

Sur quelques problèmes de probabilités géométriques,

par

L. A. SANTALÓ à Rosario, Rép. Argentina.

Si on jette au hasard sur le plan où il y a un réseau uniforme (§2, par exemple figs. 6, 7, 8, 9) une ligne de longueur et forme quelconque on peut obtenir dans tous les cas la *valeur moyenne* du nombre de points d'intersection avec le réseau⁽¹⁾. Mais dans le cas où la ligne est simplement un segment de droite pas trop long peut obtenir, dans beaucoup de cas, non seulement la valeur moyenne si non la *probabilité* d'avoir un certain nombre de points d'intersection. L'objet de ce travail est de déterminer cette probabilité dans quelques cas particuliers, c'est à dire, de déterminer la probabilité de ce qu'un segment jeté au hasard sur un réseau de la forme des figures 6, 7, 8, 9 et 11 ait un nombre déterminé de points d'intersection.

§1. Mesure de quelques ensembles de segments.

1. **Densité cinématique.** La position d'un segment de droite orienté sur le plan est déterminée par les deux coordonnées x, y de l'une de ses extrémités et l'angle φ qu'il forme avec une direction fixe.

Pour mesurer des ensembles des segments de la même longueur on prend

$$(1) \quad \mathfrak{M} = \int dx dy d\varphi,$$

c'est à dire, l'intégrale sur l'ensemble considéré, de l'expression différentielle $dK = dx dy d\varphi$ qu'on appelle *densité cinématique*⁽²⁾.

Par un changement de variables on voit que cette densité cinématique peut être exprimée aussi par

$$(2) \quad dK = dp d\theta dt,$$

où (fig. 1) p et θ sont les coordonnées normales de la droite qui

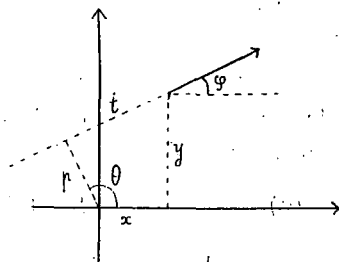


Fig. 1.

(1) L. A. Santaló: Geometría Integral 31. Sobre valores medios y probabilidades geométricas, Hamburg Abhandlungen 1939.

(2) W. Blaschke: Vorlesungen über Integralgeometrie. I, 1936, pag. 2.

contient le segment et t est la coordonnée qui fixe l'origine du segment sur cette droite.

2. **Mesure des segments qui coupent une figure convexe.** En prenant l'expression (2) de la densité cinématique, pour mesure de l'ensemble des segments de longueur l qui coupent la figure convexe K on trouve

$$(3) \quad \mathfrak{M} = \int dp d\theta dt = \int (\sigma + l) dp d\theta,$$

où σ représente la longueur de la corde que la droite du segment détermine sur K (fig. 2). En appliquant deux formules connues⁽²⁾:

$$(4) \quad \int \sigma dp d\theta = 2\pi F,$$

$$\int dp d\theta = 2L,$$

on obtient la mesure cherchée

$$(5) \quad \boxed{\mathfrak{M} = 2(\pi F + LL)}$$

où F est l'aire, L la longueur de la figure convexe K .

3. **Mesure des segments orientés totalement contenus dans une figure convexe.** Soit une figure convexe K et un segment orienté \vec{S} de longueur l . Nous voulons calculer l'intégral (1) sur tout l'ensemble des segments de longueur l qui sont contenus dans K .

Prenons la forme (2) de la densité cinématique. En appelant σ la longueur de la corde que la droite contenant le segment \vec{S} détermine sur K , on peut intégrer dt et on obtient

$$(6) \quad \mathfrak{M}_l = \int dp d\theta dt = \int_{\sigma \geq l} (\sigma - l) dp d\theta.$$

Pour chaque valeur de θ , si AB et CD (fig. 3) sont les cordes de longueur l correspondantes à cette direction, on aura

$$(7) \quad \int_{\sigma \geq l} \sigma dp d\theta = \int_0^{2\pi} (\text{aire } ABEDCF) d\theta,$$

$$\int_{\sigma \geq l} l dp d\theta = \int_0^{2\pi} (\text{aire } ABCD) d\theta.$$

Si on représente par Φ l'aire de la part couverte de hachures dans la figure, c'est à dire,

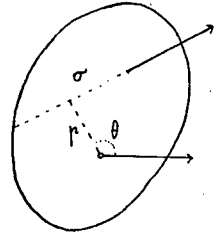


Fig. 2.

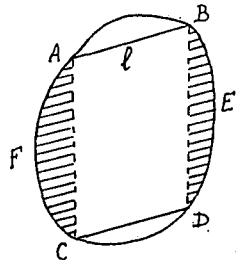


Fig. 3.

l'aire comprise entre la figure K et le parallélogramme $ABCD$, on a donc

$$(8) \quad \mathfrak{M}_i = \int_0^{2\pi} \Phi d\theta$$

L'intégration du deuxième membre de cette égalité n'est pas en général facile. Nous allons la calculer dans quelques cas particuliers.

4. **Cas du cercle.** Nous voulons calculer l'intégrale (8) dans le cas où la figure K est un cercle de rayon r . Si la longueur du segment est $l \geq 2r$, la mesure \mathfrak{M}_i de l'ensemble des segments qui sont à l'intérieur du cercle est évidemment nulle. Si $l \leq 2r$, on voit que l'aire Φ de (8) est constante et égale à

$$(9) \quad \Phi = \pi r^2 - 2r^2 \arcsin \frac{l}{2r} - l \sqrt{r^2 - \frac{l^2}{4}}$$

On a donc, pour mesure des segments de longueur $l (l \leq 2r)$ qui sont à l'intérieur du cercle de rayon r :

$$(10) \quad \mathfrak{M}_i = 2\pi \left(\pi r^2 - 2r^2 \arcsin \frac{l}{2r} - l \sqrt{r^2 - \frac{l^2}{4}} \right)$$

5. **Cas du parallélogramme.** Pour pouvoir calculer facilement l'intégrale (8) dans le cas où la figure K est un parallélogramme, il faut supposer que la longueur l du segment orienté \vec{S} est égale ou inférieure à la plus petite hauteur du parallélogramme. Dans ces conditions il y aura dans chaque direction segments \vec{S} contenus dans K . En posant $PS = a$, $PQ = b$, pour chaque valeur de $\theta \leq \hat{P}$ on peut calculer (fig. 4)

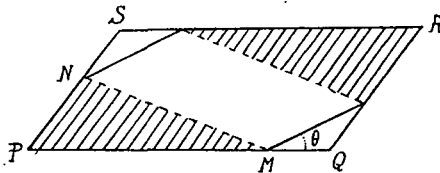


Fig. 4.

$$(11) \quad \begin{aligned} PM &= b - l \cos \theta + \frac{l}{\tan P} \sin \theta, \\ PN &= a - \frac{l}{\sin P} \sin \theta. \end{aligned}$$

L'aire Φ de la formule (8) est égale à deux fois l'aire du triangle NPM , c'est à dire,

$$(12) \quad \Phi = \overline{PM} \cdot \overline{PN} \sin \hat{P} = F - lb \sin \theta - la \sin (\hat{P} - \theta) \\ + l^2 \sin \theta \cos \theta - \frac{l^2}{\tan g P} \sin^2 \theta$$

d'où

$$(13) \quad \int_0^P \Phi d\theta = \hat{P} \cdot F + (a+b)l \cos \hat{P} - (a+b)l + \frac{l^2}{2}(1 - \hat{P} \cot \hat{P}),$$

F représente l'aire du parallélogramme.

En faisant de même pour θ variant de \hat{P} à π on trouve

$$(14) \quad \int_P^\pi \Phi d\theta = (\pi - \hat{P})F - (a+b)l \cos \hat{P} - (a+b)l \\ + \frac{l^2}{2}[1 + (\pi - P) \cot \hat{P}].$$

En faisant la somme de (13) et (14) et en multipliant par deux pour obtenir l'intégration de θ à 2π , on a

$$(15) \quad \mathfrak{M}_1 = 2 \left[\pi F - 2(a+b)l + \frac{l^2}{2}(2 + (\pi - 2\hat{P}) \cot \hat{P}) \right]$$

Dans le cas où le parallélogramme est un rectangle de côtés a et b et toujours dans l'hypothèse de $l \leq a$, $l \leq b$ on a

$$(16) \quad \mathfrak{M}_1 = 2[\pi ab - 2(a+b)l + l^2]$$

5. Cas du triangle. Nous supposons que l est inférieur ou égal à la plus petite des hauteurs du triangle. Pour chaque θ la valeur de l'aire Φ de (8) est l'aire du triangle AMN de la figure 1. On aura

$$(17) \quad \Phi = \frac{1}{2} \overline{AM} \cdot \overline{AN} \sin A = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{l \sin (B + \theta)}{c \sin B} \right] bc \sin A.$$

L'intégration de 0 à π , on peut la supposer divisée en trois parties de 0 à A , de 0 à B et de 0 à C , correspondantes aux trois angles du triangle. On aura

$$(18) \quad \int_0^A \Phi d\theta = \frac{1}{2} bc \sin A \left[A + \frac{l^2}{2c^2 \sin^2 B} \right. \\ \left. \times (A + \sin C \cos C + \sin B \cos B) - \frac{2l}{c \sin B} (\cos B + \cos C) \right]$$

Mais, dans le triangle ABC on a

$$(19) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2T = bc \operatorname{sen} A = ac \operatorname{sen} B \\ \quad = ab \operatorname{sen} C, \\ a = b \cos C + c \cos B, \\ b = c \cos A + a \cos C, \\ c = a \cos B + b \cos A, \end{array} \right.$$

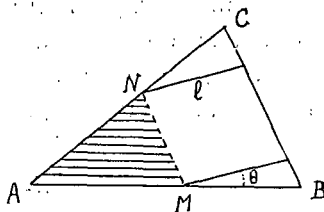


Fig. 5.

où T représente l'aire du triangle. Avec ces égalités, (18) s'écrit:

$$(20) \quad \int_0^A \Phi d\theta = T\hat{A} + \frac{1}{4}l^2 \left[\frac{aA}{c \operatorname{sen} B} + \frac{a \cos C}{b} + \frac{a \cos B}{c} \right] - al(\cos B + \cos C).$$

Les relations (19) donnent en outre

$$(21) \quad \frac{aA}{c \operatorname{sen} B} = A \cot C + A \cot B,$$

donc, finalement

$$(22) \quad \int_0^A \Phi d\theta = T\hat{A} + \frac{l^2}{4} \left[A \cot B + A \cot C + \frac{a \cos B}{c} + \frac{a \cos C}{b} \right] - al(\cos B + \cos C).$$

De même

$$(23) \quad \int_0^B \Phi d\theta = T\hat{B} + \frac{l^2}{4} \left[B \cot C + B \cot A + \frac{b \cos C}{a} + \frac{b \cos A}{c} \right] - bl(\cos C + \cos A),$$

$$(24) \quad \int_0^C \Phi d\theta = T\hat{C} + \frac{l^2}{4} \left[C \cot A + C \cot B + \frac{c \cos A}{b} + \frac{c \cos B}{a} \right] - cl(\cos A + \cos B).$$

En faisant la somme de (22), (23) et (24) et en multipliant par deux puisque l'intégration (8) doit s'étendre de 0 à 2π , on trouve:

$$(25) \quad \mathfrak{M}_i = 2\pi T - 2lL + \frac{l^2}{2} \sum_{A, B, C} ((\pi - A) \cot A + 1)$$

où $L = a + b + c$.

Comme chaque segment non orienté donne lieu à deux segments orientés, si on veut la mesure des segments *non orientés* contenu dans une figure convexe, on doit diviser par 2 les expressions antérieures (10), (15) et (25).

§2. Réseaux uniformes.

Nous dirons que le plan est couvert par un *réseau uniforme* de lignes, dans le cas où il est subdivisé par figures finites congruente qui remplissent tout le plan. L'aire de cette figure fondamentale nous la représentons par c et la longueur de la partie de ligne qui lui appartient par u . Les figures 6, 7, 8, 9, 11 sont des exemples de réseaux uniformes. Deux positions d'une même figure sur le plan d'un réseau sont dites *différentes* dans le cas où elles ne peuvent être amenées l'une sur l'autre par une translation du plan qui laisse invariable le réseau. Le nombre de positions différentes qui peut prendre un segment de longueur l placé sur le plan d'un réseau uniforme, a une mesure finie. Pour l'obtenir il suffit de considérer l'expression (1) de la mesure et laisser occuper à l'extrémité x , tous les points de l'aire fondamentale c et dans chaque position faire varier φ de 0 à 2π . On aura donc pour *mesure totale* des positions d'un segment orienté sur le plan d'un réseau uniforme

(26)

$$\mathfrak{M}_t = \int_c dx dy d\varphi = 2\pi c$$

On démontre aussi⁽¹⁾ comme généralisation dans le cas de réseaux uniformes d'une formule de Poincaré de la Géométrie Intégrale que, si n est le nombre de points d'intersection du segment \vec{S} avec les lignes du réseau on a

(27)

$$\int_c n dK = 4ul$$

où, comme toujours, l est la longueur du segment et u la longueur de la part du réseau intérieur à chaque aire fondamentale c . L'intégration de (27) est étendue sur toutes les positions différentes de \vec{S} .

§3. Probabilités géométriques.

1. Réseau de cercles. Soit le réseau de la fig. 6. Les cercles ont le rayon r et leurs centres sont placés sur les sommets des parallélogrammes de côtés a et b . Pour ce réseau est

$$(28) \quad c = ab \operatorname{sen} \alpha, \quad u = 2\pi r.$$

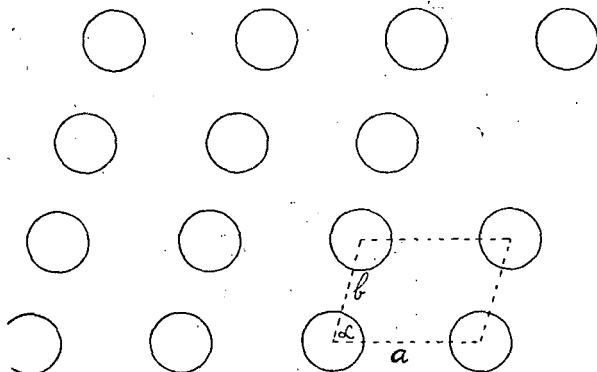


Fig. 6.

Supposons un segment de longueur l tel qu'il ne puisse couper qu'un seul des cercles du réseau. Représentons par \mathfrak{M}_1 la mesure des positions du segment dans lesquelles il a un seul point d'intersection avec les circonférences du réseau. Par \mathfrak{M}_2 la mesure des positions dans lesquelles il a 2 points d'intersection. Par \mathfrak{M}_i la mesure des positions dans lesquelles le segment reste complètement intérieur à une circonférence et par \mathfrak{M}_e la mesure des positions où le segment est extérieur à tous les cercles.

Nous allons calculer ces mesures.

La formule (26) nous donne la mesure totale des positions différentes, c'est à dire, selon (28):

$$(29) \quad \mathfrak{M}_i = \mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2 + \mathfrak{M}_i + \mathfrak{M}_e = 2\pi ab \operatorname{sen} \alpha.$$

La formule (27) donne

$$(30) \quad \mathfrak{M}_1 + 2\mathfrak{M}_2 = 4l \cdot 2\pi r.$$

La formule (5) s'écrit

$$(31) \quad \mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2 + \mathfrak{M}_i = 2(\pi^2 r^2 + 2\pi r l).$$

Finalement (10) nous donne

$$(32) \quad \mathfrak{M}_i = 2\pi \left[\pi r^2 - 2r^2 \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{l}{2r} - l \sqrt{r^2 - \frac{l^2}{4}} \right].$$

Moyennant ces 4 équations on peut déterminer les 4 mesures cherchées. On trouve

$$(33) \quad \mathfrak{M}_1 = 4\pi^2 r^2 - 2\mathfrak{M}_i,$$

$$(34) \quad \mathfrak{M}_2 = 4\pi r l - 2\pi^2 r^2 + \mathfrak{M}_i,$$

$$(35) \quad \mathfrak{M}_e = 2\pi ab \operatorname{sen} \alpha - 2\pi^2 r^2 - 4\pi r l.$$

Ces mesures nous donnent les solutions de probabilités suivantes:

“Un segment de longueur l est placé au hasard sur le plan du réseau des cercles de la fig. 6. En supposant que ce segment ne puisse couper qu'un seul des cercles du réseau, les probabilités respectives de ce qu'il ait un point d'intersection, ou deux, qu'il soit totalement intérieur à un des cercles, ou bien soit extérieur, sont

$$(36) \quad \left\{ \begin{array}{l} p_1 = \frac{\mathfrak{M}_1}{\mathfrak{M}_i} = \frac{2\pi^2 r^2 - \mathfrak{M}_i}{\pi ab \operatorname{sen} \alpha}, \\ p_2 = \frac{\mathfrak{M}_2}{\mathfrak{M}_i} = \frac{4\pi r l - 2\pi^2 r^2 + \mathfrak{M}_i}{2\pi ab \operatorname{sen} \alpha}, \\ p_i = \frac{\mathfrak{M}_i}{\mathfrak{M}_i} = \frac{\mathfrak{M}_i}{2\pi ab \operatorname{sen} \alpha}, \\ p_e = \frac{\mathfrak{M}_e}{\mathfrak{M}_i} = \frac{2\pi ab \operatorname{sen} \alpha - 2\pi^2 r^2 - 4\pi r l}{2\pi ab \operatorname{sen} \alpha}. \end{array} \right.$$

Dans ces formules \mathfrak{M}_i a la valeur exprimée par (32) et si $l \geq 2r$ est $\mathfrak{M}_i = 0$.

Si l'on veut seulement avoir la probabilité de ce que le segment coupe quelqu'un des cercles du plan, il sera

$$(37) \quad p = \frac{\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2}{\mathfrak{M}_i} = \frac{2\pi^2 r^2 + 4\pi r l - \mathfrak{M}_i}{2\pi ab \operatorname{sen} \alpha}.$$

2. Réseau de parallélogrammes. Soit le réseau de la fig. 7 ou celui de la fig. 8. Pour ces réseaux la figure fondamentale est un parallélogramme et on a

$$(38) \quad c = ab \operatorname{sen} \alpha, \quad u = a + b.$$

Supposons qu'on jette au hasard sur le plan un segment de longueur l . Faisons l'hypothèse que l est suffisamment petit pour ne pouvoir posséder avec le réseau que 2 points d'intersection au maximum.

En appelant $\mathfrak{M}_i (i=0, 1, 2)$ la mesure de l'ensemble de positions du segment dans lesquelles il a i points d'intersection avec le réseau, la formule (26) donne

$$(39) \quad \mathfrak{M}_i = \mathfrak{M}_0 + \mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2 = 2\pi ab \operatorname{sen} \alpha.$$

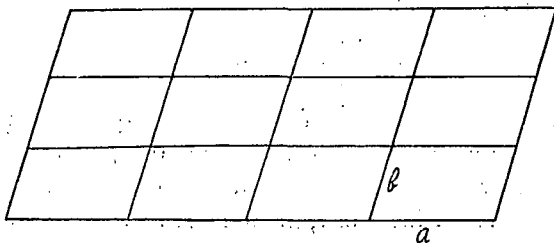


Fig. 7

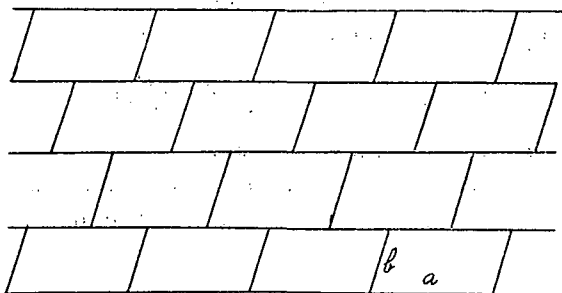


Fig. 8.

D'autre part (27) s'écrit

$$(40) \quad \mathfrak{M}_1 + 2\mathfrak{M}_2 = 4l(a+b).$$

Finalement (15) est

$$(41) \quad \mathfrak{M}_0 = 2 \left[\pi ab \operatorname{sen} \alpha - 2(a+b)l + \frac{l^2}{2} (2 + (\pi - 2\alpha) \cot \alpha) \right].$$

Avec ces 3 équations on trouve

$$(42) \quad \mathfrak{M}_1 = 4(a+b)l - 2[2 + (\pi - 2\alpha) \cot \alpha]l^2,$$

$$(43) \quad \mathfrak{M}_2 = [2 + (\pi - 2\alpha) \cot \alpha]l^2.$$

Ainsi, les probabilités respectives de ce que le segment ait aucun, un ou deux points d'intersection sont

$$(44) \quad \left\{ \begin{array}{l} p_0 = \frac{\mathfrak{M}_0}{\mathfrak{M}_t} = 1 - \frac{2(a+b)l}{\pi ab \operatorname{sen} \alpha} + \frac{l^2}{2\pi ab \operatorname{sen} \alpha} [2 + (\pi - 2\alpha) \cot \alpha], \\ p_1 = \frac{\mathfrak{M}_1}{\mathfrak{M}_t} = \frac{2(a+b)l}{\pi ab \operatorname{sen} \alpha} - \frac{[2 + (\pi - 2\alpha) \cot \alpha]l^2}{\pi ab \operatorname{sen} \alpha}, \\ p_2 = \frac{\mathfrak{M}_2}{\mathfrak{M}_t} = \frac{[2 + (\pi - 2\alpha) \cot \alpha]l^2}{2\pi ab \operatorname{sen} \alpha}. \end{array} \right.$$

3. Réseau de triangles équilatéraux. Considérons le réseau de triangles de la fig. 9. La figure fondamentale de ce réseau est

le losange de la fig. 10 et on a

$$(45) \quad c = \frac{\sqrt{3}}{2}a^2, \quad u = 3a.$$

Un segment de longueur l plus petite que la hauteur de ces triangles ne peut avoir avec le réseau que 0, 1, 2 ou 3 points d'intersection. Nous voulons chercher la probabilité dans chaque cas.

Représentons par $\mathfrak{M}_i (i=0, 1, 2)$ la mesure de l'ensemble de positions dans lesquelles le segment a i points d'intersection avec les côtés d'un triangle particulier du réseau.

La formule (25) nous donne:

$$(46) \quad \mathfrak{M}_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}\pi a^2 - 6al + \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi + 3\right)\frac{l^2}{2},$$

où a est le côté des triangles du réseau.

La mesure \mathfrak{M}_1 est égal à la mesure (15) des segments intérieurs au losange de côté a moins deux fois la mesure de ceux intérieurs au triangle, c'est à dire,

$$(47) \quad \begin{aligned} \mathfrak{M}_1 &= \sqrt{3}\pi a^2 - 8al + 2l^2 + \frac{\sqrt{3}}{9}\pi l^2 - 2\mathfrak{M}_0 \\ &= 4al - \left(1 + \frac{5\sqrt{3}}{9}\pi\right)l^2. \end{aligned}$$

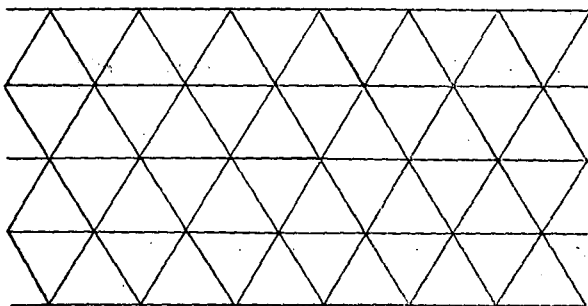


Fig. 9.

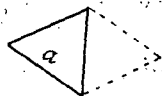


Fig. 10.

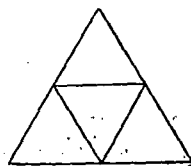


Fig. 11.

Pour trouver la mesure \mathfrak{M}_2 des segments qui coupent seulement deux côtés d'un triangle équilatéral de côté a du réseau il suffit de considérer (fig. 11) le triangle de côté $2a$ dont la mesure des segments de longueur l que lui sont intérieurs, par (25), est:

$$2\sqrt{3}\pi a^2 - 12al + \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi + 3\right)\frac{l^2}{2},$$

c'est à dire,

$$(48) \quad 4\mathfrak{M}_0 + 3\mathfrak{M}_1 + 3\mathfrak{M}_2 = 2\sqrt{3}\pi a^2 - 12al + \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi + 3\right)\frac{l^2}{2},$$

et en tenant compte de (46) et (47)

$$(49) \quad \mathfrak{M}_2 = \left(\frac{2\sqrt{3}}{9}\pi - \frac{1}{2}\right)l^2.$$

Dans (46) \mathfrak{M}_0 est la mesure des segments intérieurs à un triangle de réseau. Puisque chaque aire fondamentale se compose de deux triangles, on doit prendre $2\mathfrak{M}_0$. D'une façon analogue \mathfrak{M}_1 est la mesure des segments qui coupent un côté du triangle; il faudra prendre $3\mathfrak{M}_1$ pour avoir la mesure complète de ceux qui ont un point d'intersection avec le réseau. Puisque chaque figure fondamentale a 6 angles on doit prendre aussi $6\mathfrak{M}_2$. Alors si \mathfrak{M}_3 est la mesure totale des positions où le segment a trois points d'intersection avec le réseau, la formule (27) donne

$$(50) \quad 3\mathfrak{M}_1 + 12\mathfrak{M}_2 + 3\mathfrak{M}_3 = 12al,$$

d'où

$$(51) \quad \mathfrak{M}_3 = \left(3 - \frac{\sqrt{3}\pi}{3}\right)l^2.$$

En divisant ces mesures partiales pour la mesure totale (26)

$$(52) \quad \mathfrak{M}_i = 2\pi \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3}a^2 = \sqrt{3}\pi a^2,$$

on aura:

“Les probabilités de ce qu'une tige de longueur l , jetée au hasard sur un réseau de triangles équilatéraux de côté a ($l \leq \frac{\sqrt{3}}{2}a$) ait 0, 1, 2 ou 3 points d'intersection sont, respectivement:

$$(53) \quad \left\{ \begin{array}{l} p_0 = \frac{2\mathfrak{M}_0}{\mathfrak{M}_i} = 1 - \frac{4\sqrt{3}}{\pi} \frac{l}{a} + 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2\pi} + \frac{1}{3}\right)\frac{l^2}{a^2}, \\ p_1 = \frac{3\mathfrak{M}_1}{\mathfrak{M}_i} = \frac{4\sqrt{3}}{\pi} \frac{l}{a} - \left(\frac{\sqrt{3}}{\pi} + \frac{5}{3}\right)\frac{l^2}{a^2}, \\ p_2 = \frac{6\mathfrak{M}_2}{\mathfrak{M}_i} = \left(\frac{4}{3} - \frac{\sqrt{3}}{\pi}\right)\frac{l^2}{a^2}, \\ p_3 = \frac{\mathfrak{M}_3}{\mathfrak{M}_i} = \left(\frac{\sqrt{3}}{\pi} - \frac{1}{3}\right)\frac{l^2}{a^2}. \end{array} \right.$$

On peut constater que :

$$(54) \quad p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1.$$

Si l'on veut seulement la probabilité de couper le réseau, on aura:

$$(55) \quad p = 1 - p_0 = \frac{4\sqrt{3}}{\pi} \frac{l}{a} - 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2\pi} + \frac{1}{3} \right) \frac{l^2}{a}$$

4. Réseau d'hexagones réguliers. Considérons le réseau de la fig. 12 et un segment de longueur l que peut seulement couper le réseau dans 2 points au maximum, c'est à dire, l est plus petite que le côté a des hexagones.

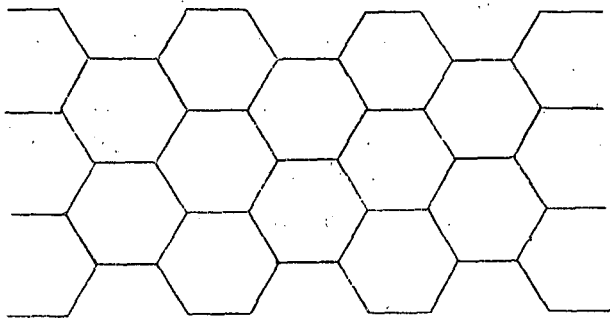


Fig. 12.

Dans ce cas la figure fondamentale sera l'hexagone de la fig. 13 avec

$$(56) \quad c = \frac{3\sqrt{3}}{2} a^2, \quad u = 3a.$$



Fig. 13.

Pour trouver la mesure \mathfrak{M}_0 des segments qui sont à l'intérieur d'un hexagone du réseau il suffit de prolonger deux paires de côtés opposés jusqu'à former un losange de côtés $2a$. Alors \mathfrak{M}_0 sera égal à la mesure des segments intérieurs au losange (15), moins deux fois les segments intérieurs à un triangle équilatéral de côté a (46) moins deux fois la mesure des segments qui coupent un seul segment du réseau de triangles équilatéraux (47), moins quatre fois la mesure (49) des segments qui coupent deux côtés du même réseau. Ainsi on trouve

$$(57) \quad \mathfrak{M}_0 = 3\sqrt{3}\pi a^2 - 12al + \left(3 - \frac{\sqrt{3}}{3}\pi\right) l^2.$$

La formule (27) donne

$$(58) \quad \mathfrak{M}_1 + 2\mathfrak{M}_2 = 12al,$$

et selon (26) et (56) on a

$$(59) \quad \mathfrak{M}_0 + \mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2 = 3\sqrt{3}\pi a^2.$$

De (57), (58) et (59), on déduit

$$(60) \quad \mathfrak{M}_1 = 12al - \left(6 - \frac{2\sqrt{3}}{3}\pi\right)l^2,$$

$$(61) \quad \mathfrak{M}_2 = \left(3 - \frac{\sqrt{3}}{3}\pi\right)l^2.$$

Donc: "Les probabilités de ce qu'une tige de longueur l jetée au hasard sur le plan du réseau hexagonal de la fig. 12 ait 0, 1 ou 2 points d'intersection avec le réseau sont

$$(62) \quad \left\{ \begin{array}{l} p_0 = \frac{\mathfrak{M}_0}{\mathfrak{M}_t} = 1 - \frac{4\sqrt{3}}{3\pi} \frac{l}{a} + \left(\frac{\sqrt{3}}{3\pi} - \frac{1}{9}\right) \frac{l^2}{a^2}, \\ p_1 = \frac{\mathfrak{M}_1}{\mathfrak{M}_t} = \frac{4\sqrt{3}}{3\pi} \frac{l}{a} - \left(\frac{2\sqrt{3}}{3\pi} - \frac{2}{9}\right) \frac{l^2}{a^2}, \\ p_2 = \frac{\mathfrak{M}_2}{\mathfrak{M}_t} = \left(\frac{\sqrt{3}}{3\pi} - \frac{1}{9}\right) \frac{l^2}{a^2}. \end{array} \right.$$

On suppose l plus petite que le côté a des hexagones.

Si l'on veut seulement avoir la probabilité de ce que le segment coupe les lignes du réseau, il sera

$$(63) \quad p = 1 - p_0 = \frac{4\sqrt{3}}{3\pi} \frac{l}{a} - \left(\frac{\sqrt{3}}{3\pi} - \frac{1}{9}\right) \frac{l^2}{a^2}.$$

Rosario (Rép. Argentina),

Instituto de Matemáticas, enero 1940.

(Reçu le 5, Mars 1940.)