CONTRIBUCIÓN AL ESTUDIO MATEMÁTICO DE LA ABSORCIÓN DE LA ENERGÍA CÓSMICA POR LA ATMÓSFERA

En los trabajos teóricos que efectúa el ilustre ingeniero y aeronauta D. Emilio Herrera, como preliminares a su proyectada ascensión a la estratosfera, y al estudiar la absorción de la energía cósmica por la atmósfera, se ha visto conducido a la integral, cuyo estudio me ha propuesto,

$$\int_0^\infty e^{-(x^2+kx)}(a+bx^2)\,dx \qquad [1]$$

Interesa al Sr. Herrera tener idea de la variación de esta integral al variar k, parámetro variable con la altura, nulo en el límite de la atmósfera, y esencialmente positivo en el seno de ella, siendo próximo a 6 en la superficie de la tierra. En cuanto a a y b, son ciertas constantes positivas.

Ante todo, se desprende fácilmente de la naturaleza de la función subintegral, la convergencia de la misma, cualquiera que sea k, ya que al tender x a infinito la función subintegral es un infinitésimo de orden superior al de $1 : x^n$ cualquiera que sea $n\,(>0)$. Es decir, representa una función $F(k)$, para todo valor de k, función que se trata precisamente de determinar.

Es más, esta convergencia, como la de toda integral de la forma

$$\int_0^\infty e^{-(x^2+kx)}P(x)\,dx \qquad (P\text{, polinomio entero y positivo}) \qquad [2]$$

es uniforme en todo el intervalo de variación de k (positivo); en efecto:

$$\left|\int_l^\infty e^{-(x^2+kx)}P(x)\,dx\right| < \int_l^\infty e^{-x^2}P(x)\,dx$$

y esta segunda integral puede hacerse $<\varepsilon$ para toda $l \geq L\,(L>0$ *independiente de* k) ya que $\int_0^\infty e^{-x^2}P(x)\,dx$ tiene sentido. Y como las derivadas de [1] respecto de k, obtenidas derivando bajo el signo integral, siguen siendo integrales del tipo [2], uniformemente convergentes, podemos afirmar que la función propuesta $F(k)$ es continua, así como sus sucesivas derivadas que podrán calcularse por derivación bajo el signo integral (*)

Descompongamos ahora la función en dos integrales

$$a f(k) = a \int_0^\infty e^{-x^2} e^{-kx}\, dx \qquad b\, \varphi(k) = b \int_0^\infty x^2 e^{-x^2} e^{-kx}\, dx \quad [3]$$

que definen, análogamente, funciones continuas y derivables por derivación bajo el signo integral.

Integremos la primera por partes

$$f(k) = -\frac{1}{k} e^{-kx} e^{-x^2} \Big|_0^\infty - \frac{2}{k} \int_0^\infty e^{-x^2} e^{-kx}\, x\, dx \qquad [4]$$

Pero, derivando $f(k)$ se tiene [3]

$$f'(k) = -\int_0^\infty e^{-x^2} e^{-kx}\, x\, dx$$

y sustituyendo en [4]

$$f(k) = \frac{1}{k} + \frac{2}{k} f'(k)$$

ecuación diferencial lineal a la que tiene que satisfacer $f(k)$

$$f'(k) - \frac{k}{2} f(k) = -\frac{1}{2}$$

y que da por integración

$$f(k) = e^{\frac{k^2}{4}} \left[-\frac{1}{2} \int_0^k e^{-\frac{k^2}{4}}\, dk + C \right]$$

Ahora bien, $f(k)$ se reduce para $k = 0$ a la integral de las probabilidades: $f(0) = \int_0^\infty e^{-x^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, según se sabe; lo que determina $C = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Luego, en definitiva,

$$f(k) = \frac{1}{2} e^{\frac{k^2}{4}} \left[-\int_0^k e^{-\frac{k^2}{4}}\, dk + \sqrt{\pi} \right]$$

En cuanto a la segunda integral $\varphi(k)$ se comprueba fácilmente

(*) V. Goursat, *Analyse Mathématique*, t. I, pág. 232, 1923.

que es la segunda derivada de $f(k)$. Calculándola,

$$\varphi(k) = f''(k) = \frac{-k}{4} + e^{\frac{k^2}{4}}\left(\frac{1}{4} + \frac{k^2}{8}\right)\left[-\int_0^k e^{-\frac{k^2}{4}}\,dk + \sqrt{\pi}\right]$$

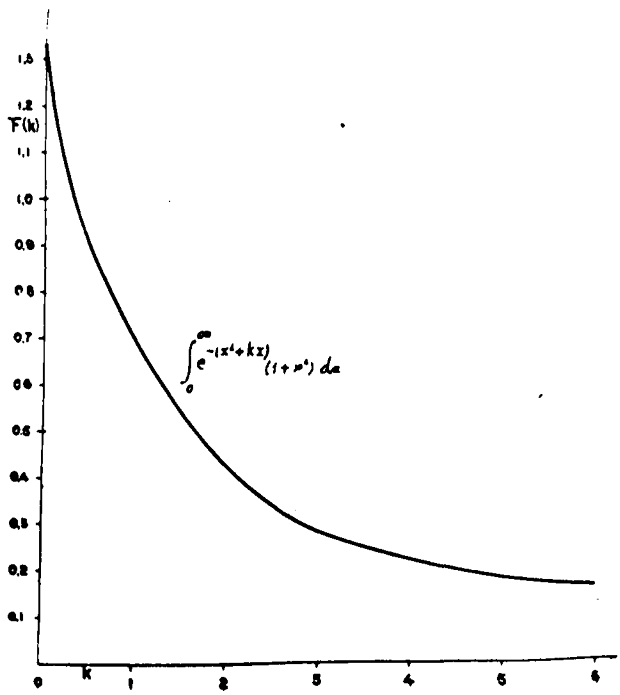
y sumándola a $f(k)$, previa multiplicación respectiva por b y a, resulta, en definitiva, la función propuesta por el Sr. Herrera, expresable en la forma:

$$F(k) = \frac{-kb}{4} + e^{\frac{k^2}{4}}\left(\frac{2a+b}{4} + \frac{bk^2}{8}\right)\left[-\int_0^k e^{-\frac{k^2}{4}}\,dk + \sqrt{\pi}\right]$$

o sea, disponiéndola para el cálculo numérico,

$$F(k) = \frac{-b}{2}\,\frac{k}{2} + e^{\left(\frac{k}{2}\right)^2}\left(\frac{2a+b}{4} + \frac{b}{2}\left(\frac{k}{2}\right)^2\right).\sqrt{\pi}.\left[-\Phi\left(\frac{k}{2}\right)+1\right]$$

en donde $\Phi(x)$ representa la integral de los errores $\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\,dt$, función cuyas tablas son bien conocidas; con auxilio de ellas y de la regla de cálculo hemos construído la curva $F(k)$, para dar idea de su variación en el intervalo $0 \leq k \leq 6$. para $a = b = 1$.



NOTA.—La colección «Sammlung von Formeln der reinen und angewandten Mathematik», de Laska, da como valor de

$$\int_0^\infty e^{-x^2+px}\,dx = \frac{1}{2}\,e^{\frac{p^2}{4}}\sqrt{\pi}\,,$$

que no concuerda con nuestro resultado; pero salta a la vista que este valor es erróneo, por variar la integral al cambiar el signo de p. Nos hemos dado cuenta de este error al querer comprobar, antes de publicar este sencillo cálculo, si alguna de las integrales tratadas estaba ya tabulada.

P. PUIG ADAM.