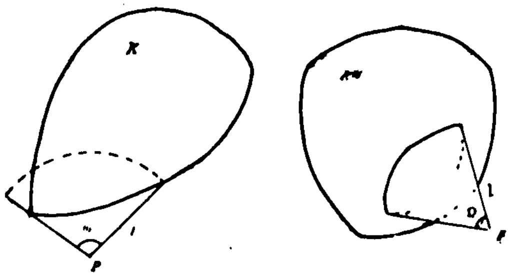
UNA FÓRMULA INTEGRAL PARA LAS FIGURAS CONVEXAS EN EL PLANO Y EN EL ESPACIO

El objeto de esta nota es establecer por vía geométrica elemental unas expresiones integrales para las figuras planas convexas y para los cuerpos también convexos del espacio ya obtenidas por nosotros y por camino diferente en otros lugares [1].

Sea una figura plana convexa cualquiera K limitada por un contorno de longitud L. Por todo punto P exterior a K como centro describimos un círculo de radio l. Los radios de este círculo (limitados en la circunferencia) se dividen en dos clases: aquellos que cortan a K y los que no le cortan. Los que cortan a K llenan un cierto ángulo de vértice P que llamaremos ω' (fig. 1, a). La propiedad a que nos hemos referido y que demostramos en I, es la siguiente:



a   b

Fig. 1.

Siendo x, y las coordenadas del punto P, se verifica:

$$\iint \omega \, d x \, d y = 2 \, l L \qquad [1]$$

extendida la integración a todo el exterior de K. Naturalmente que sólo es $\omega \neq 0$ para los puntos comprendidos entre K y su paralelo exterior a distancia l.

En II generalizamos este resultado al espacio.

Sea en él un cuerpo convexo K^* cualquiera de área S. Por todo punto $P(x, y, z)$ del espacio exterior K^* como centro se traza una

---

(1) El caso del plano está en: L. A. Santaló, «Geometría Integral 4». Sobre la medida cinemática en el plano, *Abh aus dem Math.*, Sem. Hamburg, **11**, 227. 1935. El caso del espacio en: L. A. Santaló, «Integral geometrie 5», Über das Kinematische Mass im Raum, *Actualités Scientifiques et Industrielles*, pág. 17, Hermann et Cie. Paris, 1935. También puede verse el caso del plano en: W. Blaschke, «Vorlesungen über Integral geometrie», *Erstes Heft*. *Hamburger Mathematische Einzelschriften*, **20**, 28, 1936.

esfera de radio l. Los radios de la misma (limitados en la superficie esférica) que cortan a K^* llenan un ángulo sólido de medida Ω (fig. 1, *b*). Lo que pretendemos demostrar es entonces la expresión:

$$\iiint \Omega\, d x\, d y\, d z = 2 \pi l S \tag{2}$$

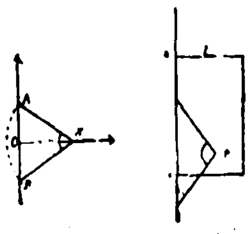
extendida también la integración a todo el espacio exterior a K^*. Como antes también, naturalmente, sólo será $\Omega \neq 0$ cuando P esté entre K^* y su paralelo exterior a distancia l.

Finalmente, en III enunciamos, sin demostrar, otros resultados algo más generales referentes a la misma cuestión.

I

Para llegar al caso general, veamos sucesivamente algunos casos particulares:

a) Por todo punto X de un eje de abscisas que diste del origen menos de l, tracemos dos segmentos



a Fig. 2. *b*

$$X A = X B = l$$

cuyos otros extremos estén sobre el eje de ordenadas (fig. 2, *a*). Sea ω el ángulo que forman entre sí. Consideremos la integral

$$\int_0^l \omega\, d x = 2 \int_0^l \operatorname{arc} \cos \frac{x}{l}\, d x$$

que se calcula fácilmente con el cambio $x = l \cos t$, y da:

$$\int_0^l \omega\, d x = 2 l \tag{3}$$

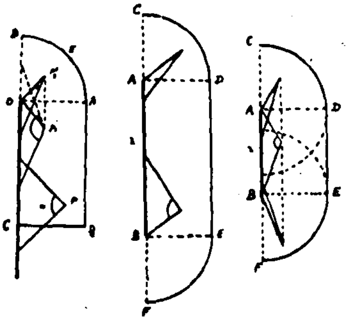
b) Sea ahora una recta indefinida $a b$ y un rectángulo que en ella se apoya de base l y altura $\lambda = b - a$. A cada punto $P\ (x, y)$ interior al rectángulo hacemos corresponder el ángulo $\omega (x, y)$ que forman los dos segmentos de longitud l que le unen con la recta indefinida $a b$ (fig. 2, *b*). Extendida la integración a todo el rectángulo será:

$$\iint \omega\, d x\, d y = \int_a^l d y \int_0^l \omega\, d x = 2 \lambda l \tag{4}$$

c) En lugar de una recta, sea ahora una semirrecta indefinida de origen O. Consideremos la figura formada por el cuadrante del círculo $OBEA$ de radio l y centro O y el rectángulo $OADC$ de altura λ cualquiera (fig. 3, *a*). A todo punto de esta figura si, tal como P, su distancia a O es mayor que l, le asignamos el ángulo ω tal como ha sido definido en *b)*. Si dista de O menos que l, como ocurre con el P_1 de la figura, se le asigna el ángulo que forma el segmento que le une con O con aquél de longitud l que le une con la semirrecta indefinida. Llamaremos también ω a este ángulo. Nuestro objeto es calcular la integral de siempre

$$\iint \omega \, dx \, dy$$

extendida a la figura $BEADCO$. Para ello se observa que si al ángulo correspondiente a todo punto que diste de O menos de l, como el P_1, por ejemplo, se le añade el ángulo correspondiente al punto P'_1 simétrico del mismo respecto OA se tiene el ángulo que correspondería a P_1 si distase de O más de l. Es decir, el valor de la integral buscada es el mismo que se obtiene suponiendo una recta indefinida en lugar de la semirrecta y reduciendo el área de integración al rectángulo $OADC$, valor que ya se ha obtenido en *b)*. Luego también en este caso



a *b* *c*

Fig. 3.

$$\iint \omega \, dx \, dy = 2 l \lambda \qquad [5]$$

extendida la integración a toda el área $BEADCO$ y dando a $\omega(x, y)$ los valores especificados según la posición de $P(x, y)$.

d) Sea ahora un *segmento* AB de longitud λ, distinguiremos según sea $\lambda \geq 2l$ o $\lambda < 2l$.

Si $\lambda \geq 2l$ (fig. 3, *b*) considerando la figura $CDEFBA$ y repitiendo en ambos extremos lo dicho en *c)* se tiene que la integral

$$\iint \omega \, dx \, dy$$

extendida al interior de dicha figura vale también $2l\lambda$.

Si $\lambda < 2l$ (fig. 3, *c*) a todo punto P que diste más de l de alguno de los dos extremos del segmento pero del otro menos de l, ya sabemos por *c)* que habrá que añadirle el ángulo correspondiente a su simétrico respecto la perpendicular al segmento por el extremo más próximo a P. Pero en este caso hay también puntos que distan menos de l de los dos extremos. A su ángulo correspondiente (al que forman las dos rectas que le unen con los extremos del segmento), bastará añadirle los correspondientes a sus dos simétricos respecto de las perpendiculares en los extremos del segmento dado. En todo caso, la integral

$$\iint \omega \, d x \, d y$$

extendida a la figura $ACDEFB$ y donde ω tiene, según la posición de $P(x, y)$, uno u otro de los valores especificados en *c)*, vale también $2 l \lambda$.

e) Pasemos a considerar un ángulo de lados limitados con longitudes λ_1 y λ_2, respectivamente, y la figura $ACDEFGH$ que comprende a todos los puntos situados en la parte convexa de este ángulo, y cuyo distancia a él es igual o menor que l (fig. 4).

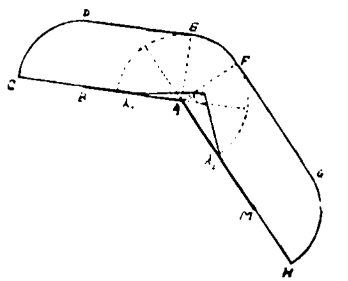


Fig. 4.

Por todo punto $P(x, y)$ interior a esta figura como centro trazamos un círculo de radio l y le asignamos el ángulo $\omega(x, y)$ que llenan los radios (limitados en la circunferencia) que cortan a la quebrada BAC De este modo, a puntos P que disten de A más de l el ángulo ω correspondiente ya sabemos que se complementa convenientemente según la manera indicada en *c)* o *d)*. Los puntos que distan de A menos de l y están situados en el sector EAF los unimos con A y el ángulo ω que les corresponde queda dividido en dos partes: el ω_1, que es el que correspondería a P según *c)* o *d)* referido al lado λ_1, y el ω_2 que le correspondería según el mismo criterio referido al lado de longitud λ_2. Luego la integral

$$\iint \omega \, d x d y$$

extendida a la figura $ACDEFGH$ equivale a la suma de las integrales análogas referidas a los lados λ_1 y λ_2, en las que ω tenga el valor definido en *c)*. Es decir:

$$\iint \omega \, d x \, d y = 2 l (\lambda_1 + \lambda_2) \qquad [6]$$

f) Si a uno de los extremos de la quebrada BAM anterior añadimos otro segmento de longitud λ_3 de manera que la quebrada total continúe siendo convexa y consideramos tal como en *e)* la figura que comprende a todos los puntos situados en la parte de plano hacia la cual esta quebrada es convexa y tales que su distancia a la misma sea igual o menor que l, el mismo razonamiento repetido en el nuevo vértice nos dá

$$\iint \omega \, dx \, dy = 2l(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) \qquad [7]$$

Luego, procediendo sucesivamente se tiene demostrada, para una *línea poligonal cerrada y convexa*, la fórmula [1] que nos proponiamos.

Si se supone ahora una línea plana, cerrada y convexa cualquiera de longitud L, la podemos aproximar en tanto como se quiera por poligonales inscritas, y como los ángulos ω de estas poligonales tienden también a los análogos en la curva, queda demostrada la [1] también en este caso.

II

En el espacio el procedimiento de demostración es exactamente el mismo. Sólo la dificultad de dibujar las figuras viene aumentada notoriamente, por lo que hemos prescindido de ellas, con lo cual naturalmente se hace necesaria un poco más de atención en la lectura.

Seguiremos distintos casos particulares análogos a los de I.

a) Sea un sistema de ejes coordenados rectangulares $O \cdot x, y, z$. Por cada punto P del eje z comprendido entre $z = 0$ y $z = l$ trazamos el cono de revolución formado por los segmentos de longitud l que le unen con el plano x, y. Llamemos Ω al ángulo sólido en el vértice de este cono y θ a la semiabertura. Se tiene:

$$\int_0^l \Omega \, dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\pi(1 - \cos\theta) \, l \operatorname{sen}\theta \, d\theta = \pi l. \qquad [8]$$

b) En el plano indefinido x, y consideremos un área f y el cilindro recto de altura l que la tiene por base. A todo punto interior $P(x, y, z)$ hacemos corresponder el ángulo sólido $\Omega(x, y, z)$ que forman los segmentos de longitud l que le unen con el plano

x, y. Extendida la integración al interior de este cilindro es

$$\iiint \Omega\, dx\, dy\, dz = \iint dx\, dy \int_0^l \Omega\, dz = \pi l f \qquad [9]$$

c) Sea ahora la parte indefinida de plano limitada por un ángulo $A\,O\,B$ (hágase la figura). Consideremos el conjunto de los puntos que, estando situados a un mismo lado del plano de este ángulo, distan de él menos o igual que l. Este conjunto está limitado por otra parte plana angular $A'\,O'\,B'$ paralela a la anterior a distancia l, más dos sectores de cilindros circulares de ejes $O\,A$ y $O\,B$ y más medio sector esférico de radio l y centro O. A la línea $A\,O\,B$ la llamaremos contorno. Entonces a todo punto P de este conjunto hacemos corresponder el ángulo sólido Ω que limitan los segmentos de longitud l que le unen con la parte de plano interior al ángulo $A\,O\,B$ o con el contorno del mismo si dista de él menos o igual que l. Veamos lo que ocurre con estos puntos P que distan del contorno $\leq l$. Sea, por ejemplo, P_1 uno de ellos. Si no está situado en ninguno de los sectores cilíndricos mencionados, existe otro punto P'_1 situado en uno de ellos y simétrico del P_1 respecto uno de los planos perpendiculares al plano del ángulo dado a lo largo de uno de los lados $O\,A$ u $O\,B$. Si P'_1 dista de O más de l y su ángulo sólido correspondiente se añade al de P_1, se tiene para éste uno igual al que le correspondería si en vez de un ángulo se supusiese un plano indefinido como en *b)*. Si P'_1 dista de O menos de l, entonces existe en el semisector esférico de vértice O un simétrico P''_1 de él, cuyo ángulo Ω correspondiente viene dividido en dos partes por el plano $P''_1\,O\,O'$; una de estas partes, sumada con el ángulo correspondiente a P'_1, da a éste el mismo valor que tendría si distase de O más de l, y estamos en el caso anterior.

Si en vez de un ángulo consideramos un polígono plano y el cuerpo conjunto de los puntos que, situados a un mismo lado de su plano, distan del polígono menos o igual que l, un razonamiento análogo al anterior en cada vértice del polígono y correspondiente al I, *d)*, nos dice que la integral

$$\iiint \Omega\, dx\, dy\, dz$$

extendida a este volumen y en la que $\Omega(x, y, z)$ representa el ángulo sólido de vértice $P(x, y, z)$ que forman los segmentos de longitud l que le unen con el interior de dicho polígono o con el contorno si dista de él menos que l, tiene el mismo valor que si, extendida la integración al cilindro recto de altura l y base el polígono en cuestión, se supusiese para la definición de Ω el plano indefinido. O sea, por *b)*, si f es el área del polígono, la integral dicha vale todavía $\pi l f$.

d) Sea ahora un ángulo triedro convexo $O \cdot A B C$. Consideremos la parte de espacio lugar geométrico de los puntos que, situados en la parte hacia la que el triedro vuelve su convexidad, distan del triedro una distancia igual o menor que l. Esta porción de espacio estará limitada por el triedro dado, más tres planos $A' O_1 B'$, $B' O_2 C'$ y C' y $O_3 A'$ paralelos a las caras del triedro, más tres sectores cilíndricos de ejes las aristas OA, OB y OC. y más la pirámide esférica cuyo ángulo en el vértice es el triedro $O \cdot O_1 O_2 O_3$ suplementario del dado.

A todo punto $P(x, y, z)$ le asignamos el ángulo sólido $\Omega(x, y, z)$ limitado por los segmentos de logitud l que lo unen con las caras del triedro dado, o con sus aristas si éstas distan de P menos de l. Se observa entonces que los ángulos de los puntos contenidos en los sectores cilíndricos dichos o en la pirámide esférica $O\, O_1\, O_2\, O_3$ sirven para completar los ángulos correspondientes a sus simétricos respecto los planos perpendiculares a las caras del triedro dado a lo largo de las aristas. Con esto la

$$\iiint \Omega \, dx \, dy \, dz$$

extendida al espacio comprendido entre el triedro $O \cdot A B C$ (limitadas sus caras por curvas AB, BC y CA cualquiera) y su superficie paralela exterior a distancia l, equivaldrá a la integral análoga extendida a sólo los espacios cilíndricos de bases OAB, OAC, OBC y altura l, pero asignando a $\Omega(x, y, z)$ el valor que le correspondería si las caras del triedro se supusiesen indefinidas en todas direcciones. O sea, llamando f_1, f_2, f_3, respectivamente, a las áreas de las caras limitadas del triedro es:

$$\iiint \Omega \, dx \, dy \, dz = \pi l (f_1 + f_2 + f_3). \qquad [10]$$

Repitiendo un razonamiento parecido en cada vértice de un cuerpo poliedro convexo, tendremos demostrada la fórmula [2] para este caso del cuerpo poliedro.

Como un cuerpo convexo se puede siempre aproximar por cuerpos poliedros *convexos* inscritos, cuya área tiende a la del cuerpo convexo y el ángulo Ω varia también, de una manera continua queda establecida [2] en el caso general.

III

Queremos terminar, finalmente, enunciando otros resultados algo más generales, cuya demostración geométrica no parece posible por los procedimientos anteriores, pero que por otro camino (en un trabajo que tenemos en preparación) hemos obtenido también sin dificultad. Son los siguientes:

En el plano:

En el caso de ser *l igual o mayor que el diámetro* de la figura convexa K, el ángulo ω puede descomponerse en dos, a saber: el ω_1 que llenan los radios de centro P y longitud l tales que, cortando a K, tienen el otro extremo también exterior, y el ω_2 que llenan aquellos radios cuyo otro extremo es interior a K. Entonces se verifica:

$$\iint \omega_1 \, dx \, dy = 2 l L - 2 \pi F$$

$$\iint \omega_2 \, dx \, dy = 2 \pi F$$

siendo F el área de K y estando las integraciones extendidas al exterior de esta figura.

En el espacio:

Con la misma condición de ser *l igual o mayor que el diámetro* del cuerpo convexo K^*, se puede hacer con el ángulo Ω una descomposición análoga en el Ω_1 que forman los radios de longitud l y centro P que atraviesan al cuerpo convexo y el Ω_2 que forman aquellos otros radios cuyo segundo extremo queda interior a él. Entonces vale:

$$\iiint \Omega_1 \, dx \, dy \, dz = \pi l S - 4 \pi V$$

$$\iiint \Omega_2 \, dx \, dy \, dz = 4 \pi V$$

siendo V el volumen de K^*.

L. A. SANTALÓ.