SOBRE EL RECIPROCO DE UN TEOREMA DE JACOBI REFERENTE A CURVAS DEL ESPACIO

L. A. SANTALO

(Recibido el 23 de mayo de 1967)

SUMMARY. A classical theorem of Jacobi says that the indicatrix of the principal normals of a closed space curve bisects the surface of the unit sphere [5]. We prove the following reciprocal of this theorem: The only lines invariably attached to every point of a closed space curve Γ, such that its spherical indicatrix bisects the surface of the unit sphere "for every Γ", are the principal normals.

More precisely we consider a unit vector $\mathbf{Y} = \alpha \mathbf{T} + \beta \mathbf{N} + \gamma \mathbf{B}$ ($\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}$ = trihedral of Frenet of Γ and α, β, γ constants such that $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$) and prove that the area of the domain on the unit sphere bounded by the closed curve Γ_1: $\mathbf{Y} = \mathbf{Y}(s)$, is given by the formula $F = 2\pi - \alpha S - \gamma K$, where S = total torsion and K = total curvature of Γ. We deduce some consequences of this formula. At the end we consider the case that α, β, γ depend on s. If $\alpha = 0$ and β, γ are functions of s, we get the formula (4.6) which holds good for any closed space curve Γ. If Γ is the boundary of a simply connected domain of a surface and $\mathbf{Y}$ is the normal to this surface along Γ, then (4.6) coincides with the formula of Gauss - Bonnet for surfaces.

1. Introducción.— Jacobi demostró el notable teorema siguiente referente a curvas cerradas del espacio euclidiano de tres dimensiones E_3 (curvas que en todo lo que sigue suponemos de clase C^3):

La indicatriz esférica de las normales principales de una curva cerrada Γ de E_3, divide a la esfera unidad en dos partes de igual área.

Este antiguo teorema de Jacobi [5] se encuentra citado en muchos textos de Geometría Diferencial (Blaschke [1 p. 49] Guggenheimer [4 pág. 288]) y de él se han hecho varias aplicaciones y dado distintas demostraciones (Fenchel [2], [3]; Scherrer [6]). Nuestro objeto es considerar el teorema recíproco: ¿existirán otras rectas, además de la normal principal, invariablemente unidas al triedro fundamental de Frenet en cada punto de una curva cerrada del espacio, cuya indicatriz esférica divida a la superficie de la esfera en dos partes de igual área?

El resultado a que se llega es el siguiente:

a) Si la recta debe estar unida de manera invariante al triedro de Frenet de manera "universal", es decir, de la misma manera para cualquier curva cerrada que se considere, entonces la normal principal es única.

b) Si se admite que la recta, siempre unida de manera invariante al triedro de Frenet, puede depender de cada curva particular (más exactamente, dicha manera invariante puede depender de la curvatura total y de la torsión total de la curva), entonces hay infinitas rectas con dicha propiedad, las cuales están en un plano que determinaremos.

Los enunciados precisos y algunas generalizaciones y complementos constituyen los teoremas 1 y 2. En el nº 2 daremos una demostración elemental del teorema de Gauss-Bonnet para la esfera, la cual naturalmente, puede omitirse si solamente interesa la parte que consideramos nueva del trabajo.

2. FÓRMULA DE GAUSS-BONNET SOBRE LA ESFERA.— Sea Σ la esfera de radio unidad. El área de un triángulo esférico $A_1 A_2 A_3$ vale

$$T_3 = A_1 + A_2 + A_3 - \pi, \tag{2.1}$$

indicando por A_i tanto los vértices como los ángulos interiores correspondientes del triángulo.

Para un polígono esférico de n lados, no necesariamente convexo, por descomposición en triángulos resulta análogamente que su área vale

$$T_n = \sum_{n}^{1} A_i - (n-2)\pi. \tag{2.2}$$

Si se introducen los ángulos exteriores $\alpha_i = \pi - A_i$ resulta

$$T_n = 2\pi - \sum_{n}^{1} \alpha_i \tag{2.3}$$

Sea ahora sobre Σ una curva cerrada $\Gamma_1 : \mathbf{Y} = \mathbf{Y}(\sigma)$ de clase C^2 siendo σ su arco. Considerando a Γ_1 como límite de poligonales inscriptas cuyo número de lados n crece infinitamente, el área F de la región limitada por Γ_1 será el límite de las áreas poligonales T_n. Los ángulos α_i tienden a los ángulos entre los círculos máximos tangentes a Γ_1. Es decir, se tiene la fórmula

$$F = 2\pi - \int_{\Gamma_1} d\varphi \tag{2.4}$$

que no es otra que la fórrmula de Gauss-Bonnet para curvas esféricas. En ella $d\varphi$ indica el elemento de ángulo entre dos círculos máximos tangentes.

Para calcular $d\varphi$ a partir de la ecuación $\mathbf{Y}(\sigma)$ de la curva, consideremos la *curva dual,* que por definición es

$$\mathbf{Y}^* = \mathbf{Y} \wedge \mathbf{Y}' \tag{2.5}$$

donde $\mathbf{Y}' = d\mathbf{Y}/d\sigma$ es el versor tangente. El elemento de ángulo $d\varphi$, formado por dos planos tangentes a Γ_1 que pasan por el centro de Σ, es igual al ángulo formado por las normales a estos planos (que son precisamente $\mathbf{Y}^*(\sigma)$, $\mathbf{Y}^*(\sigma + d\sigma)$) y por tanto es $d\varphi = d\sigma^*$, siendo σ^* el arco de la curva dual (2.5). Por tando $d\varphi$ es el módulo de $d\mathbf{Y}^*$ y por consiguiente igual al producto escalar de $d\mathbf{Y}^*$ por un vector de módulo unidad que tenga la misma dirección del vector $d\mathbf{Y}^* = \mathbf{Y} \wedge d\mathbf{Y}' = \mathbf{Y} \wedge \mathbf{Y}''\, d\sigma$. Pero $\mathbf{Y}''$ tiene la dirección de la normal principal a Γ_1 y el versor $\mathbf{Y}$ también es normal a Γ_1; en consecuencia $\mathbf{Y} \wedge \mathbf{Y}''$ tiene la dirección de la tangente $\mathbf{Y}'$. En cuanto al sentido si consideramos que $\mathbf{Y}'$ debe estar dirigido de manera que el área limitada por Γ_1 quede a la izquierda del sentido de recorrido correspondiente a $\mathbf{Y}'$, resulta que $\mathbf{Y} \wedge \mathbf{Y}''$ tiene la dirección y sentido de $-\mathbf{Y}'$. Es decir, el triedro $\mathbf{Y}$, $\mathbf{Y}', \mathbf{Y}''$ debe ser un triedro directo. Por tanto se tiene $d\varphi = d\sigma^* = (\mathbf{Y} \wedge \mathbf{Y}'') \cdot (-\mathbf{Y}')\, d\sigma = (\mathbf{Y}\,\mathbf{Y}'\,\mathbf{Y}'')\, d\sigma$, con lo cual la fórmula (2.4) se escribe

$$F = 2\pi - \int_{\Gamma_1} (\mathbf{Y}\,\mathbf{Y}'\,\mathbf{Y}'')\, d\sigma \tag{2.6}$$

El producto mixto $(\mathbf{Y}\,\mathbf{Y}'\,\mathbf{Y}'')$ es la curvatura geodésica de Γ_1, con lo cual (2.6) toma la forma usual de la fórmula de Gauss-Bonnet para curvas sobre la esfera de radio unidad.

3. Indicatriz esférica de versores intrínsecamente unidos a los puntos de una curva cerrada del espacio. Sea ahora una curva cerrada $\Gamma : \mathbf{X} = \mathbf{X}(s)$ del espacio, supuesta de clase C^3, y sea s el arco de la misma. Sean $\mathbf{T}$, $\mathbf{N}$, $\mathbf{B}$ los versores tangente, normal principal y binormal de Γ y sean α, β, γ tres constantes tales que

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1. \tag{3.1}$$

El vector

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Y}(s) = \alpha\mathbf{T} + \beta\mathbf{N} + \gamma\mathbf{B} \tag{3.2}$$

es de módulo unidad y pro tanto la curva $\Gamma_1 : \mathbf{Y} = \mathbf{Y}(s)$, al recorrer s la curva Γ, será una curva cerrada de la esfera unidad: se llama la indicatriz esférica de los versores $\mathbf{Y}$.

Para hallar el área F del dominio limitado por Γ_1, aplicaremos la fórmula (2.6) por lo cual debemos calcular el producto mixto $(\mathbf{Y}\,\mathbf{Y}'\,\mathbf{Y}'')$

Aplicando las fórmulas de Frenet, tenemos

$$(3.3) \qquad \frac{d\,\mathbf{Y}}{d\,s} = -\beta\,\kappa\,\mathbf{T} + (\alpha\,\kappa - \gamma\,\tau)\,\mathbf{N} + \beta\,\tau\,\mathbf{B}$$

siendo κ, τ la curvatura y la torsión de Γ. Por tanto el elemento de arco de la curva Γ_1 es

$$(3.4) \qquad d\,\sigma = \Delta\,d\,s, \text{ con } \Delta = \sqrt{\beta^2\,\kappa^2 + (\alpha\,\kappa - \gamma\,\tau)^2 + \beta^2\,\tau^2}.$$

Por consiguiente se tiene

$$(3.5) \qquad \mathbf{Y}' = \frac{d\,\mathbf{Y}}{d\,\sigma} = p\,\mathbf{T} + q\,\mathbf{N} + r\,\mathbf{B}$$

siendo

$$(3.6) \qquad p = -\frac{\beta\,\kappa}{\Delta}\;, \quad q = \frac{\alpha\,\kappa - \gamma\,\tau}{\Delta}\;, \quad r = \frac{\beta\,\tau}{\Delta}.$$

Una nueva derivación da

$$\mathbf{Y}'' = \frac{d^2\,\mathbf{Y}}{d\,\sigma^2} = \frac{1}{\Delta}\,[(p' - \kappa\,q)\,\mathbf{T} + (q' + p\,\kappa - r\,\tau)\,\mathbf{N} + (r' + q\,\tau)\,\mathbf{B}]$$

donde los acentos en p', q', r' indican derivadas respecto del arco s de la curva Γ.

Por tanto, la curvatura geodésica de Γ_1 es

$$(3.8) \qquad (\mathbf{Y}\,\mathbf{Y}'\,\mathbf{Y}'') = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ p & q & r \\ p' - \kappa\,q & q' + p\,\kappa - r\,\tau & r' + q\,\tau \end{vmatrix}.$$

Haciendo operaciones, teniendo en cuenta los valores (3.6) y ordenando convenientemente, resulta (tras un cálculo un poco largo),

$$(3.9) \qquad (\mathbf{Y}\,\mathbf{Y}'\,\mathbf{Y}'')\,d\,\sigma = \left[\frac{\beta\,(\kappa\,\tau' - \kappa'\,\tau)}{\beta^2\,\kappa^2 + (\alpha\,\kappa - \gamma\,\tau)^2 + \beta^2\,\tau^2} + \alpha\,\tau + \gamma\,\kappa\right] d\,s.$$

Se observa que el primer sumando dentro del paréntesis, poniendo $\tau/\kappa = \xi$ equivalente a

$$(3.10) \qquad \frac{\beta\, d\,\xi}{\beta^2 + (\alpha - \gamma\,\xi)^2 + \beta^2\,\xi^2}$$

y por tanto es una diferencial exacta, cuya integral a lo largo de la curva cerrada Γ_1 es nula, quedando

$$(3.11) \qquad \int_{\Gamma_1} (\mathbf{Y}\,\mathbf{Y}'\,\mathbf{Y}'')\, d\,\sigma = \alpha\, S + \gamma\, K$$

habiendo puesto

$$(3.12) \qquad S = \int_{\Gamma} \tau\, d\, s \quad , \quad K = \int_{\Gamma} \kappa\, d\, s$$

siendo S la torsión total y K la curvatura total de la curva Γ.

Resulta así que, según (2.6), el área limitada por la indicatriz de los vectores $\mathbf{Y}$, vale

$$(3.13) \qquad F = 2\,\pi - \alpha\, S - \gamma\, K.$$

Esta fórmula demuestra los dos teoremas siguientes:

Teorema 1. *Para que el área F sea independiente de la curva (y por tanto de S y de K) debe ser $\alpha = 0$, $\gamma = 0$, en cuyo caso $F = 2\,\pi =$ área de la semiesfera. O sea: El único vector cuya indicatriz esférica divide a la esfera en dos partes de igual área y está unido al triedro de Frenet de una curva de manera invariante, la misma cualquiera que sea la curva, es el vector normal principal (recíproco del teorema de Jacobi).*

Teorema 2. *Dada una curva cerrada particular Γ, los vectores invariantemente unidos a la misma (α, β, γ constantes) cuya indicatriz esférica divide a la superficie de la esfera en dos partes de igual área, son los vectores del plano*

$$\alpha\, S + \gamma\, K = 0.$$

Este plano es el determinado por el vector normal principal $\mathbf{N}$ y el vector $-K\,\mathbf{T} + S\,\mathbf{B}$.

En particular: para las curvas de torsión total nula, $S = 0$, como son por ejemplo las curvas esféricas, la indicatriz esférica de todo vector del plano osculador invariantemente unido a la curva divide a la superficie de la esfera en partes de igual área.

4. Caso en que α, β, γ son funciones del arco s.— Puede interesar ver cómo se generaliza la fórmula (3.13) para el caso en que α, β, γ son funciones de arco s de la curva Γ.

En este caso, en vez de (3.4) se tiene $d\sigma = \Delta\, d s$, con

$$\Delta^2 = (\alpha' - \kappa\beta)^2 + (\beta' + \alpha\kappa - \gamma\tau)^2 + (\gamma' + \beta\tau)^2 \tag{4.1}$$

e indicando ahora con acentos las derivadas de $\mathbf{Y}$ respecto del arco s de la curva Γ, resulta

$$(\mathbf{Y}, \frac{d\mathbf{Y}}{d\sigma}, \frac{d^2\mathbf{Y}}{d\sigma^2})\, d\sigma = \frac{(\mathbf{Y}\,\mathbf{Y}'\,\mathbf{Y}'')}{\Delta^2}\, d s \tag{4.2}$$

Haciendo el cálculo bastante largo pero directo y teniendo en cuenta la relación (3.1) y las

$$\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' \quad , \quad \alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 + \alpha\alpha'' + \beta\beta'' + \gamma\gamma'' = 0$$

que de ella se deducen, se tiene

$$\frac{(\mathbf{Y}\,\mathbf{Y}'\,\mathbf{Y}'')}{\Delta^2} = \alpha\tau + \gamma\kappa + \frac{1}{\Delta^2}\{(\alpha\tau + \gamma\kappa)[2\alpha'^2 + 2\beta'^2 + 2\gamma'^2 + \tag{4.2}$$

$$+ (\beta'\alpha - \beta\alpha')\kappa + (\beta\gamma' - \beta'\gamma)\tau] + \gamma''\kappa + \alpha''\tau - \alpha'\tau' - \gamma'\kappa' +$$

$$+ \beta(\kappa\tau' - \kappa'\tau) + \alpha(\beta'\gamma'' - \beta''\gamma') + \beta(\gamma'\alpha'' - \gamma''\alpha') +$$

$$+ \gamma(\alpha'\beta'' - \alpha''\beta')\}.$$

Esta expresión toma una forma simple introduciendo los siguientes vectores (donde $\mathbf{I}_1, \mathbf{I}_2, \mathbf{I}_3$ es una base ortonormal fija del espacio),

$$\begin{aligned} \mathbf{Z} &= \alpha\mathbf{I}_1 + \beta\mathbf{I}_2 + \gamma\mathbf{I}_3 \\ \mathbf{V} &= \tau\mathbf{I}_1 + \kappa\mathbf{I}_3 \\ \mathbf{D} &= \mathbf{Z}' - \mathbf{Z} \wedge \mathbf{V}. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Con estos vectores, la expresión (4.2) queda

$$\frac{(\mathbf{Y}\,\mathbf{Y}'\,\mathbf{Y}'')}{\Delta^2} = \alpha\tau + \gamma\kappa + \frac{(\mathbf{Z}\,\mathbf{D}\,\mathbf{D}')}{\mathbf{D}^2}. \tag{4.4}$$

Por consiguiente, la fórmula general para el área F limitada por la indicatriz esférica de los vectores $\mathbf{Y}(s)$, según (2.6), es

$$(4.5) \qquad F = 2\pi - \int_\Gamma \alpha\,\tau\,d\,s - \int_\Gamma \gamma\,\kappa\,d\,s - \int_\Gamma \frac{(\mathbf{Z}\,\mathbf{D}\,\mathbf{D}')}{\mathbf{D}^2}\,d\,s\,.$$

Para α, β, γ constantes, la última integral toma la forma (3.10) y es nula, quedando la fórmula (3.13).

Para $\alpha = 0$, β y γ funciones de s, la última integral de (4.5) resulta igual a

$$\int_\Gamma \frac{1}{1+\left[\dfrac{\tau+\beta\,\gamma'-\beta'\,\gamma}{\beta\,\kappa}\right]^2}\,d\left[\frac{\tau+\beta\,\gamma'-\beta'\,\gamma}{\beta\,\kappa}\right]$$

y por tanto es también nula, quedando

$$(4.6) \qquad F = 2\pi - \int_\Gamma \gamma\,\kappa\,d\,s\,.$$

Si Γ es una curva cerrada que limita un casquete de superficie cuya normal en los puntos de Γ sea el vector $\mathbf{Y}$, F es el área de la imagen esférica del casquete y $\gamma\,\kappa$ es precisamente la curvatura geodésica de Γ, de manera que (4.6) coincide con la fórmula de Gauss-Bonnet para superficies. En este sentido, la fórmula (4.6), que vale para cualquier curva cerrada Γ, límite o no un casquete regular de superficie, puede considerarse como una generalización de la fórmula de Gauss-Bonnet para superficies.

BIBLIOGRAFIA

[1] Blaschke, W. *Vorlesungen über Differentialgeometrie*, Springer, Berlín, 1930.

[2] Fenchel, W. *Ueber einen Jacobischen Satz der Kurventheorie*, Tohoku Math. Journal, vol. 39, 1934, p. 95-97.

[3] Fenchel, W. *On the differential geometry of closed space curves*, Bull. American Math. Soc., vol. 57, 1951, p. 44-54.

[4] Guggenheimer, H. *Differential Geometry*, McGraw Hill, New York, 1963.

[5] Jacobi, C. G. J. *Ueber einige merkwürdige Curventheorem*, Gesammelte Werke, vol. 7, p. 34-39.

[6] Scherrer, W. *Ueber das Hauptnormalenbild einer Raumkurve*, Comment. Math. Helvetici, vol. 19, 1947, p. 115-133.

Facultad de Ciencias Exactas,
Universidad de Buenos Aires