VALORES MEDIOS PARA POLIGONOS FORMADOS POR RECTAS AL AZAR EN EL PLANO HIPERBOLICO

L. A. SANTALO

(Recibido el 6 de noviembre de 1965)

SUMMARY. GOUDSMIT [2] and more recently R. E. MILES [4], [5], P. I. RICHARDS [6] and M. G. KENDALL - P. A. P. MORAN [3] have considered the problem of finding the mean number of sides, the mean perimeter, the mean area, the mean area-squared and many other averages of the convex polygons into which the euclidean plane is divided by a system of straight lines distributed at random homogeneously throughout the plane. The first result of GOUDSMIT was generalized to the 3-dimensional space in [8], and many other interesting results for polytopes determined by random hyperplanes in n-dimensional euclidean space have been obtained by R. E. MILES (unpublished papers).

In the present paper we generalize the problem of GOUDSMIT to the hyperbolic plane. The straight lines are assumed given at random in the sense of the Integral Geometry [9], [10]. First, we obtain some mean values for a finite convex set K intersected by a finite number n of random straight lines (the mean number of vertices inside K (2.6), the mean number of regions in which K is divided (2.8), the mean number of sides of each region (2.10), the mean perimeter (2.12) and the mean area (2.13). Then, we consider that K is a circle which expands to all the hyperbolic plane. If the density for lines is normalized such that the mean area is $E(A) = 1$, then we get for the mean values of the number of sides N, the perimeter S and the area-squared A^2 the following values

$$E(N) = 4 \ , \ E(S) = 1 + \frac{1}{\xi} = 3{,}683\ldots \ , \ E(A^2) = 13{,}02\ldots$$

where $\xi = 0{,}3726\ldots$ is the positive root of $4\pi\xi^2 - 2\xi - 1 = 0$. The exact value of $E(A^2)$ is given by (4.14).

INTRODUCCION Y RESULTADOS.— El problema que queremos resolver es el siguiente:

"Consideremos el plano hiperbólico dividido en polígonos por rectas dadas al azar, con una densidad uniforme tal que el valor medio $E(A)$ del área de estos polígonos sea igual a la unidad, $E(A) = 1$. Se piden los valores medios del número de lados N de cada polígono, del perímetro S de cada polígono y, especialmente, del cuadrado del área de cada polígono".

Para el plano euclidiano el problema fue considerado y resuelto por S. A. Goudsmit [2]. Luego fue generalizado al espacio por nosotros [8] y recientemente ha sido nuevamente objeto de estudio y generalización en diversas direcciones por R. E. Miles [4], [5], P. I. Richards [6] y D. G. Kendall (ver M. G. Kendall-P. A. P. Morán [3]). Algunos resultados nuevos de Miles todavía no han sido publicados y debemos agradecerle su gentileza de habernos proporcionado la redacción preliminar. Estas generalizaciones se refieren a nuevos valores medios para el caso del plano y su extensión al espacio euclidiano de n dimensiones.

La generalización al plano hiperbólico presenta cierto interés como nuevo ejemplo del diferente comportamiento de este plano respecto del euclidiano, en cuanto a sus subdivisiones en dominios poligonales.

Vamos a resumir los resultados obtenidos y su comparación con el caso euclidiano. Llamando: N = número de lados de cada polígono; S = perímetro de los polígonos; A = área de los polígonos, e indicando con $E(\ldots)$ al "valor medio" según la ley de probabilidad uniforme que especificaremos, se tiene:

Plano euclidiano (resultados conocidos [2]):

$$E(N) = 4 \quad , \quad E(S) = 2\sqrt{\pi} = 3{,}5448\ldots \quad , \quad E(A) = 1 \quad ,$$

$$E(A^2) = \tfrac{1}{2}\pi^2 = 4{,}934\ldots$$

Plano hiperbólico:

$$E(N) = 4 \quad , \quad E(S) = 1 + \frac{1}{\xi} = 3{,}683\ldots \quad , \quad E(A) = 1 \quad ,$$

$$E(A^2) = 13{,}02\ldots$$

donde ξ es la raíz positiva de la ecuación $4\pi\xi^2 - 2\xi - 1 = 0$ y el valor exacto de $E(A^2)$ está dado por (4.14).

2. VALORES MEDIOS PARA UNA FIGURA CONVEXA K DEL PLANO EUCLIDIANO.— **Vamos a dar una nueva demostración de los resultados conocidos para el caso del plano euclidiano, que servirá para mejor comprender el camino que seguimos para el caso del plano hiperbólico. Obsérvese que la demostración original de Goudsmit, así como las variantes posteriores, no parecen ser fácilmente generalizables al plano hiperbólico.**

Vamos a recordar primero algunos resultados ya obtenidos por nosotros en otra oportunidad [7]. Sea K una figura convexa del plano, de perímetro L y área F. Consideremos n rectas G_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ que cortan a K. Si p_i, θ_i son las coordenadas de G_i (p_i = distancia de G_i al origen; θ_i = ángulo de la normal a G_i con una dirección fija del plano), tomamos como densidad para medir conjuntos de rectas a la forma diferencial $dG_i = (dp_i\, d\theta_i)$, [10], [3], El valor medio del úmero de puntos V de intersección de las n rectas, que son interiores a I será

$$E(V) = \frac{\int V\, dG_1\, dG_2 \ldots dG_n}{\int dG_1\, dG_2 \ldots dG_n} \tag{2.1}$$

donde la integral del numerador está extendida a todas las rectas del plano y la del denominador a aquellas que cortan a K, y por tanto vale

$$\int dG_1\, dG_2 \ldots dG_n = L^n, \tag{2.2}$$

puesto que se sabe que para cada recta, la medida de aquellas que cortan a K es iguel a L, o sea,

$$\int dG_i = L \tag{2.3}$$

(ver [10], pág. 13; [3], pág. 58).

Para calcular la integral del numerador de (2.1) llamemos V_{ij} a la función de G_i, G_j que vale 1 si G_i, G_j se cortan dentro de K y vale 0 si se cortan fuera (para completar la definición pondremos $V_{ii} = 0$). Para cada posición de las n rectas es $V = \Sigma\, V_{ij}$ y el número de las V_{ij} es $\frac{1}{2} n (n-1)$. Llamando s_i a la longitud de la cuerda que G_i determina en K, se tiene

$$\int V_{ij}\, dG_i\, dG_j = 2 \int s_i\, dG_i = 2\pi F, \tag{2.4}$$

puesto que la medida de las rectas que cortan a un segmento es igual al doble de su longitud ([10], pág. 13; [3], pág. 58) y además es conocida e inmediata la fórmula

$$\int s_i\, dG_i = \pi F. \tag{2.5}$$

Por consiguiente, tenemos

$$\int V\, dG_1\, dG_2 \ldots dG_n = \tfrac{1}{2} n (n-1) \int V_{ij}\, dG_1 \ldots dG_n =$$

$$= n(n-1)\, \pi F L^{n-2}.$$

De aquí:

a) *El valor medio del número de puntos de intersección de n rectas que cortan a K, que son interiores a K, vale*

$$E_K(V) = n(n-1)\,\pi F L^{-2}. \tag{2.6}$$

Sea ahora P el número de regiones en que las n rectas dadas al azar dividen a la figura convexa K. Las posiciones de las n rectas en que pasan más de 2 por un mismo punto, son posiciones excepcionales de medida nula respecto de las integrales que figuran en (2,1). Exceptuando estas posiciones, vale la fórmula

$$P = V + n + 1 \tag{2.7}$$

como se deduce inmediatamente de la relación de Euler para redes del plano. En efecto, consideremos la red formada por las n rectas y el contorno de K. El número de vértices es igual a V más los $2n$ puntos que las rectas determinan en el contorno de K. El número de regiones es P. Para el número de lados, se observa que por cada uno de los V vértices interiores pasan 4 y por cada uno de los vértices del contorno pasan 3; como cada lado pertenece a dos vértices, el número de ellos será por tanto $\frac{1}{2}(4V + 6n) = 2V + 3n$. Por el teorema de Euler para superficies abiertas (número de regiones, más el de vértices, igual al de lados más uno) tendremos

$$V + P + 2n - 2V - 3n = 1$$

de donde resulta la relación (2.7) que queríamos probar. Por consiguiente:

b) *El valor medio del número de regiones en que n rectas al azar dividen a la figura convexa K es*

$$E_K(P) = n(n-1)\,\pi F L^{-2} + n + 1. \tag{2.8}$$

El número total de lados de la red formada por el contorno de K más las cuerdas que las rectas G_i determinan en K hemos visto que era $2V + 3n$. El número de lados del contorno es $2n$, luego el número de lados interiores será $2V + n$. Llamando N_i al número de lados de la región C_i al sumar los N_i para todas las P regiones, se observa que cada lado interior aparece contado dos veces y cada lado del contorno de K una sola vez. Por tanto

$$\sum_{1}^{P} N_i = 2(2V + n) + 2n = 4V + 4n. \tag{2.9}$$

De aquí *definiendo* el valor medio del número de lados de las regiones en que una figura convexa K queda dividida por n rectas dadas al azar por

$$E_K(N) = \frac{E_K\left(\sum_{1}^{P} N_i\right)}{E_K(P)}$$

resulta:

c) ***El valor medio del número de lados de las regiones en que una figura convexa K queda dividida por n rectas dadas al azar que cortan a K, es***

$$E_K(N) = 4 - \frac{4}{E_K(V) + n + 1}, \tag{2.10}$$

donde $E_K(V)$ está dado por (2.6).

Consideremos ahora la suma $\sum S_i$ $(i = 1, \ldots, P)$ de los perímetros de las regiones en que queda dividida K. Llamando, como antes, s_i a la longitud de la cuerda que G_i determina en K, es

$$\sum_{1}^{P} S_i = 2\sum_{1}^{n} s_i + L \tag{2.11}$$

y por tanto se tiene:

d) ***El valor medio de los perímetros de las regiones en que una figura convexa K queda dividida por n rectas dadas al azar que cortan a K, es*** (*)

(*) Obsérvese que esta definición de "valor medio" como el cociente

$$E_K(\sum S_i)/E_K(P)$$

es bastante natural. Podrían tomarse otras, por ejemplo

$$E_K(\sum S_i/P),$$

mas de acuerdo con la definición usual del cálculo de probabilidades, pero entonces resulta muy difícil el cálculo exacto.

$$E_K(S) = \frac{2\,n\,E_K(s_i) + L}{E_K(P)}$$

o bien, teniendo en cuenta que, según (2.5) y (2.3) es $E_K(s_i) = \pi F/L$, resulta

$$(2.12) \qquad E_K(S) = \frac{2\,\pi\,n\,F\,L + L^3}{n(n-1)\,\pi F + (n+1)\,L^2}\,.$$

Finalmente, de manera inmediata, definiendo el área media de las regiones en que queda dividida K por $E_K(A) = F/E_K(P)$, tenemos:

e) *El valor medio del área de las regiones en que una figura convexa K es dividida por n rectas al azar que la cortan, vale*

$$(2.13) \qquad E_K(A) = \frac{F\,L^2}{n(n-1)\,\pi F + (n+1)\,L^2}\,.$$

3. PASO AL PLANO EUCLIDIANO COMPLETO.— Al pasar de la figura convexa K a todo el plano euclidiano, los valores medios anteriores dependen de la forma de K y de la manera como esta figura crece hasta llenar todo el plano. Más exactamente, el resultado final depende de dos parámetros, a saber:

a) El límite de la razón F/L^2 del área de K y el cuadrado de su perímetro, cuando K crece hasta llenar todo el plano. *Nosotros vamos a suponer que K es un círculo, y por tanto*

$$(3.1) \qquad \frac{F}{L^2} = \frac{1}{4\,\pi}\,.$$

Esta hipótesis es fundamental. Si en vez de un círculo, supusiéramos que K es un cuadrado, sería $F/L^2 = 1/16$ y todas las fórmulas que siguen quedarían modificadas.

b) Debemos dar, además, la densidad media de las rectas, que ahora pasan a cubrir todo el plano. Ella estará dada por el valor límite de la razón r/n, siendo r el radio del círculo y n el número de rectas que lo cortan. Podemos adoptar dos criterios:

1. Suponer $E(A) = 1$. Entonces, según (2.13), poniendo $F = \pi\,r^2$, $L = \pi\,r$, para que al hacer $r \to \infty$ resulte $E(A) = 1$, el número n de rectas debe crecer de manera tal que sea

$$\lim \frac{r}{n} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \tag{3.2}$$

Esta es la hipótesis que hace Goudsmit [2], al suponer que las rectas del plano son tales que el valor medio del área de los polígonos en que queda dividido es igual a la unidad.

2. Se puede introducir el número k que indica el número medio de rectas que cortan a un segmento de longitud unidad colocado al azar sobre el plano. En este caso, como la probabilidad de que una recta que corta al círculo K corte a un segmento de longitud unidad colocado en su interior vale $2/L$ ([3], pág. 58), el valor medio del número de rectas que cortan al segmento será $2n/L = n/\pi r$ y si queremos que este valor sea k, resulta que al hacer $r \to \infty$, el número n de rectas debe crecer de manera que sea

$$\lim \frac{r}{n} = \frac{1}{\pi k}: \tag{3.3}$$

Esta es la hipótesis que hace Richards [6]. El parámetro k se relaciona con el parámetro τ usado por Miles [4], [5] por ser $\tau = \pi k/2$.

Nosotros vamos a tomar el convenio de Goudsmit, o sea, supondremos que se cumple la condición (3.2); corresponde al caso de Richards haciendo $k = 2/\sqrt{\pi}$.

Con este convenio, de (2.10) y (2.12), poniendo $F = \pi r^2$, $L = 2\pi r$ y teniendo en cuenta (3.2), resulta que los valores medios del número de lados N, y del perímetro S de los polígonos en que queda dividido el plano euclidiano por rectas al azar que cubren el plano con la condición $E(A) = 1$, valen $E(N) = 4$, $E(S) = 2\sqrt{\pi}$ de acuerdo con los resultados conocidos ya mencionados.

Vamos a hallar ahora el valor medio del cuadrado del área, que es la parte más complicada. Vamos a ver cómo por el método que aquí seguimos se llega al mismo resultado de Goudsmit.

Valor medio del cuadrado del área.— Sea K el círculo de radio r. Sean P_1, P_2 dos puntos interiores al mismo y representemos por $dP_i = [dx_i\, dy_i]$ $(i = 1, 2)$ al elemento de área del plano correspondiente a cada uno de ellos. Siendo $G_1, G_2, \ldots, G_n$, n rectas que cortan a K, consideremos la integral

$$I = \int dP_1\, dP_2\, dG_1 \ldots dG_n \tag{3.4}$$

extendida a todas las rectas que cortan a K y, para cada posición de las mismas, a las posiciones de P_1, P_2 que pertenecen a una misma región de las que queda dividida K, es decir a las posiciones en que P_1 y P_2 no son separados por ninguna de las n rectas.

Fijando primero las n rectas G_i, es

$$I = \int \sum_1^p A_i^2\, dG_1 \ldots dG_n . \tag{3.5}$$

De aquí,

$$E\left(\sum_1^p A_i^2\right) = \frac{I}{L^n} \tag{3.6}$$

y por tanto el valor medio del cuadrado del área de las regiones en que las n rectas dividen a K, según la definición adoptada, vale

$$E_K(A^2) = \frac{I}{E_K\,(P)\, L^n} \tag{3.7}$$

donde $E_K\,(P)$ está dado por (2.8).

Para calcular I fijemos ahora los puntos P_1, P_2. Llamando a a la distancia entre P_1, P_2, puesto que la integral de cada dG_i extendida a las posiciones en que G_i no separa a los puntos P_1, P_2 es igual a la medida de las rectas que cortan a K (que vale $L = 2\pi r$) menos la medida de las que cortan al segmento $P_1 P_2$ (que vale $2a$), se tiene

$$I = \int (2\pi r - 2a)^n\, dP_1\, dP_2 . \tag{3.8}$$

Fijado P_1, es $dP_2 = a\, da\, d\theta$, siendo θ el ángulo de la recta $P_1 P_2$ con una dirección fija del plano. Fijados a, θ la integral de dP_1 es el área de la intersección de K con su trasladada en la dirección opuesta a θ de un segmento a. Para el caso general de una figura convexa cualquiera K, esta área no puede expresarse mediante funciones elementales, pero si K es un círculo de radio r, el ára se compone de dos segmentos circulares de flecha igual a $r - a/2$. Por otra parte, esta área es independiente de la dirección θ y por tanto la integral de $d\,\theta$ es 2π. Resulta así

$$I = 4\pi \int_0^{2r} (2\pi r - 2a)^n\, a\left(r^2 \arccos\,(a/2r) - \frac{a}{4}\sqrt{4r^2 - a^2}\right) da. \tag{3.9}$$

Por tanto, según (3.7) y (2.8) se tiene

$$
(3.10) \qquad E_K(A^2) = \frac{16\,\pi \int\limits_0^{2r} \left(1 - \dfrac{a}{\pi r}\right)^n a r^2 \left(\operatorname{arc\,cos} \dfrac{a}{2r} - \dfrac{a}{4r}\sqrt{4 - \dfrac{a^2}{r^2}}\right) da}{n\,(n-1) + 4\,(n+1)} \, .
$$

Pasando al límite para $r \to \infty$, $n \to \infty$ con la condición (3.2), resulta

$$
(3.11) \qquad E(A^2) = 2\,\pi \int\limits_0^{\infty} e^{-2a/\sqrt{\pi}}\, a\, da = \tfrac{1}{2}\,\pi^2
$$

de acuerdo con el resultado de Goudsmit [2].

Obsérvese que si en vez de la integral I (3.4) consideramos

$$
\int f(a)\, dP_1\, dP_2\, dG_1 \ldots dG_n,
$$

siendo siempre a la distancia $P_1\,P_2$, el razonamiento anterior conduce a la fórmula final

$$
(3,12) \qquad E\left(\int f(a)\, dP_1\, dP_2\right) = 2\,\pi \int\limits_0^{\infty} e^{-2a/\sqrt{\pi}}\, a\, f(a)\, da
$$

donde la integral del primer miembro está extendida al interior de uno de los polígonos en que las rectas dividen al plano. Esta fórmula (3.12), que contiene muchos casos particulares según el valor asignado a la función $f(a)$, ha sido obtenida por Richards [6].

4. EL CASO DEL PLANO HIPERBOLICO.— Hemos hecho los cálculos anteriores referentes al plano euclidiano, aunque los resultados obtenidos ya eran conocidos, para mejor comprender la generalización al plano hiperbólico. El método va a ser el mismo; únicamente cambian las fórmulas intermedias y los resultados finales.

Una recta del plano hiperbólico queda determinada por su distancia v a un origen fijo O y por el ángulo θ que su normal por O forma con una dirección fija (también por O). Para medir un conjunto de rectas se toma la integral de la forma diferencial

$$
(4.1) \qquad dG = \cosh v\, dv\, d\theta
$$

que en Geometría Integral se llama la "densidad" para rectas en el plano hiperbólico y que es la única forma invariante por movimientos (salvo un factor constante). Ver [9], [10].

Con esta densidad, la medida de las rectas que cortan a una figura convexa es igual al perímetro de la misma (igual que en el caso euclidiano) y también vale la fórmula (2.5) del plano euclidiano ([9], [10]). Por consiguiente, todo lo dicho para el caso de una figura convexa K del plano euclidiano en el nº 2 vale exactamente igual para el plano hiperbólico. Es decir:

Los valores medios (2.6), (2.8), (2.10), (2.12 y (2.13) valen igualmente para el plano hiperbólico.

La diferencia empieza al suponer que K crece hasta llenar todo el plano. Supongamos que K sea un círculo de radio r. Entonces es (ver por ejemplo Coxeter [1], pág. 250)

$$L = 2\pi \operatorname{senh} r \quad , \quad F = 2\pi(\cosh r - 1) \tag{4.2}$$

y por tanto

$$\frac{2\pi K}{L^2} = \frac{1}{\cosh r + 1} . \tag{4.3}$$

El área media (2.13) valdrá por tanto

$$E_K(A) = \frac{4\pi \operatorname{senh}^2 r}{n(n-1) + 2(n+1)(\cosh r + 1)} . \tag{4.4}$$

Si normalizamos la densidad de las rectas de manera que para $r \to \infty$ sea $E(A) = 1$, deberá ser

$$4\pi\left(\frac{\operatorname{senh} r}{n}\right)^2 = 1 - \frac{1}{n} + \frac{2(n+1)(\cosh r + 1)}{n^2}$$

y puesto que, para $r \to \infty$, $\operatorname{senh} r/\cosh r \to 1$, poniendo

$$\lim \frac{\operatorname{senh} r}{n} = \xi \tag{4.5}$$

resulta que ξ debe ser raíz de la ecuación

$$4\pi\xi^2 = 1 + 2\xi \tag{4.6}$$

o sea, puesto que ξ debe ser positivo

$$(4.7) \qquad \xi = \frac{1 + \sqrt{1 + 4\pi}}{4\pi} = 0{,}3726\ldots$$

Para el caso 2º considerado en el nº 3, si se quiere que el valor medio del número de rectas que cortan a un segmento de longitud unidad colocado al azar sobre el plano, sea k, el radio r y el número n, deben tender a ∞ ligados por la relación

$$\lim \frac{2n}{2\pi \operatorname{senh} r} = k$$

o sea

$$(4.8) \qquad \lim \frac{\operatorname{senh} r}{n} = \frac{1}{\pi k}.$$

En este caso resulta $E(A) = 4/(\pi k^2 + 2k)$ y para que sea $E(A) = 1$ debe ser $k = 1/\pi\xi$.

Al pasar a todo el plano hiperbólico a partir de un círculo cuyo radio $r \to \infty$ y con un número de rectas n que también tiende a ∞ conservándose la relación (4.5), es $E(A) = 1$ y la relación (2.10) da inmediatamente $E(N) = 4$. El valor medio del perímetro S de los polígonos en que el plano queda dividido ya no es el mismo de antes. A partir de (2.12), poniendo $F = 2\pi(\cosh r - 1)$, $L = 2\pi \operatorname{senh} r$ y pasando al límite, teniendo en cuenta (4.5), resulta

$$(4.9) \qquad E(S) = 1 + \frac{1}{\xi} = 3{,}683\ldots$$

Se tienen así los primeros resultados enunciados en el nº 1. Pasemos ahora al cálculo más complicado del valor medio del cuadrado del área.

Valor medio del cuadrado del área.— Para seguir el mismo camino del plano euclidiano, necesitamos calcular el área de la intersección de dos circunferencias de radio r cuya distancia entre los centros es a $(0 \leqslant a \leqslant 2r)$, fig. 1. Sea φ el ángulo central correspondiente al huso que constituye dicha intersección. El área del sector circular de ángulo central φ vale $\varphi(\cosh r - 1)$. Debemos restarle el área del triángulo isósceles OUV que vale $\pi - (\varphi + 2\alpha)$ (Coxeter [1], pág. 246), siendo α el

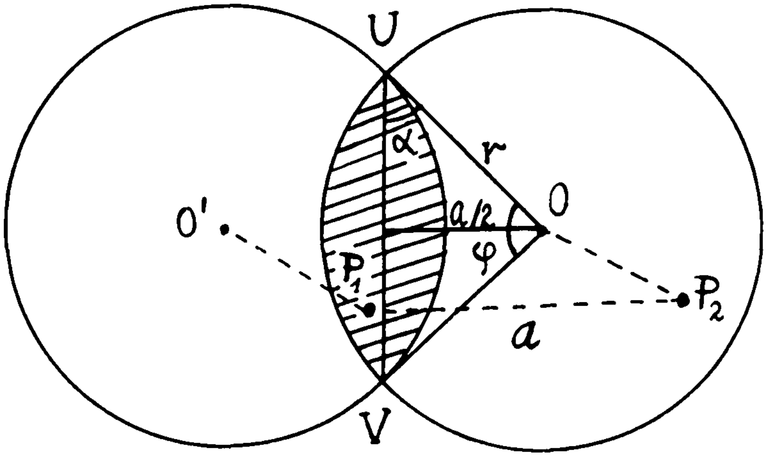

Fig. 1

ángulo de la base. Por otra parte en el triángulo rectángulo mitad de OUV vale (Coxeter [1], pág. 238)

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{\operatorname{senh}(a/2)}{\operatorname{senh} r} \quad , \quad \cos \frac{\varphi}{2} = \frac{\tanh(a/2)}{\tanh r} \, .$$

Por tanto el área del huso intersección de los dos círculos vale

$$(4.10) \qquad H(a, r) = 2 \varphi(\cosh r - 1) - 2 \pi + 2 (\varphi + 2 \alpha) =$$

$$4 \operatorname{arc} \cos \frac{\tanh(a/2)}{\tanh r} \cosh r - 2 \pi + 4 \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{\operatorname{senh}(a/2)}{\operatorname{senh} r}$$

Igual que en el caso del plano euclidiano tenemos ahora la misma integral I, que por un lado tiene el mismo valor (3.5) y por otro lado, teniendo en cuenta que fijado P_1 es $dP_2 = \operatorname{senh} a \, da \, d\theta$, en vez de (3.9) resulta ahora

$$(4.11) \qquad I = 2 \pi \int_0^{2r} (2 \pi \operatorname{senh} r - 2 a)^n \, \mathrm{H}(a, r) \operatorname{senh} a \, da \, .$$

Para hallar $E(A^2)$, según (3.7), debemos dividir por $E_K(P) \, L^n$ y luego pasar el límite para $r, n \to \infty$ ligados por la relación (4.5). Según la normalización $E_K(A) = 1$, es $E_K(P) = F = 2 \pi (\cosh r - 1)$. Siendo, además, $L = 2 \pi \operatorname{senh} r$, queda

$$E(A^2) = \lim_{r,n\to\infty} \frac{2\pi \int_0^{2r} \left(1 - \frac{a}{\pi \operatorname{senh} r}\right)^n \operatorname{senh} a\, H(a,r)\, da}{2\pi(\cosh r - 1)} =$$

$$= 4 \int_0^{\infty} e^{-a/\pi\xi} \operatorname{senh} a \operatorname{arc\,cos}\left(\tanh(a/2)\right) da,$$

o bien, poniendo $a = 2\xi u$,

$$(4{,}12) \qquad E(A^2) = 8\xi \int_0^{\infty} e^{-2u/\pi} \operatorname{senh}(2\xi u) \operatorname{arc\,cos}(\tanh \xi u)\, du\,.$$

Siendo

$$\int e^{-2u/\pi} \operatorname{senh}(2\xi u)\, du = \frac{\pi}{2(\pi^2\xi^2 - 1)} e^{-2u/\pi} (\operatorname{senh} 2\xi u + \pi\xi \cosh 2\xi u)$$

y también

$$d\left(\operatorname{arc\,cos}(\tanh \xi u)\right) = -\frac{\xi}{\cosh \xi u} du$$

la integral de (4.12) se puede integrar por partes, quedando

$$E(A^2) =$$

$$= 8\xi \left[\frac{\pi}{2(\pi^2\xi^2 - 1)} e^{-2u/\pi}\left(\operatorname{senh}(2\xi u) + \pi\xi\cosh(2\xi u)\right)\operatorname{arc\,cos}(\tanh\xi u)\right]_0^{\infty} +$$

$$+ \frac{8\pi\xi^2}{2(\pi^2\xi^2 - 1)} \int_0^{\infty} e^{-2u/\pi} (\operatorname{senh} 2\xi u + \pi\xi \cosh 2\xi u) \frac{du}{\cosh \xi u} =$$

$$= -\frac{2\pi^3\xi^2}{\pi^2\xi^2 - 1} +$$

$$+ \frac{4\pi\xi^2}{\pi^2\xi^2 - 1} \int_0^{\infty} e^{-2u/\pi}\left(\operatorname{senh}(2\xi u) + \pi\xi\cosh(2\xi u)\right)\frac{du}{\cosh \xi u}\,.$$

habiendo tenido en cuenta que $1/\pi < \xi < 2/\pi$.

De manera inmediata se calculan las integrales

$$\int_0^{\infty} e^{-2u/\pi} \frac{\operatorname{senh}(2\xi u)}{\cosh \xi u} du = 2\int_0^{\infty} e^{-2u/\pi} \operatorname{senh} \xi u\, du = \frac{2\pi^2\xi}{4 - \pi^2\xi^2}$$

$$\int_0^{\infty} e^{-2u/\pi} \frac{\cosh(2\,\xi\,u)}{\cosh \xi\,u}\, du = 2 \int_0^{\infty} e^{-2u/\pi} \cosh \xi\,u\, du$$

$$- \int_0^{\infty} \frac{e^{-2u/\pi}}{\cosh \xi\,u}\, du = \frac{4\,\pi}{4 - \pi^2\,\xi^2} - \int_0^{\infty} \frac{e^{-2u/\pi}}{\cosh \xi\,u}\, du\,.$$

La última integral se expresa mediante la función derivada logarítmica de $\Gamma(x)$. Introduciendo las funciones

$$(4.13) \qquad \Psi\,(x) = \frac{d}{dx} \log \Gamma\,(x)\ ,\ \beta(x) = \tfrac{1}{2}\left(\Psi\,(\frac{x+1}{2}) - \Psi\,(\frac{x}{2})\right)$$

resulta (ver, por ejemplo, las tablas de integrales de I.S. Gradshteyn-I. M. Ryzhik, Moscú, 1962, pág. 961)

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-2u/\pi}}{\cosh \xi\,u}\, du = \frac{1}{\xi}\,\beta\,(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi\,\xi})\,.$$

Por consiguiente, reuniendo todos los resultados obtenidos, resulta

$$(4.14) \qquad E(A^2) = \frac{2\,\pi^3\,\xi^2}{\pi^2\,\xi^2 - 1}\left[-1 + \frac{12\,\xi}{4 - \pi^2\,\xi^2} - \frac{2}{\pi}\,\beta\,(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi\,\xi})\right].$$

Para calcular

$$\beta\,(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi\,\xi})$$

aplicamos (4.13) y utilizamos las tablas de Jahnke-Emde (Pág. 16). Siendo $\xi = 0{,}3726\ldots$ resulta

$$x = \tfrac{1}{2} + \frac{1}{\pi\,\xi} = 1{,}354\ldots$$

Para aplicar las tablas de Jahnke-Emde usamos la relación

$$\Psi\,(x) = \Psi\,(x - 1) + 1/x$$

y por tanto

$$\Psi\,(\frac{x+1}{2}) = \Psi\,(1{,}177) = \Psi\,(0{,}177) + 0{,}849 = 0{,}625$$

$$\Psi\,(x/2) = \Psi\,(0{,}677) = 0{,}190$$

$$\beta\,(x) = \tfrac{1}{2}\Big(\Psi\,(\tfrac{1}{2}\,(x+1) - \Psi\,(\tfrac{1}{2}\,x)\Big) = 0{,}218\ldots$$

Con estos valores, sustituidos en (4.14) y haciendo los restantes cálculos, resulta

$$E(A^2) = 13{,}02\ldots$$

Este es el resultado final, bastante más grande que en el caso euclidiano.

Análogamente al caso euclidiano, si se considera la integral

$$\int f\,(a)\,dP_1\,dP_2\,dG_1\ldots dG_n$$

se llega al resultado general

$$E\Big(\int f\,(a)\,dP_1\,dP_2\Big) =$$

$$= 4\int_0^\infty e^{-a/\pi\xi} f\,(a) \operatorname{senh} a \operatorname{arc\,cos}\,(\tanh \frac{a}{2})\,da$$

que generaliza al plano hiperbólico la fórmula (3.12) de P. I. Richards.

BIBLIOGRAFIA

[1] COXETER, H. S. M. *Non-euclidean Geometry*, University of Toronto Press, 3. ed. Toronto, 1957.

[2] GOUDSMIT, S. A. *Random distribution of lines in a plane*, Rev. Mod. Phys. 17, 1945, 321-322.

[3] KENDALL, M. G. - MORAN, P. A. P. *Geometrical probability*, Griffin's statistical Monographs & courses, Hafner Publishing Com. New. York, 1963.

[4] MILES, R. E. *Random polygons determined by random lines in a plane*, Proc. Nat. Acad. Sciences, 52, 1964, 901-907.

[5] MILES, R. E. *Random polygons determined by random lines in a plane II*, Proc. Nat. Acad. Sciences, 52, 1964, 1157-1160.

[6] RICHARDS, P. I. *Averages for polygons formed by random lines*, Proc. Nat. Acad. Sciences, 62, 1964, 1160-1164.

[7] SANTALÓ, L. A. *Valor medio del número de partes en que una figura convexa es dividida por rectas arbirtarias*, Revista de la Unión Mat. Argentina, VII, 1941, 33-37.

[8] SANTALÓ, L. A. *Sobre la distribución de planos en el espacio*, Rev. de la Unión Mat. Argentina, XIII, 1948, 120-124.

[9] SANTALÓ, L. A. *Integral Geometry on surfaces of constant negative curvature*, Duke Math. J. 10, 1943, 687-704.

[10] SANTALÓ, L. A. *Introduction to Integral Geometry*, Hermann, Paris, 1953.