APARTADO DE LA REVISTA
MATEMATICA Y FISICA TEORICA
VOL. XIX 1969 Nos. 1 y 2

# CONVEXIDAD EN EL PLANO HIPERBOLICO

Por

L. A. SANTALO

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES. UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES, ARGENTINA

(Recibido el 24 de mayo de 1969)

SUMMARY

A set of points $Q$ in the hyperbolic plane is said to be h-convex (convex with respect to horocycles) if for each pair of points $A$, $B$ belonging to $Q$, the entire segments of the two horocycles determined by $A$, $B$ belong to $Q$. In this paper we give the following properties for h-convex sets: 1. If $Q$ is h- convex, the whole horocyclic lentil bounded by the horocycles $O$, $O'$ determined by two points $A$, $B$ of $Q$ belongs to $Q$ and we get the inequalities (2 . 8) between the length $L$ of the boundary $\partial Q$, the area $F$, the width $\Delta$ and the diameter $D$ of $Q$ . 2. *If* $\kappa_g$ denotes the geodesic curvature of the boundary $\partial Q$ of a set $Q$, then $Q$ is h-convex if and only if $\kappa_g > 1$ . 3. For each point $A$ of the boundary $\partial Q$ of a h-convex set $Q$ we consider the two tangent horocycles $O^-$ and $O^+$ and define the breadth of $Q$ with respect to each of them. These h-breadths $a^-$, $a^+$ satisfy the formulae (5.3) and (5.4). 4. The sets of constant breadth are considered specially. For them the formula (6.1) holds The last theorem states that the Reuleaux triangle has minimal length and minimal area among all the sets of the same constant breadth of the hyperbolic plane.

## 1. INTRODUCCION

En el plano hiperbólico hay dos familias de curvas que en cierto modo tienen las propiedades de las rectas del plano euclidiano, a saber: las rectas propiamente dichas (o geodésicas) y los oriciclos. La principal analogía de los oriciclos con las rectas del plano euclidiano es que ellos son trayectorias ortogonales de un haz de rectas paralelas o bien, en otras palabras, que las rectas del plano hiperbólico ortogonales a un mismo oriciclo son paralelas entre sí. La diferencia esencial es que por dos puntos del plano hiperbólico pasan dos oriciclos, los cuales forman lo que llamaremos un "huso oricíclico".

Interpretando el plano hiperbólico como superficie de curvatura constante $K = -1$, las rectas están caracterizadas por tener la curvatura geodésica nula, $\kappa_g$ (rectas) $= 0$ y los oriciclos por tener esta curvatura, en valor absoluto, igual a la unidad, o sea $|\kappa_g$ (oriciclos) $| = 1$.

La definición usual de convexidad es la siguiente: un conjunto de puntos $Q$ del plano hiperbólico se dice que es *convexo* si para todo par de puntos $A$, $B$ pertenecientes a $Q$, los puntos del segmento de recta de extremos $A$ y $B$ pertenecen todos a $Q$.

Al sustituir las rectas por oriciclos tendremos la siguiente

*Definición.* Un conjunto de puntos $Q$ del plano hiperbólico se dice que es *h-convexo* (o convexo respecto de oriciclos), si para todo par de puntos $A$, $B$ pertenecientes a $Q$, todos los puntos de los dos segmentos de oriciclo determinados por $A$ y $B$ pertenecen a $Q$. El contorno de un conjunto $h$-convexo acotado se llama una *curva h-convexa* cerrada.

Los dos arcos de oriciclo de extremos $A$, $B$ determinan un *huso oricíclico* el cual, si $Q$ es $h$-convexo, deberá estar totalmente contenido en $Q$ y como el segmento de recta $AB$ es interior al huso (es eje de simetría), resulta que *todo conjunto h-convexo es convexo.* El recíproco no es cierto: basta considerar un conjunto convexo que contenga en su contorno un segmento de recta (por ejemplo un polígono geodésico) para ver inmediatamente que es convexo pero no $h$-convexo.

Por consiguiente, todas las propiedades de los conjuntos convexos subsisten para los $h$-convexos, pero hay algunas propiedades exclusivas de estos últimos, algunas de las cuales queremos estudiar en este trabajo. En un trabajo anterior ya vimos algunas de ellas [7] y recientemente H. Larcher [4] ha dado otras que mencionaremos más adelante.

Tanto los conjuntos convexos como los $h$-convexos los supondremos siempre acotados y cerrados, vale decir, con el contorno incluído. Además, puesto que la curvatura geodésica de una curva convexa tiene signo constante, *supondremos que este signo es positivo.*

## 2. ALGUNOS VALORES REFERENTES A "HUSOS ORICICLICOS"

Sean $A$, $B$ dos puntos del plano hiperbólico y sea $D_0$ su distancia, o sea, la longitud del segmento $AB$. Por $A$ y $B$ pasan dos oriciclos, los cuales forman el huso oricíclico de extremos $A$ y $B$. Queremos calcular el perímetro, el área y el espesor de este huso.

Una manera elemental consiste en utilizar la representación de Poincaré del plano hiperbólico, como los puntos con $y > 0$ y métrica $ds^2 = (dx + dy^2)/y^2$. Como el huso depende únicamente de $D_0$ podemos suponerlo colocado en la posición de la fig. 1, con $A$ y $B$ de la misma ordenada $\beta$. Introduciendo los ángulos $\varphi_A = AOX$, $\varphi_B = BOX$ es sabido (y se calcula fácilmente) que es

$$D_0 = \log\left[\tan(\varphi_B/2) : \tan(\varphi_A/2)\right] \tag{2.1}$$

y como $\varphi_B = \pi - \varphi_A$ resulta también

$$D_0 = \log\cot^2(\varphi_A/2) \tag{2.2}$$

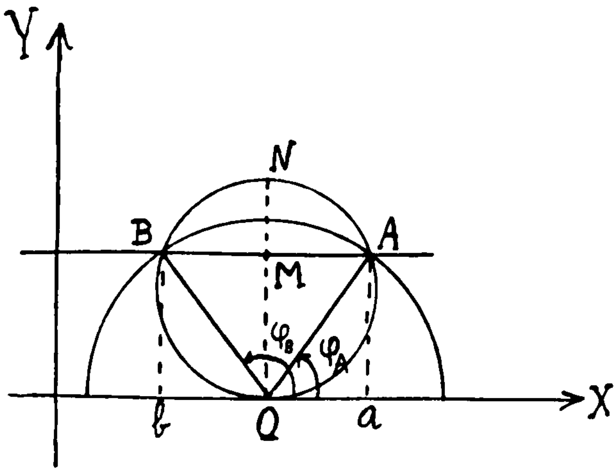


Fig. 1

de donde

$$\tan\frac{\varphi_A}{2} = \exp\,(-D_0/2). \tag{2.3}$$

Obsérvese que en la representación de Poincaré el segmento $AB$ es el arco de la circunferencia que pasa por $AB$ y tiene el centro en el eje $x$.

Por otra parte, la longitud del arco de oriciclo $AB$, siendo $A(a,\beta)$, $B(b,\beta)$ es

$$L_0 = \int_b^a \frac{dx}{y} = \frac{a-b}{\beta} = \frac{2}{\tan\varphi_A} = \frac{1-\tan^2(\varphi_A/2)}{\tan(\varphi_A/2)}$$

o sea, según (2.3)

$$L_0 = 2\,\mathrm{senh}\,\frac{D_0}{2}\,. \tag{2.4}$$

Por simetría, la longitud del otro arco de oriciclo $AB$ tendrá el mismo valor. Por tanto: *la longitud del huso oricíclico de diámetro $D_0$ vale*

$$L_0 = 4\,\mathrm{senh}\,(D_0/2) \tag{2.5}$$

Para calcular el área podemos utilizar las mismas notaciones de la fig. 1. Será

$$\frac{1}{4}F_0 = \int \frac{dx \wedge dy}{y^2} = \int_0^{r\cos\varphi_A} \left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\sqrt{r^2-x^2}}\right) dx$$

$$= \cot\varphi_A - \mathrm{arc\,sen}\cos\varphi_A.$$

Teniendo en cuenta (2.3), de donde se deduce $\cot\varphi_A = \mathrm{senh}\,(D_0/2)$ y $\mathrm{arc\,sen}\cos\varphi_A = \pi/2 - \varphi_A = \mathrm{ar\,tan}\cot\varphi_A$, resulta que *el área del huso oricíclico del diámetro $D_0$ vale*

(2.6) $$F_0 = 4 \operatorname{senh} (D_0/2) - 4 \operatorname{arc\,tan\,senh} (D_0/2).$$

A veces interesa también el *espesor* o *anchura mínima* del huso, o sea, el segmento $MN$ de la fig. 1. Llamando $m$ a la longitud euclidiana de $MN$ es

$$\Delta_0 = \overline{MN} = \log \frac{\beta + m}{\beta} = \log (1 + \cot^2 \varphi_A)$$

y según (2.3) resulta que el *espesor del huso oricíclico de diámetro $D_0$ vale*

(2.7) $$\Delta_0 = 2 \log \cosh (D_0/2).$$

Puesto que todo conjunto $h$-convexo contiene el huso determinado por los extremos de un diámetro, de (2.5), (2.6) y (2.7) resulta el siguiente teorema:

*Entre la longitud $L$ del contorno, el área $F$ y el espesor $\Delta$ de un conjunto h-convexo y el diámetro $D$ del mismo, valen las siguientes desigualdades*

$$L \geqslant 4 \operatorname{senh} (D/2)$$
$$F \geqslant 4 \operatorname{senh} (D/2) - 4 \operatorname{arc\,tan\,senh} (D/2)$$
$$\Delta \geqslant 2 \log \cosh (D/2).$$

*donde las igualdades valen únicamente para los husos oricíclicos.*

## 3. CURVAS $h$-CONVEXAS CON CURVATURA GEODESICA CONTINUA

Sea $Q$ un conjunto $h$-convexo y $A$ un punto de su contorno $\partial Q$. Supongamos que en $A$ la curva convexa $\partial Q$ tenga curvatura $\kappa_g(A)$ continua. En un entorno de $A$, los dos oriciclos tangentes a $\partial Q$ en $A$ deben quedar exteriores a $Q$ o coincidir, uno de ellos, con $\partial Q$. En efecto, si un arco de oriciclo quedase interior a $Q$, considerando un oriciclo paralelo suficientemente próximo, se podría tener un arco de oriciclo con los extremos en $Q$ y no contenido totalmente en $Q$, contra la hipótesis de ser $Q$ $h$-convexo. Esto hace que la curvatura $\kappa_g(A)$ deba ser igual o mayor que la curvatura del oriciclo en $A$, cuyo valor absoluto es 1. Una demostración precisa de este hecho puede verse en H. Karcher [4]. Recíprocamente, si una curva convexa está compuesta de arcos con curvatura continua $\kappa_g \geqslant 1$, ella es $h$-convexa.

Por tanto:

*Una condición necesaria y suficiente para que una curva convexa y cerrada del plano hiperbólico con curvatura continua sea h-convexa, es que sea*

(3.1) $$\kappa_g \geqslant 1$$

*en todo punto.*

Obsérvese que consideramos la curvatura geodésica de una curva *h-convexa* siempre *positiva*. En caso contrario habría que poner en (3.1) el valor absoluto.

Si $R$ representa el radio del círculo osculador a una curva $C$ en un punto $A$ (= posición límite del círculo geodésico determinado por tres puntos $A$, $A_1$, $A_2$ de $C$, cuando $A_1$ y $A_2$ tienden a $A$), su relación con $\kappa_g$ (suponiendo la existencia de $\kappa_g$ continua) es

$$\kappa_g = \coth R. \tag{3.2}$$

Esta igualdad se obtiene aplicando la fórmula de Gauss-Bonnet a un círculo de radio $R$ y teniendo en cuenta que su longitud y área están dados por las fórmulas (ver Coxeter [3])

$$L = 2\pi \operatorname{senh} R \quad ; \quad F = 2\pi(\cosh R - 1) \tag{3.3}$$

La condición (3.1) equivale por tanto a la siguiente:

*Una condición necesaria y suficiente para que una curva convexa con curvatura continua en todo punto, sea h-convexa, es que el radio $R$ de sus círculos osculadores sea finito en todo punto ($R < \infty$).*

Hay varias propiedades referentes a curvas convexas o $h$-convexas y sus círculos inscritos y circunscritos. Algunas de ellas son las mismas que para el plano euclidiano. Otras son diferentes. Por ejemplo, en el plano euclidiano, si $C$ es una curva convexa y cerrada con curvatura continua, el círculo osculador a $C$ de radio mínimo está contenido en el interior de $C$ (Blaschke [1]). Para curvas convexas del plano hiperbólico esta propiedad puede dejar de valer. En cambio sigue valiendo para las curvas $h$-convexas Este estudio ha sido hecho por H. Karcher [4].

## 4. h-*CURVATURA*

Sea una curva $C$ del plano hiperbólico que tenga curvatura continua no nula en un punto $A$. Se sabe que esta curvatura $\kappa_g$ puede definirse por

$$d\tau = \kappa_g \, ds \tag{4.1}$$

siendo $ds$ el elemento de arco y $d\tau$ el elemento de ángulo entre dos rectas tangentes a $C$ (ambos elementos tomados en el punto A). Además, si $C$ es una curva cerrada que limita un área $F$, vale la fórmula de Gauss-Bonnet

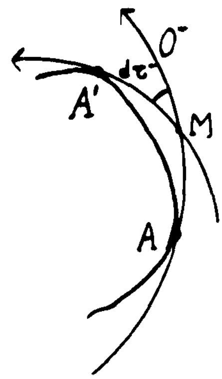


Fig. 2

$$\int_C \kappa_g \, ds = 2\pi + F - \sum_1^n \omega_i \tag{4.2}$$

donde $\omega_i$ son los ángulos exteriores de los puntos angulosos, si existen. Si la curva tiene curvatura continua en todo punto, esta suma no aparece en la fórmula (4.2).

Si en vez de rectas (geodésicas) se toman oriciclos tangentes, se tienen dos posibilidades: o bien se toman los oriciclos con la concavidad del mismo lado de $C$ (figura análoga a fig. 2) o bien se toman los oriciclos con la concavidad en sentido opuesto (fig. 3). Aplicando el teorema de Gauss-Bon-

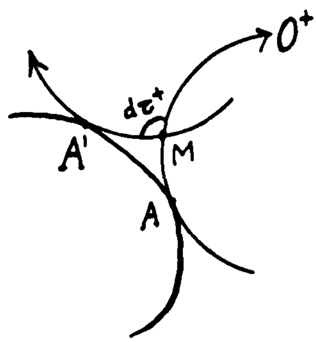


Fig. 3

net al triángulo AMA′ y teniendo en cuenta que en el primer caso la curvatura de los oriciclos tangentes es +1 (considerando la curvatura de $C$ como positiva) y en el segundo caso es $-1$, resulta, para el primer caso la relación

(4.3) $$d\tau_H^- = d\tau - ds$$

y para el segundo caso

(4.4) $$d\tau_H^+ = d\tau + ds$$

siendo $d\tau_H^-$, $d\tau_H^+$ los elementos de ángulo, en cada caso, de los oriciclos tangentes. Para obtener (4.3) y (4.4) se ha tenido en cuenta que el área del triángulo AMA′ es infinitésimo de orden superior al de los elementos que figuran en (4.3) y (4.4).

Las variaciones totales de los ángulos $\tau_H^+$, $\tau_H^-$, para una curva cerrada $C$ que limita un área $F$ y tiene longitud $L$, resulta valer (aplicando (4.2))

(4.5) $$\int_C d\tau_H^- = 2\pi + F - L \quad , \quad \int_C d\tau_H^+ = 2\pi + F + L$$

## 5. $h$-ANCHURA DE UNA CURVA CONVEXA

Sea $\partial Q$ una curva convexa cerrada, contorno del conjunto convexo $Q$. Sea $A$ un punto de $\partial Q$. De los dos oriciclos tangentes a $\partial Q$ en $A$, representemos por $O^-(A)$ el que tiene la convexidad del mismo sentido que $\partial Q$ y por $O^+(A)$ el que tiene la convexidad de sentido contrario. Sea $g$ la recta normal a $\partial Q$ en $A$. Consideremos los oriciclos ortogonales a $g$ que tienen el mismo

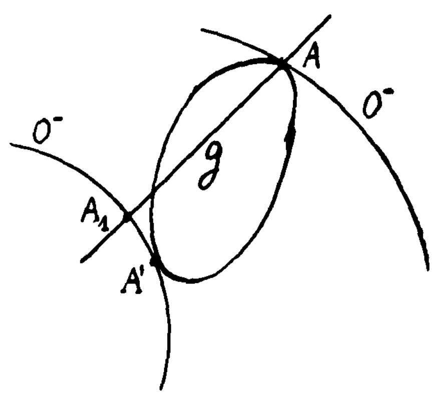


Fig. 4

punto impropio que $O^-(A)$. De estos oriciclos sea $O^-(A')$ el extremo superior de los que tienen punto común con $Q$ ($A' \varepsilon Q$). Si $A_1$ es el punto de $g$ correspondiente a $O^-(A')$, se llama ***h*-anchura (−) *de Q correspondiente al punto A,*** a la distancia $AA_1$. Se representa por $\alpha^-(A)$. Obsérvese que $A_1$ y $A'$ serán en general puntos distintos ($A'$ es el punto de apoyo de $O^-(A')$), fig. 4.

Para las curvas convexas del plano euclidiano, el valor medio de la anchura, salvo un factor constante, es igual a la longitud de la curva. Queremos obtener algo análogo para las curvas $h$-convexas del plano hiperbólico.

Para ello debemos recordar que la densidad para medir conjuntos de oriciclos vale

$$dO^- = \exp(-r)\, dr \wedge d\psi \tag{5.1}$$

siendo $r$ su distancia a un punto fijo $P$, situado en la región convexa, no acotada, cuyo contorno es $O^-$ y $\psi$ el ángulo de la normal por $P$ al oriciclo con una dirección fija (ver [7]). Además, se sabe que la medida de todos los oriciclos que cortan a una curva convexa cerrada es igual a dos veces su longitud. Como la densidad (5.1) es independiente del punto $P$, tomemos por un momento el centro de curvatura de $C$ en $A$. Si $R$ es el radio de curvatura y $d\tau$, $ds$ tienen los significados de antes, aplicando el teorema de Gauss-Bonnet al triángulo elemental $P$, $A(s)$, $A(s+ds)$ y teniendo en cuenta (3.2) resulta

$$d\psi = \frac{d\tau}{\cosh R} = \frac{ds}{\operatorname{senh} R} \tag{5.2}$$

Cuando los oriciclos ortogonales a $g$ estén entre el centro de curvatura $P$ y $A_1$, hay que tomar por densidad $\exp(r)\, dr \times d\psi$. Por tanto, fijando $\psi$ o integrando $r$, se tiene

$$\int_P^A \exp(-r)\, dr + \int_P^{A_1} \exp(r)\, dr = \exp(-R)\, (\exp(\alpha-) - 1).$$

Teniendo en cuenta (5.2) resulta que la medida de los oriciclos que cortan a $Q$ vale

$$\int \exp(-R)\, (\exp \alpha^- - 1)\, d\psi = \int (\exp \alpha^- - 1)\, (\cosh R - \operatorname{senh} R)\, d\psi$$

$$= \int (\exp \alpha^- - 1) d\tau - \int (\exp \alpha^- - 1)\, ds,$$

y como $\int d\tau = 2\pi + F$, $\int ds = L =$ longitud de $\partial Q$, resulta

$$\int \exp \alpha^-\, d\tau_H^- - 2\pi - F + L.$$

Como este resultado debe ser igual a $2L$, resulta

$$\int_{\partial Q} \exp(\alpha^-)\, d\tau_H^- = 2\pi + F + L \tag{5.3}$$

Si el centro de curvatura $P$ es exterior al segmento $AA_1$ el razonamiento es completamente análogo y se llega a la misma fórmula (5.3).

En el punto $A$ se puede tomar también el oriciclo $O^+(A)$ que tiene su convexidad en sentido contrario a la de $\partial Q$. Se puede entonces definir de manera análoga la anchura $\alpha^{+}$ y un razonamiento análogo al anterior conduce a la fórmula

$$(5.4) \qquad \int_{\partial Q} \exp(-\alpha^{+})\, d\tau^{+}_{h} = 2\pi + F - L$$

En resumen:

*Sea $Q$ un conjunto $h$-convexo del plano hiperbólico. Llamando $\alpha^{-}$ y $\alpha^{+}$ a las anchuras respecto de los oriciclos tangentes en cada punto, valen las fórmulas* (5.3) y (5.4).

Una fórmula análoga para curvas convexas (no necesariamente $h$-convexas) fue dada en [5].

## 6. CONJUNTOS CONVEXOS DE ANCHURA CONSTANTE

Si $\alpha^{-}$ es constante, el mismo razonamiento conocido del caso del plano euclidiano prueba que $A' \equiv A_1$ (notaciones de la fig. 4). Por tanto $A$ y $A'$ son puntos tales que también las rectas tangentes en ellos y los oriciclos $O^{+}$ son ortogonales a la recta $AA'$. Es decir: *si $\alpha^{-}$ es constante también lo es $\alpha^{+}$ y su valor común es la anchura ordinaria del conjunto $Q$*. En otras palabras: todo conjunto de $h$-anchura constante es también de anchura constante.

Además, igual que para el plano euclidiano, resulta que si $Q$ es de anchura constante $\alpha$, los radios de curvatura en puntos opuestos cumplen la condición $R(A) + R(A') = \alpha$. Por tanto $R$ es finito, o sea: *todo conjunto convexo de anchura constante es $h$-convexo*.

Si $Q$ es de anchura constante $\alpha$, de (5.3) y (4.3) se deduce

$$(6.1) \qquad \exp\alpha = \frac{2\pi + F + L}{2\pi + F - L}$$

Es decir: *para todo conjunto convexo del plano hiperbólico de anchura constante $\alpha$, vale la igualdad* (6.1). Una fórmula equivalente a la (6.1) ya fue obtenida en [5].

## 7. POLIGONOS DE REULEAUX

Los conjuntos convexos de anchura constante más simples son los polígonos de Reuleaux. Igual que para el caso del plano, se obtienen dividiendo una circunferencia en $2n + 1$ partes iguales por los puntos $A_0, A_1, \ldots, A_{2n}$ y uniendo cada dos vértices consecutivos por un arco de circunferencia cuyo centro es el vértice opuesto. Así, los vértices $A_n$ y $A_{n+1}$ se unen por un arco de circunferencia de centro $A_0$. Resulta así el polígono de Reuleaux de $2n + 1$ lados. La distancia $A_0 A_n = \alpha$ es la anchura constante del polígono.

Llamando $\theta =$ ángulo $A_n A_0 A_{n+1}$ la longitud del polígono es

$$L_R = (2n + 1)\,\theta \operatorname{senh} \alpha \tag{7.1}$$

y la longitud del contorno del círculo de la misma anchura vale

$$L_C = 2\pi \operatorname{senh}(\alpha/2) \tag{7.2}$$

Vamos a demostrar que $L_R < L_C$ para cualquier $n$. En efecto, si $O$ es el centro de la circunferencia que pasa por los vértices $A_0, A_1, \ldots, A_{2n}$, el triángulo $A_n\, O\, A_0$ es isósceles y por una fórmula elemental de trigonometría hiperbólica se tiene

$$\cosh \frac{\alpha}{2} = \frac{\cos \dfrac{n\pi}{2n+1}}{\operatorname{sen} \dfrac{\theta}{2}}\,. \tag{7.3}$$

De aquí, o por simple observación de la figura, se deduce que $\alpha$ crece a medida que $n \to \infty$ y $\theta \to 0$. Para $\theta$ muy pequeño y $n$ grande es

$$\frac{\cos \dfrac{n\pi}{2n+1}}{\operatorname{sen} \dfrac{\theta}{2}} \sim \frac{\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{n\pi}{2n+1}}{\dfrac{\theta}{2}} = \frac{\pi}{(2n+1)\,\theta}\,; \tag{7.4}$$

Por otra parte, según (7.1) y (7.3)

$$\frac{L_R}{L_C} = \frac{(2n+1)\,\theta}{\pi} \cosh(\alpha/2) \tag{7.5}$$

De (7.1), (7.2), (7.4) y (7.5) se deduce que $L_R/L_C < 1$.

Recordando que en geometría elíptica (equivalente en pequeño a la geometría esférica) los polígonos de Reuleaux tienen la longitud mayor que los círculos de igual anchura [6], y que en el plano euclidiano la longitud es la misma, resulta:

*Entre la longitud $L_R$ de un polígono de Reuleaux de cualquier número de lados y la longitud $L_C$ del círculo de la misma anchura, vale $L_R = L_C$ en el plano euclidiano, $L_R > L_C$ en el plano elíptico y $L_R < L_C$ en el plano hiperbólico.*

Un teorema de Blaschke afirma que todo conjunto convexo de anchura constante se puede aproximar en tanto como se quiera por polígonos de

Reuleaux [2] (aunque Blaschke se refiere al caso del plano euclidiano, la demostración es fácilmente trasladable al plano hiperbólico). Según esto y observando que $L_R$ crece con $n$ y por tanto es mínima para el triángulo, se puede enunciar:

*Entre los conjuntos convexos del plano hiperbólico de anchura constante, el triángulo de Reauleux tiene longitud mínima.*

Debiéndose cumplir la relación (6.1), se tiene también, como consecuencia:

*Entre los conjuntos convexos del plano hiperbólico, el triángulo de Reauleaux es el que tiene área mínima.*

Para comprobar algunos resultados anteriores puede ser útil tener a mano los valores de la longitud y el área de los polígonos de Realeaux de $2n + 1$ lados. La longitud está dada por (7.1). En cuanto al área, un cálculo fácil conduce a la expresión

$$F_R = (2n+1)\,\theta \cosh\alpha + (2n+1)\,\theta - 2\pi$$

BIBLIOGRAFIA


[1] BLASCHKE, W., *Kreis und Kungel*, 2ª edición, Walter de Gruyter, Berlín, 1956.

[2] BLASCHKE, W., *Convexe Bereiche gegebener konstanter Breite und kleinstein Inhalt*, Math. Ann., Vol. 76, 1915, 504-513.

[3] COXETER, H. S. M., *Non-euclidean Geometry*, University of Toronto Press, 1957.

[4] KARCHER, H., *Umkreise und Inkreise konvexer Kurven in der sphärischen und der hyperbolischen Geometrie*, Math. Annalen, 177, 1968, 122-132.

[5] SANTALÓ, L. A., *Note on convex curves on the hyperbolic plane*, Bull. Am. Math. Soc. 51. 1945, 405-412.

[6] SANTALÓ, L. A., *Propiedades de las figuras convexas sobre la esfera*, Math. Notae, Rosario, año IV, 1944, 11-40.

[7] SANTALÓ, L. A., *Horocycles and convex sets in hyperbolic plane*, Archiv. der Mathematik, XVIII, 1957, 529-533.