = 0$. El punto obtenido $(0, \eta, 3\eta)$ se une con $(0, \eta, 5\eta)$ mediante otra semicircunferencia situada en el plano $y = \eta$ y se vuelve al plano $x = a_1$ por otra paralela a a_1. Se procede así sucesivamente hasta llegar al segmento que une los puntos $(0, \eta, (2\mu - 1)\eta)$, $(a_1, \eta, (2\mu - 1)\eta)$. Supongamos que este segmento esté enlazado con los anteriores por el punto $(0, \eta, (2\mu - 1)\eta)$ y por tanto que $(a_1, \eta, (2\mu - 1)\eta)$ sea el extremo libre; unimos este extremo libre con el punto $(a_1, 3\eta, (2\mu - 1)\eta)$ mediante una semicircunferencia situada en el plano $z = (2\mu - 1)\eta$, y procedemos luego de la misma manera anterior trazando sobre el plano $y = 3\eta$ una linea análoga a la trazada sobre $y = \eta$, es decir, compuesta de segmentos paralelos a la arista a_1 que unen puntos $(0, 3\eta, (2i - 1)\eta)$, $(a_1, 3\eta, (2i - 1)\eta)$ y semicircunferencias situadas en el plano $y = 3\eta$ que unan convenientemente los extremos. Una vez terminado con el plano $y = 3\eta$ pasamos al $y = 5\eta$ y así sucesivamente hasta llegar al $y = (2\upsilon - 1)\eta$.

De esta manera se tiene trazada una curva H que tiene las dos propiedades siguientes:

α). *Ninguna esfera de radio η puede cortar a esta curva en mas de dos puntos.* Esto se comprende facilmente, puesto que los segmentos paralelos a la arista a_1 que forman parte de H distan entre si $\geqq 2\eta$ y las partes curvas son semicircunferencias de radio η empalmadas con ángulo nulo con los segmentos.

β). *Todo punto del paralelepípedo Q dista $\leqq \sqrt{2}\,\eta$ de algún punto de la curva*. En efecto, los segmentos paralelos a la arista a_1 que forman parte de H son ejes de simetria de paralelepípedos rectángulos cuya sección recta son cuadrados de lado $2\,\eta$ y por tanto los cilindros de revolución que tienen los mismos ejes y radio $\sqrt{2}\,\eta$ comprenden a todos estos paralelepípedos y por consiguiente a Q.

Este procedimiento de construcción de la curva H puede extender-se por inducción a n dimensiones. En efecto, supongamos construida la curva H que goza de las propiedades α) y β) según el modelo anterior, para los paralelepípedos rectángulos del espacio euclidiano $(n-1)$—dimensional. Sea Q el paralelepípedo de n dimensiones de aristas $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ construido sobre los ejes $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$. Los hiperplanos $x_1 = (2k+1)\eta$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ determinan en él como sección, paralelepípedos rectángulos de $(n-1)$ dimensiones. En ellos se construye la curva H y luego se enlazan los extremos sucesivos de las curvas correspondientes a cada paralelepípedo mediante semicircunferencias. Se tiene entonces en Q una curva H con las propiedades α) y β). La única modificación es que ahora, el valor $\sqrt{2}\,\eta$, bueno para el espacio de 3 dimensiones, debe sustituirse por $\sqrt{n-1}\;\eta$, puesto que este es el radio de la esfera $(n-1)$— dimensional circunscrita al hipercubo de $n-1$ dimensiones y de arista 2η.

Apliquemos la fórmula (3) a la curva H. Según la propiedad α) es $i \leqq 2$ y por tanto, llamando L_H a la longitud de H es

$$2\,L_H\,V_{n-1}(\eta) = v_1 + 2v_2 = 2\,(v_2 + v_1) - v_1 \tag{7}$$

de donde, llamando $D_H(\eta) = v_1 + v_2$ al volumen llenado por los puntos que distan $\leqq \eta$ de algún punto de la curva H será

$$D_H(\eta) = L_H\,V_{n-1}(\eta) + \frac{v_1}{2} \geqq L_H\,V_{n-1}(\eta)\,. \tag{8}$$

Siendo evidentemente $D_H(\eta) \leqq D_H(\sqrt{n-1}\;\eta)$, poniendo $\sqrt{n-1}\;\eta = \epsilon$ resulta

$$D_H(\epsilon) \geqq L_H\,V_{n-1}\left(\frac{\epsilon}{\sqrt{n-1}}\right). \tag{9}$$

Toda la curva H es interior al paralelepípedo rectángulo paralelo al Q a distancia ϵ, por tanto

$$D_H(\epsilon) \leqq (a_1 + 4\epsilon)(a_2 + 4\epsilon) \dots (a_n + 4\epsilon) . \tag{10}$$

Por otra parte, puesto que la curva particular H goza de la propiedad de que cualquier punto de Q dista de ella $\leqq \eta \leqq \sqrt{n-1}\ \eta = \epsilon$, llamando L a la longitud de una curva ϵ — ergódica respecto Q, será $L \leqq L_H$. De esta desigualdad y de (9), (10) se deduce

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sup L\, V_{n-1}\left(\frac{\epsilon}{\sqrt{n-1}}\right) \leqq q \tag{11}$$

siendo $q = a_1 a_2 a_3 \dots a_n$ el volumen del paralelepípedo Q.

Demostrada esta desigualdad (11) para paralelepípedos rectángulos, es fácil pasar a un subconjunto cualquiera M del espacio euclidiano, siguiendo el mismo método, muy simple, de KERSHNER (loc. cit).

Fijado un $\delta > 0$, se puede encontrar un número m de paralelepípedos rectángulos Q_i, de volumen q_i, tales que $\sum_1^m Q_i \supset \overline{M}$ y

$$med. \sum_1^m Q_i = \sum_1^m q_i \leqq med. \overline{M} + \delta . \tag{12}$$

Tracemos para cada Q_i una curva ϵ — ergódica de longitud $L_i(\epsilon)$ y unamos el extremo de la correspondiente a Q_i con el comienzo de la correspondiente a Q_{i+1} por un segmento s_i. Se tiene así una curva tal que cualquier punto de M dista de ella $\leqq \epsilon$ y para la cual vale, según (11):

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sup\left(\sum_1^m (L_i + s_i)\right) V_{n-1}\left(\frac{\epsilon}{\sqrt{n-1}}\right) \leqq \sum_1^m q_i + V_{n-1}\left(\frac{\epsilon}{\sqrt{n-1}}\right) \lim_{\varepsilon \to 0} \sup \sum_1^m s_i . \tag{13}$$

Fijado δ, queda fijado m y por tanto el número de los segmentos s_i, que tienen además longitud finita por suponer M acotado. Por tanto el segundo sumando del último miembro de (13) tiende a cero con ϵ.

Si $L(\epsilon)$ es la longitud de una curva ϵ — ergódica de M es $L(\epsilon) \leqq \sum_1^m (L_i + s_i)$. Con esto, de (13) y (12) se deduce

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sup L(\epsilon)\, V_{n-1}\left(\frac{\epsilon}{\sqrt{n-1}}\right) \leqq med\ \overline{M}, \tag{14}$$

que es la desigualdad que generaliza (11) a conjuntos cualesquiera.

t. XVI, n. 2, 30 de Junho de 1944.

Como $V_{n-1}(\epsilon) = \left(\sqrt{n-1}\right)^{n-1} V_{n-1}\left(\frac{\epsilon}{\sqrt{n-1}}\right)$, reuniendo (5) y (14) tenemos las acotaciones

$$\liminf_{\varepsilon \to 0} L(\epsilon)\, V_{n-1}(\epsilon) \geqq med\, \overline{M} \tag{15}$$

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} L(\epsilon)\, V_{n-1}(\epsilon) \leqq \left(\sqrt{n-1}\right)^{n-1} med\, \overline{M}\,. \tag{16}$$

Para el caso del plano, $n = 2$. estas desigualdades se reunen en la desigualdad única (1) de KERSHNER.

§ 2. ACOTACIÓN PARA EL NÚMERO MÍNIMO DE HIPERCUBOS O DE HIPERESFERAS NECESARIOS PARA CUBRIR UN DOMINIO DEL ESPACIO EUCLIDIANO N — DIMENSIONAL.

1. **Fórmulas conocidas.** Sean D_0 y D_1 dos dominios del espacio euclidiano n — dimensional. Supongamos que la frontera de D_i $(i = 1, 2)$ sea una hipersuperficie que tenga en cada punto definidos sus $n - 1$ radios principales de curvatura $R_1^{(i)}, R_2^{(i)}, R_3^{(i)}, \ldots, R_{n-1}^{(i)}$.

Supongamos que D_0 sea fijo y D_1 móvil. Para determinar la posición de D_1 fijemos primeramente uno de sus puntos P_1. Luego hay que fijar la posición de n ejes ortogonales entre si, concurrentes en P_1 e invariablemente unidos con D_1. Uno de estos n ejes se determinará dando una dirección por P_1, o sea un punto sobre la superficie de la esfera n — dimensional de centro P_1 y radio unidad: sea dO_n el elemento de área de esta esfera (será un elemento $n - 1$ dimensional). Los otros $n - 1$ ejes se encuentran en el hiperplano perpendicular al eje ya considerado; uno de ellos se determinará, por tanto, fijando un punto sobre la superficie de la esfera $n - 1$ dimensional de radio unidad y centro P_1 situada en dicho hiperplano: sea dO_{n-1} el elemento de área correspondiente. Así sucesivamente vemos que la posición de D_1 queda determinada dando P_1 y $n - 1$ puntos respectivamente sobre las superficies de las esferas de $n, n - 1, n - 2, \ldots, 3, 2$ dimensiones. Para medir un conjunto de posiciones del dominio móvil D_1 se toma la integral, extendida al conjunto de posiciones diversas, de la forma diferencial

$$dD_1 = dP_1\, dO_n\, dO_{n-1}\, dO_{n-2} \cdots dO_3\, dO_2\,, \tag{17}$$

siendo dP_1 el elemento de volumen n — dimensional correspondiente al punto P_1 y dO_i el elemento de área de la esfera unidad del espacio euclidiano i — dimensional.

Esta forma (17) es la llamada *densidad cinemática*. Ver [1, p. 63], [3].

Sea K_i $(i = 0, 1)$ la curvatura total de D_i. Como es sabido esta curvatura total es igual al área de la representación esférica de la superficie de D_i, es decir, el área cubierta sobre la esfera n — dimensional por los extremos de los radios paralelos a las normales a la hipersuperficie que limita D_i. Sea, además, K_{01} la curvatura total de la intersección de D_0 y D_1. Esta K_{01} será una función de la posición de D_1. Es conocida la siguiente *fórmula fundamental de la medida cinemática*

$$\int K_{01}\, dD_1 = O_2\, O_3 \ldots O_n \left\{ K_0\, v_1 + K_1\, v_0 + n \sum_{h=1}^{n-1} \binom{n}{h} W_h^{(0)} W_{n-h}^{(1)} \right\} \quad (18)$$

extendida la integración a todas las posiciones de D_1; cuando D_1 no tiene punto común con D_0 es $K_{01} = 0$. En (18) es O_i el área de la esfera de radio unidad en el espacio de i dimensiones y su valor está dado en (2), v_0 y v_1 son los volumenes de D_0 y D_1 respectivamente, y los $W_h^{(i)}$ $(i = 0, 1)$ son los invariantes de curvatura definidos por

$$W_h^{(i)} = \frac{1}{n\binom{n-1}{n-h}} \int_{F_i} \left\{ \frac{1}{R_1}\, \frac{1}{R_2} \cdots \frac{1}{R_{h-1}} \right\}_i d\, f_i \quad (19)$$

indicando df_i el elemento de área de D_i y con el paréntesis $\{\ \}$ la función elemental simétrica de orden h, de las curvaturas principales de la superficie de D_i. Para esta fórmula fundamental (18), ver el trabajo de Chern y Yen [3]. Hemos cambiado un poco la notación para adaptarla a la del libro de Bonnesen-Fenchel [2, p. 63]. Para $n = 2, 3$ la fórmula fundamental (18) se encuentra también en Blaschke [1, p. 99].

2. **Cálculo de los invariantes W_h para el hipercubo de arista** η. Cuando la frontera de un dominio tiene aristas o zonas donde los radios de curvatura R_j no están definidos, los invariantes W_h no se pueden calcular por la fórmula (19). A veces esta dificultad se salva calculando los W_h correspondientes al cuerpo paralelo exterior a distancia ϵ y hallando el valor de los mismos para $\epsilon \to 0$. Necesitamos nosotros calcular los invariantes W_h correspondientes a un hipercubo de arista η; para ello seguiremos un sencillo artificio.

Llamando c_0 al número de vértices del hipercubo, c_1 al número de aristas, c_2 al número de caras de dos dimensiones, y en general c_h al número de caras de h dimensiones, es

$$c_h = 2^{n-h} \binom{n}{h} \quad , \quad h = 0, 1, 2, \ldots, n-1 \,. \quad (20)$$

El volumen del cuerpo paralelo exterior a distancia ϵ de un hipercubo de arista η vale

$$\eta^n + \sum_{h=1}^{n} \frac{1}{2^h} V_h \, c_{n-h} \, \eta^{n-h} \, \epsilon^h \tag{21}$$

siendo las c_{n-h} las (20) e indicando V_h el volumen de la esfera de radio unidad del espacio euclidiano de h dimensiones. La fórmula (21) se demuestra facilmente observando que cortando cada cara c_{n-h} por un subespacio lineal perpendicular de h dimensiones, queda la sección recta de un hipercilindro de la cual hay que considerar, como parte exterior al hipercubo dado, un sector de área i — dimensional igual a $\frac{1}{2^h} V_h$. El volumen del sector de hipercilindro correspondiente a la cara de $n-h$ dimensiones que contribuye a formar el cuerpo paralelo exterior a distancia ϵ será el producto de $\frac{1}{2^h} V_h$ por la medida η^{n-h} de la cara. Sumando estos sectores de hipercilindros para todas las caras se obtiene (21).

Por otra parte se sabe [2, p. 49] que el volumen de un cuerpo paralelo exterior a otro cuerpo convexo a distancia ϵ, se expresa en función de los invariantes W_h por

$$W_0 + \sum_{h=1}^{n} \binom{n}{h} W_h \, \epsilon^h . \tag{22}$$

Identificando los coeficientes de (21) y (22) después de substituir en (21) los valores (20), se obtiene

$$W_h = V_h \, \eta^{n-h}. \tag{23}$$

Esta ecuación nos da el valor de los invariantes W_h para un cubo n — dimensional de arista η; como siempre, V_h es el volumen de la esfera de h dimensiones y radio unidad.

3. **Acotación superior para el número mínimo de hipercubos de arista η necesarios para cubrir un dominio D_1.** Supongamos el espacio euclidiano de n dimensiones dividido en hipercubos iguales de arista η por hiperplanos paralelos a las caras de un sistema de coordenadas rectangulares.

Consideremos la fórmula (18) para el caso de ser D_0 un hipercubo de arista η. En lugar de suponer un solo hipercubo fijo y el dominio D_1 móvil a todas las posiciones posibles en que tiene algún punto común con él, tal como se supuso en la fórmula (18), se puede suponer que D_1 solo puede ocupar las posiciones en que su punto P_1 pertenece a un hipercubo fijo de aquellos en que se ha dividido el espacio y contar entonces en cada posición, como valor de K_{01}, la suma de las curvaturas totales de todas las intersecciones de D_1 con los mismos hipercubos. La fórmula (18) subsiste. (Ver [9, p. 42] para $n = 3$).

Supongamos que D_1 sea un dominio topologicamente equivalente a la hiperesfera n – dimensional. Entonces $K_1 = O_n$ y si D_1 en una posición determinada corta a N hipercubos, será $K_{01} \geqq N\, O_n$ valiendo la igualdad unicamente cuando la intersección de D_1 con cada uno de los hipercubos del espacio sea un dominio simplemente conexo, en cuyo caso la curvatura total de cada una de estas intersecciones parciales valdra O_n. Prescindiendo del coeficiente K_{01}, la integral de dD_1 extendida a todas las posiciones en que P_1 es interior a un hipercubo de arista η, según (17), vale $O_2\, O_3\, O_4 \ldots O_n\, \eta^n$. Según esto, se deduce

$$\overline{N} = \frac{\int N\, dD_1}{\int dD_1} \leqq \frac{\int K_{01}\, dD_1}{O_2\, O_3 \ldots O_n^2\, \eta^n},$$

o bien substituyendo em (18) los valores (23), siendo $K_0 = K_1 = O_n$, $v_0 = \eta^n$,

$$\overline{N} \leqq 1 + \frac{v_1}{\eta^n} + \frac{n}{O_n} \sum_{h=1}^{n-1} \binom{n}{h} \frac{1}{\eta^h} V_h\, W_{n-h}^{(1)}. \tag{24}$$

En esta expresión $\overline{N}$ es el *valor medio* del número de hipercubos del espacio que tienen algún punto común con D_1 al considerar todas las posiciones posibles de este dominio. Por tanto habrá siempre alguna posición particular en que D_1 se podrá cubrir por un número de hipercubos de arista η igual o menor que $\overline{N}$. Luego (24) *es la acotación que nos limita superiormente el número mínimo de hipercubos de arista η necesarios para cubrir un dominio D_1.*

Ejemplos. Para $n = 2$, caso del plano, es $2 W_1 = L$ (longitud) y $v_1 = F$ (área). Además $V_1 = 2$, $V_2 = \pi$, $O_2 = 2\pi$. Por tanto

$$\overline{N} \leqq 1 + \frac{F}{\eta^2} + \frac{2}{\pi}\,\frac{L}{\eta}.$$

Esta acotación es debida a HADWIGER [5].

Para el espacio ordinario, $n = 3$, es: $3\,W_1 = F$ (área), $3\,W_2 = M$ (integral de curvatura media), $V_3 = \frac{4}{3}\pi$, $O_3 = 4\pi$ y poniendo $v_1 = V$ (volumen) queda

$$\overline{N} \leqq 1 + \frac{V}{\eta^3} + \frac{3}{4}\,\frac{F}{\eta^2} + \frac{3}{2\pi}\,\frac{M}{\eta};$$

lo cual nos da, por tanto, una acotación para el número mínimo de cubos de arista η necesarios para cubrir un cuerpo de volumen V, área F e integral de curvatura media M.

4. **Acotación superior para el número mínimo de hiperesferas de radio ϵ necesarias para cubrir un dominio D_1.** Obtenida la acotación (24), si a cada hipercubo le circunscribimos una esfera, cuyo radio será $\epsilon = \frac{\sqrt{n}}{2}\,\eta$, *tendremos una acotación para el número mínimo de hiperesferas de radio ϵ necesarias para cubrir un dominio D_1 conocidos sus invariantes de curvatura $W_h^{(1)}$.* Haciendo en (24) $\eta = \frac{2}{\sqrt{n}}\,\epsilon$ resulta

$$\overline{N}\ (\text{esferas}) \leqq 1 + \frac{v_1\, n^{\frac{n}{2}}}{2^n\, \epsilon^n} + \frac{n}{O_n} \sum_{h=1}^{n-1} \binom{n}{h} \frac{n^{\frac{h}{2}}}{(2\epsilon)^h}\, V_h\, W_{n-h}^{(1)}\,. \quad (25)$$

Por ejemplo, para el espacio ordinario, $n = 3$, resulta

$$\overline{N}\ (\text{esferas}) \leqq 1 + \frac{3\sqrt{3}}{8}\,\frac{V}{\epsilon^3} + \frac{9}{16}\,\frac{F}{\epsilon^2} + \frac{3\sqrt{3}}{4\pi}\,\frac{M}{\epsilon}\,.$$

Para el plano, $n = 2$, resulta una acotación peor que la dada por HADWIGER [5]; ello es debido a que HADWIGER considera el plano dividido en hexágonos regulares en lugar de cuadrados, lo cual no es posible de generalizar a espacios de dimensión $n > 2$.

BIBLIOGRAFIA

[1] BLASCHKE, W., *Vorlesungen über Integralgeometrie*, Hamburger Mathematische Einzelschriften, N.° 20-22, 1936-37.

[2] BONNESEN, T — FENCHEL. W., *Theorie der konvexen Körper*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Berlin, 1934.

[3] CHERN, Shiing-shen — YIEN, Chih-ta, *Sulla formula principale cinematica dello spazio ad n dimensioni*, Bollettino della Unione Matematica Italiana, Serie II. Año II, 1940, pág. 434.

[4] FRANKLIN, Ph., *A treatise on advanced calculus*, New York, 1940.

[5] HADWIGER, H., *Ueberdeckung ebener Bereiche durch Kreise und Quadrate*, Commentarii Mathematici Helvetici, 13, 1941.

[6] KERSHNER, R., *Ergodic curves and the ergodic function*, American Journal of Mathematics, vol. 62, 1940, pp. 324-345.

[7] MARTIN, M. H., *Ergodic curves*, American Journal of Mathematics. vol. 5', 1936, pp. 727-734.

[8] SANTALÓ, L. A., *A theorem and an inequality referring to rectifiable curves*, American Journal of Mathematics, vol. 63, 1941, pp. 635-644.

[9] SANTALÓ, L. A., *Geometria integral de figuras ilimitadas*, Publicaciones del Instituto de Matemáticas de la Universidad del Litoral, vol. I, n. 2, Rosario, 1939.

ROSARIO, INSTITUTO DE MATEMÁTICAS DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL, NOVIEMBRE 1943.

Apresentado pelo Academico F. M. de Oliveira Castro na sessão realisada em 14 de Dezembro de 1943.