SOBRE UNOS TENSORES ANALOGOS AL DE CURVATURA EN ESPACIOS DE CONEXION AFIN NO SIMETRICA

Por L. A. SANTALO

(Recibido en marzo 6, 1954)

SUMMARY

In riemannian space, the difference between second covariant derivatives, with the order of derivation permuted, gives rise to the curvature tensor. In spaces with a non-simmetrical affine connexion, from the fundamental connexion (1.1) we deduce the connexions (1.3) and we have different kinds of covariant differentiation according to the connexion we use for the differentiation of each index of the tensor (see [1]).

If we consider the difference between (1.5) and (1.6), were the subscripts 1, 2, ... indicate that the corresponding derivatives are done with respect to the connexions ${}^1\Gamma$, ${}^2\Gamma$, ... choosen among the (1.3), we deduce the tensor (1.8). The more natural case is that in wich we assume the conditions (2.1), (2.2); then we have the tensor (2.4) which generalizes the ordinary curvature tensor.

By contraction we get the tensors (3.1) and (3.3). We prove : *a*) In order that all the tensors (3.1) are equal to zero, there is sufficient that conditions (4.2) hold ; *b*) In order that all the tensors (3.3) are equal to zero, there is sufficient that the conditions (4.4) hold. Introduction of the tensor (4.5) enables to state : in order that all the contracted tensors (3.1) and (3.3) are equal to zero, there is sufficient that the conditions (4.7) hold.

The tensor (4.5) is fundamental in the Einstein's unified field theory of 1951 [1] whose field equations are (5.1) and (5.2). The preceding result gives that for a space which satisfies the field equations (5.1) and (5.2), the contracted tensors (3.1) and (3.3) will be equal to zero if and only if the suplementary tensorial condition (5.3) holds.

1. Diferencia entre derivadas covariantes segundas.— Sea el espacio definido por la conexión afín no simétrica Γ^s_{ij}. Separando la parte simétrica de la antisimétrica se puede poner

$$\Gamma^s_{ij} = \Gamma^s_{(ij)} + \Gamma^s_{[ij]} \tag{1.1}$$

con

$$\Gamma^s_{(ij)} = \frac{1}{2}(\Gamma^s_{ij} + \Gamma^s_{ji}), \quad \Gamma^s_{[ij]} = \frac{1}{2}(\Gamma^s_{ij} - \Gamma^s_{ji}), \tag{1.2}$$

donde $\Gamma^s_{(ij)}$ es una conexión simétrica y $\Gamma^s_{[ij]}$ es un tensor (torsión del espacio).

De la conexión fundamental Γ^s_{ij} se deducen las conexiones

$$^0\Gamma^s_{ij} = \Gamma^s_{(ij)}, \quad ^+\Gamma^s_{ij} = \Gamma^s_{ij}, \quad ^-\Gamma^s_{ij} = \Gamma^s_{ji} = \Gamma^s_{(ij)} - \Gamma^s_{[ij]}. \tag{1.3}$$

En general pondremos $^1\Gamma^s_{ij}$, $^2\Gamma^s_{ij}$, ..., para indicar cualquiera de las conexiones (1.3). Es decir, los números 1, 2, 3, ... pueden sustituirse por cualquiera de los símbolos 0, $+$, $-$ y entonces las conexiones están definidas por (1.3).

Para cada una de estas conexiones se puede definir una derivación covariante que, por ejemplo para vectores covariantes, indicaremos (siguiendo a Einstein [1]),

$$A_{\underset{1}{i};j} = A_{i,j} - {}^1\Gamma^s_{ij} A_s \tag{1.4}$$

y análogamente para vectores contravariantes o para las conexiones. En todo lo que sigue, como es costumbre, el punto y coma indicará la derivación covariante y la coma sola derivación ordinaria.

Para tensores, la derivación covariante se hace de manera análoga, poniendo debajo de cada índice el número que indica la conexión respecto a la cual se deriva. Por ejemplo, del tensor (1.4), por nueva derivación covariante se puede obtener el tensor

$$\begin{aligned} A_{\underset{\underset{2}{1}}{i};\underset{3}{j}h} = (A_{i,jh} - {}^1\Gamma^s_{ij,h} A_s - {}^1\Gamma^s_{ij} A_{s,h}) - {}^2\Gamma^l_{ih}(A_{l,j} - {}^1\Gamma^s_{lj} A_s) - \\ - {}^3\Gamma^l_{jh}(A_{i,l} - {}^1\Gamma^s_{il} A_s). \end{aligned} \tag{1.5}$$

La notación del primer miembro indica que al derivar respecto a h el primer índice se deriva con la conexión $^2\Gamma$ y el segundo con la conexión $^3\Gamma$.

Permutando el orden de derivación en (1.5) y haciendo las nuevas derivadas respecto a otras conexiones $^4\Gamma$, $^5\Gamma$, $^6\Gamma$, siempre dentro de las (1.3), se tiene

$$\begin{aligned} A_{\underset{\underset{5}{4}}{i};\underset{6}{h}j} = (A_{i,hj} - {}^4\Gamma^s_{ih,j} A_s - {}^4\Gamma^s_{ih} A_{s,j}) - {}^5\Gamma^l_{ij}(A_{l,h} - {}^4\Gamma^s_{lh} A_s) - \\ - {}^6\Gamma^l_{hj}(A_{i,l} - {}^4\Gamma^s_{il} A_s). \end{aligned} \tag{1.6}$$

Restando miembro a miembro (1.5) y (1.6), como el primer miembro es un tensor, también lo será el segundo, que resulta

$$\mathbf{A}_s\left({}^4\Gamma^s_{ih\,,\,j} - {}^1\Gamma^s_{ij\,,\,h} + {}^1\Gamma^s_{lj}\,{}^2\Gamma^l_{ih} - {}^4\Gamma^s_{lh}\,{}^5\Gamma^l_{ij} + {}^1\Gamma^s_{il}\,{}^3\Gamma^l_{jh} - {}^4\Gamma^s_{il}\,{}^6\Gamma^l_{hj}\right) +$$
$$+ \mathbf{A}_{i\,,\,l}\left({}^6\Gamma^l_{hj} - {}^1\Gamma^l_{jh}\right) + \mathbf{A}_{l\,,\,j}\left({}^4\Gamma^l_{ih} - {}^2\Gamma^l_{ih}\right) + \mathbf{A}_{l\,,\,h}\left({}^5\Gamma^l_{ij} - {}^1\Gamma^l_{ij}\right). \quad (1.7)$$

Para dar forma tensoral a estas expresiones pongamos

$$\mathbf{A}_{i\,,\,l} = \mathbf{A}_{\underset{7}{i}\,;\,l} + {}^7\Gamma^s_{il}\,\mathbf{A}_s, \qquad \mathbf{A}_{l\,,\,j} = \mathbf{A}_{\underset{8}{l}\,;\,j} + {}^8\Gamma^s_{lj}\,\mathbf{A}_s,$$
$$\mathbf{A}_{l\,,\,h} = \mathbf{A}_{\underset{9}{l}\,;\,h} + {}^9\Gamma^s_{lh}\,\mathbf{A}_s$$

con lo cual queda el tensor

$$\mathbf{A}_s\Big\{{}^4\Gamma^s_{ih\,,\,j} - {}^1\Gamma^s_{ij\,,\,h} + {}^1\Gamma^s_{lj}\,{}^2\Gamma^l_{jh} - {}^4\Gamma^s_{lh}\,{}^5\Gamma^l_{ij} + {}^1\Gamma^s_{il}\,{}^3\Gamma^l_{jh} -$$
$$- {}^4\Gamma^s_{il}\,{}^6\Gamma^l_{hj} + {}^7\Gamma^s_{il}\left({}^6\Gamma^l_{hj} - {}^3\Gamma^l_{jh}\right) + {}^8\Gamma^s_{lj}\left({}^4\Gamma^l_{ih} - {}^2\Gamma^l_{ih}\right) +$$
$$+ {}^9\Gamma^s_{lh}\left({}^5\Gamma^l_{ij} - {}^1\Gamma^l_{ij}\right)\Big\} + \mathbf{A}_{\underset{7}{i}\,;\,l}\left({}^6\Gamma^l_{hj} - {}^3\Gamma^l_{jh}\right) +$$
$$+ \mathbf{A}_{\underset{8}{l}\,;\,j}\left({}^4\Gamma^l_{ih} - {}^2\Gamma^l_{ih}\right) + \mathbf{A}_{\underset{9}{l}\,;\,h}\left({}^5\Gamma^l_{ij} - {}^1\Gamma^l_{ij}\right).$$

Como los tres últimos sumandos son tensores, resulta que la cantidad

$$\mathrm{T}^s_{ihj}(1, 2, ..., 8, 9) = {}^4\Gamma^s_{ih\,,\,j} - {}^1\Gamma^s_{ij\,,\,h} + {}^1\Gamma^s_{lj}\,{}^2\Gamma^l_{ih} - {}^4\Gamma^s_{lh}\,{}^5\Gamma^l_{ij} + \quad (1.8)$$
$$+ {}^1\Gamma^s_{il}\,{}^3\Gamma^l_{jh} - {}^4\Gamma^s_{il}\,{}^6\Gamma^l_{hj} + {}^7\Gamma^s_{il}\left({}^6\Gamma^l_{hj} - {}^3\Gamma^l_{jh}\right) + {}^8\Gamma^s_{lj}\left({}^4\Gamma_{ih} - {}^2\Gamma^l_{ih}\right) +$$
$$+ {}^9\Gamma^s_{lh}\left({}^5\Gamma^l_{ij} - {}^1\Gamma^l_{ij}\right)$$

es un tensor.

Por el método de obtención, la expresión (1.8) es un tensor cualesquiera que sean las conexiones ${}^1\Gamma, {}^2\Gamma, ..., {}^9\Gamma$. Sin embargo, si se parte de un espacio en que la única conexión dada es la (1.1), estas conexiones deben elegirse entre las (1.3) o entre otras deducidas de la conexión fundamental (1.1).

2. Tensores análogos al de curvatura. — En lugar de considerar las derivadas covariantes segundas (1.5) y (1.6), con cada índice derivado respecto una conexión diferente, parece natural considerar que las derivadas del índice i respecto j, h sean hechas en ambos casos con la misma conexión, es decir, tomar

$${}^4\Gamma = {}^2\Gamma\ ,\ {}^5\Gamma = {}^1\Gamma. \qquad (2.1)$$

Además, tomemos

$$^{3}\Gamma = {}^{-6}\Gamma \ , \ \text{con} \ {}^{-6}\Gamma^{s}_{ij} = {}^{6}\Gamma^{s}_{ji} \tag{2.2}$$

lo cual equivale a transponer los índices de la conexión al pasar de la derivada del índice i respecto el h a la derivada del índice h respecto el i.

Con esto queda

$$\mathrm{A}_{\underset{\underset{2}{1}}{i}\,;\,\underset{3}{jh}} - \mathrm{A}_{\underset{\underset{1}{2}}{i}\,;\,\underset{-3}{hj}} = \mathrm{A}_{s}\big({}^{2}\Gamma^{s}_{ih\,,\,j} - {}^{1}\Gamma^{s}_{ij\,,\,h} + {}^{1}\Gamma^{s}_{lj}\,{}^{2}\Gamma^{l}_{ih} - \tag{2.3}$$

$$- {}^{2}\Gamma^{s}_{lh}\,{}^{1}\Gamma^{l}_{ij} + {}^{1}\Gamma^{s}_{il}\,{}^{3}\Gamma^{l}_{jh} - {}^{2}\Gamma^{s}_{il}\,{}^{3}\Gamma^{l}_{jh}\big).$$

Resulta así el tensor

$$\mathrm{R}^{s}_{ihj}(1,\,2,\,3) = {}^{2}\Gamma^{s}_{ih\,,\,j} - {}^{1}\Gamma^{s}_{ij\,,\,h} + {}^{1}\Gamma^{s}_{lj}\,{}^{2}\Gamma^{l}_{ih} - {}^{2}\Gamma^{s}_{lh}\,{}^{1}\Gamma^{l}_{ij} + \tag{2.4}$$

$$+ {}^{1}\Gamma^{s}_{il}\,{}^{3}\Gamma^{l}_{jh} - {}^{2}\Gamma^{s}_{il}\,{}^{3}\Gamma^{l}_{jh}\,.$$

Dando a $^{1}\Gamma$, $^{2}\Gamma$, $^{3}\Gamma$ cualesquiera de los valores (1.3) resultan $3^{3} = 27$ posibilidades. Sin embargo, cuando sea $^{1}\Gamma = {}^{2}\Gamma$ el tensor (2.4) resulta independiente de $^{3}\Gamma$; por tanto el número de tensores diferentes se reduce a 21.

Si se parte de un vector contravariante A^{s}, el tensor general (1.8) resulta diferente, pero con las condiciones (2.1), (2.2) el tensor (2.4) resulta el mismo.

Por tanto: en todo espacio de conexión afín no simétrica existen 21 tensores cuya fórmula general es la (2.4) análogos al ordinario tensor de curvatura.

El ordinario tensor de curvatura de la conexión

$$\Gamma^{s}_{ij} \ \text{es el} \ \mathrm{R}^{s}_{ihj}(+,\,+,\,+)$$

que corresponde a tomar en (2.4) $^{1}\Gamma = {}^{2}\Gamma = {}^{3}\Gamma = {}^{+}\Gamma$.

De (2.3) se deduce: *para que las derivadas cruzadas de un vector* A_{i} *indicadas en el primer miembro de* (2.3) (*o las análogas de un vector contravariante* A^{i}) *sean todas nulas, cualesquiera que sean las conexiones* $^{1}\Gamma$, $^{2}\Gamma$, $^{3}\Gamma$ *elegidas entre las* (1.3) *y cualesquiera que sea* A_{i}, *es necesario y suficiente que sean nulos los 21 tensores* (2.4).

3. Tensores contraídos. — A partir de (2.4), por contracción de los índices s, j se obtiene el tensor

$$R_{ih}(1, 2, 3) = R^s_{ihs}(1, 2, 3) = {}^2\Gamma^s_{ih\,,\,s} - {}^1\Gamma^s_{is\,,\,h} + \tag{3.1}$$
$$+ {}^1\Gamma^s_{ls}\,{}^2\Gamma^l_{ih} - {}^2\Gamma^s_{lh}\,{}^1\Gamma^l_{is} + {}^1\Gamma^s_{il}\,{}^3\Gamma^l_{sh} - {}^2\Gamma^s_{il}\,{}^3\Gamma^l_{sh}\,.$$

Por contracción de los índices s, h se obtiene por un cálculo inmediato

$$R^*_{ih}\ (1, 2, 3) = R^s_{ish}(1, 2, 3) = -\ R_{ih}(2, 1, -3) \tag{3.2}$$

donde debemos recordar que ponemos ${}^{-3}\Gamma^s_{ij} = {}^3\Gamma^s_{ji}$.

Por contracción de los índices s, i se tiene

$$R^{**}_{ih}(1, 2, 3) = R^s_{sih}(1, 2, 3) = {}^2\Gamma^s_{si\,,\,h} - {}^1\Gamma^s_{sh\,,\,i} + \tag{3.3}$$
$$+ \left({}^1\Gamma^s_{sl} - {}^2\Gamma^s_{sl}\right){}^3\Gamma^l_{hi}.$$

Observemos que siendo ${}^1\Gamma$, ${}^2\Gamma$, ${}^3\Gamma$ una de las conexiones (1.3) es

$${}^1\Gamma^s_{(ij)} = {}^2\Gamma^s_{(ij)} = {}^3\Gamma^s_{(ij)} = \Gamma^s_{(ij)}. \tag{3.4}$$

Poniendo además, para cualquier conexión,

$$\Gamma^s_{[is]} = -\ \Gamma^s_{[si]} = \Gamma_i \tag{3.5}$$

el último tensor contraído se puede escribir

$$R^{**}_{ih}(1, 2, 3) = {}^2\Gamma^s_{si\,,\,h} - {}^1\Gamma^s_{sh\,,\,i} + \left({}^2\Gamma_l - {}^1\Gamma_l\right){}^3\Gamma^l_{hi}\,. \tag{3.6}$$

Obsérvese que es

$${}^0\Gamma_l = 0, \quad {}^+\Gamma_l = \Gamma^s_{[ls]} = \Gamma_l, \quad {}^-\Gamma_l = \Gamma^s_{[sl]} = -\ \Gamma_l. \tag{3.7}$$

4. Condiciones para la anulación de los tensores (3.1) y (3.6). — Descomponiendo cada conexión ${}^1\Gamma$, ${}^2\Gamma$, ${}^3\Gamma$ en su parte simétrica y antisimétrica, los tensores (3.1) se pueden escribir en la forma

$$R_{ih}(1, 2, 3) = R_{ih}({}^0\Gamma) + {}^2\Gamma^s_{[ih]\,;\,s}({}^0\Gamma) - {}^1\Gamma^s_{[is]\,;\,h}({}^0\Gamma) + \tag{4.1}$$
$$+ {}^1\Gamma^s_{[ls]}\,{}^2\Gamma^l_{[ih]} - {}^2\Gamma^s_{[lh]}\,{}^1\Gamma^l_{[is]} + {}^1\Gamma^s_{[il]}\,{}^3\Gamma^l_{[sh]} - {}^2\Gamma^s_{[il]}\,{}^3\Gamma^l_{[sh]},$$

donde $R_{ih}({}^0\Gamma) = R_{ih}(0, 0, 0)$ indica el tensor de Ricci tomado con la conexión simétrica ${}^0\Gamma = \Gamma^s_{(ij)}$ y las derivadas covariantes de los términos segundo y tercero del segundo miembro son tomadas también respecto la misma conexión ${}^0\Gamma$.

Puesto que las ${}^1\Gamma$, ${}^2\Gamma$, ${}^3\Gamma$ son algunas de las conexiones (1.3), de (4.1) se deduce:

Para la anulación de los 21 tensores (3.1) *o* (4.1) *son suficientes las condiciones siguientes:*

$$\mathrm{R}_{ih}({}^0\Gamma) = 0 \ , \ \Gamma^s_{[ih]\,;\,s}({}^0\Gamma) = 0$$
$$\Gamma_i = 0 \ , \ \Gamma^l_{[is]}\Gamma^s_{[lh]} = 0. \tag{4.2}$$

Análogamente, descomponiendo las conexiones que figuran en la expresión del tensor (3.6) en su parte simétrica y su parte antisimétrica, se puede escribir

$$\begin{aligned} \mathrm{R}^{**}_{ih}(1, 2, 3) = {}& {}^2\Gamma^s_{(si)\,,\,h} - {}^1\Gamma^s_{(sh)\,,\,i} + {}^2\Gamma^s_{[si]\,,\,h} - {}^1\Gamma^s_{[sh]\,,\,i} + \\ & + \left({}^1\Gamma^s_{[sl]} - {}^2\Gamma^s_{[sl]}\right)\left({}^3\Gamma^l_{[hi]} + {}^3\Gamma^l_{[hi]}\right), \end{aligned} \tag{4.3}$$

de donde teniendo en cuenta (3.4), se deduce:

Para la anulación de los 21 tensores (3.6) *son suficientes las siguientes condiciones:*

$$\Gamma^s_{(si)\,,\,h} - \Gamma^s_{(sh)\,,\,i} = 0 \ , \ \Gamma_i = 0. \tag{4.4}$$

Las ecuaciones (4.2) pueden escribirse en otra forma más breve introduciendo el tensor

$$\mathrm{E}_{ih} = -\frac{1}{2}\left(\Gamma^s_{(is)\,,\,h} + \Gamma^s_{(sh)\,,\,i}\right) + \Gamma^s_{ih\,,\,s} + \Gamma^l_{ih}\Gamma^s_{(ls)} - \Gamma^s_{il}\Gamma^l_{sh} \tag{4.5}$$

cuya parte simétrica es

$$\mathrm{E}_{(ih)} = \mathrm{R}_{ih}({}^0\Gamma) - \Gamma^l_{[is]}\Gamma^s_{[lh]},$$

y parte antisimétrica

$$\mathrm{E}_{[ih]} = \Gamma^s_{[ih]\,;\,s}({}^0\Gamma).$$

Con esto las ecuaciones (4.2) son equivalentes a

$$\mathrm{E}_{ih} = 0 \ , \ \Gamma_i = 0 \ , \ \Gamma^l_{[is]}\Gamma^s_{[lh]} = 0. \tag{4.6}$$

Combinando este resultado con (4.4) se tiene

Para la anulación de los 42 tensores contraidos (3.1), (3.6) *son suficientes las condiciones:*

$$\mathrm{E}_{ih} = 0 \ , \ \Gamma_i = 0 \ , \ \Gamma^s_{(si)\,,\,h} - \Gamma^s_{(sh)\,,\,i} = 0$$
$$\Gamma^l_{[is]}\Gamma^s_{[lh]} = 0. \tag{4.7}$$

OBSERVACIÓN. — En lugar de las conexiones (1.3) se pueden considerar, más generalmente, las conexiones

$$ {}^{\alpha}\Gamma^{s}_{ij} = \Gamma^{s}_{(ij)} + \varphi_{\alpha}\, \Gamma^{s}_{[ij]} $$

donde φ_α es una constante o parámetro. Los casos (1.3) corresponden a $\varphi_\alpha = 0$, $\varphi_\alpha = 1$, $\varphi_\alpha = -1$. Se tiene así una familia de tensores de la forma (3.1) o (3.6) dependientes del parámetro φ_α. Los mismos cálculos anteriores prueban que: *las condiciones* (4.7) *son suficientes para la anulación de toda esta familia de tensores.*

5. APLICACIÓN A LA TEORÍA DEL CAMPO UNIFICADO DE EINSTEIN (1951). — En la teoría de la relatividad general clásica, suponiendo que el espacio tiempo es un espacio de Riemann, existe un solo tensor contraído R_{ij} (tensor de Ricci) formado con la conexión simétrica Γ^{s}_{ij} = símbolos de Christoffel de segunda especie. Entonces, las ecuaciones de la gravitación en el vacío son $R_{ij} = 0$, es decir, expresan que el tensor de Ricci es nulo.

Al considerar espacios no-riemannianos, con conexión afín no-simétrica, ya hemos visto que aparecen de manera natural 21 tensores de curvatura (2.4) al considerar la diferencia de derivadas segundas (2.3) y a partir de ellos $21 + 21 = 42$ tensores contraídos (3.1) y (3.3). Una generalización de las ecuaciones del campo de la teoría de la relatividad general clásica, que eliminara toda elección entre esta variedad de tensores, sería un sistema que anulara a todos los tensores (3.1) y (3.3), es decir, un sistema de ecuaciones como el (4.7).

En su teoría del campo unificado de 1951 [1], Einstein considera que el tensor incógnita es un tensor g_{ij} (no simétrico), a partir del cual se determinan los coeficientes Γ^{s}_{ij} por las ecuaciones

$$ g_{\underset{+\,-}{i\,j}\,;\,s} = 0 \tag{5.1} $$

debiéndose además cumplir las ecuaciones

$$ E_{ih} = 0 \quad , \quad \Gamma_i = 0 \tag{5.2} $$

donde E_{ih} es el tensor (4.5) que Einstein introduce por ciertas razones de hermeticidad. Por el hecho de satisfacerse las ecuaciones (5.1), las terceras ecuaciones (4.7) se satisfacen idénticamente. Quedan únicamente, no necesariamente satisfechas las últimas ecuaciones (4.7).

Resulta así que *en los espacios definidos por las ecuaciones* (5.1), (5.2) *se anularán todos los tensores contraídos* (3.1) *y* (3.3) *siempre y cuando se cumpla la condición suplementaria de anularse el tensor simétrico*

$$\Gamma^{l}_{[is]}\,\Gamma^{s}_{[lh]} = 0 \tag{5.3}$$

y esta condición sea compatible con las ecuaciones del campo (5.1) *y* (5.2).

BIBLIOGRAFIA

[1] A. Einstein, *The Meaning of Relativity*, 3ª edición, Apéndice II, Princeton, 1951.