Rev. Univ. Nac. Tucumán, A. mat. fís. teór.
Tucumán, ISSN 0080 - 2360
V. 26, Nº 1-2, pp. 229-238 (1976)
Printed in República Argentina

SOBRE SEGMENTOS AL AZAR EN E_n

Por

L. A. SANTALO

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad Nacional de Buenos Aires

(Recibido el 3 de mayo de 1976)

SUMMARY

Let E_n be the euclidean space of n dimensions. We consider sets of line segments given at randon in E_n with the origin and direction uniformly distributed and with a given length distribution $dF(l)$ $(0 \leqslant l < \infty)$. We first consider the problem of finding the probability that a segment which intersect a given convex body Q, have 0, 1 or 2 common points with the boundary of Q. Then we consider a Poisson process of segments of intensity λ and solve some problems, in particular, that of finding the distribution of the distance from a fixed point, chosen independently of the process, to the nearest end of the line segments (Theor. 4.3). For $n = 1,2,3$ this last problem has been solved by R. Coleman [1]. Finally, we add some comments on random trees in E_n.

1 — INTRODUCCION

En este trabajo consideramos diversos problemas de probabilidad referentes a segmentos y cuerpos convexos en el espacio euclidiano de n dimensiones. Consideramos los distintos casos en que el segmento, dado al azar de manera que corte a un cuerpo convexo Q, tenga dos, uno o ningún extremo en el interior de Q.

Pasamos luego al caso de un proceso de Poisson de intensidad λ de segmentos de longitud variable en E_n. En este caso el resultado principal es el teorema 4.3 que da la probabilidad de que la distancia de un punto al azar, independiente del proceso, al extremo más próximo de un segmento, sea superior a un valor u, generalizando con ello a n dimensiones un resultado de R. Coleman para los casos n–1, 2, 3 [1].

2 — RESULTADOS CONOCIDOS

Sea E_n el espacio euclidiano de n dimensiones. Una dirección en E_n se determina por un punto de la esfera unidad O_{n-1} (la dirección es la del vector cuyo origen es el centro de la esfera y el extremo el punto dado sobre la misma). Representaremos por dO_{n-1} el elemento de área de la esfera unidad de $n-1$ dimensiones, contorno de la bola unidad de E_n. Un segmento orientado de longitud l queda determinado por su origen P y su dirección. La densidad para conjuntos de segmentos orientados de la misma longitud es entonces

$$dK = dP \wedge dO_{n-1} \tag{2.1}$$

donde dP es el elemento de volumen de E_n correspondiente al punto P.

El mismo segmento orientado puede determinarse por la recta orientada $\vec{G}$ que lo contiene y la abscisa t sobre esta recta del origen P del segmento. Entonces la densidad (2.1) puede escribirse

$$dK = d\vec{G} \wedge dt. \tag{2.2}$$

Las expresiones (2.1) y (2.2) de la densidad para conjuntos de segmentos son bien conocidas. Para la expresión de dG ver por ejemplo Hadwiger [2] o Santaló [3].

Debemos recordar ahora algunas fórmulas.

a) El volumen $V_n(u)$ y el área $O_n(u)$ de la bola y de la esfera unida de radio u y dimensión n están dadas por las fórmulas

$$V_n(u) = \frac{O_{n-1}}{n} u^n \quad , \quad O_i(u) = \frac{2\,\pi^{(i+1)/2}}{\Gamma((i+1)/2)} u^i. \tag{2.3}$$

Representaremos siempre por O_i el valor anterior para la esfera unidad, $u = 1$.

b) La medida de las rectas orientadas que cortan a un cuerpo convexo Q de área A de E_n, vale

$$\int_{G \cap Q \neq \phi} dG = \frac{O_{n-2}}{n-1} A. \tag{2.4}$$

Por ejemplo, si Q es la bola de radio u, es

$$\int_{G \cap Q \neq \phi} dG = \frac{O_{n-2}\,O_{n-1}}{n-1} u^{n-1}. \tag{2.5}$$

c) Si σ es la longitud de la cuerda que G determina en el cuerpo convexo Q de volumen V, es

$$\int_{G \cap Q \neq \phi} \sigma\, dG = O_{n-1} V. \tag{2.6}$$

En todas estas fórmulas hay que tener presente que suponemos a las rectas "orientadas". En caso contrario hay que dividir el segundo miembro por 2.

d) Sea $S(O, u)$ la bola de centro O y radio u. El casquete esférico que resulta al cortar $S(O, u)$ por un hiperplano cuya distancia al centro es h $(h \leqslant u)$ tiene por área

$$\text{área casquete} = O_{n-2}\, u^{n-1}\, \phi_{n-2}(\alpha) \tag{2.7}$$

donde hemos puesto, para simplificar la notación

$$\phi_{n-2}(\alpha) = \int_0^{\alpha} \operatorname{sen}^{n-2} x\, dx \quad , \quad \alpha = arc \cos \frac{h}{u} \tag{2.8}$$

Por ejemplo, es $\phi_0(\alpha) = \alpha$, $\phi_1(\alpha) = 1 - \cos \alpha = 1 - h/u$.

El volumen del segmento esférico cortado por el mismo hiperplano a distancia h del centro de la esfera, vale

$$\text{volumen segmento esférico} = \tag{2.9}$$

$$\frac{O_{n-2}}{n} u^n \phi_{n-2}(\alpha) - \frac{O_{n-2}}{n(n-1)} h(u^2 - h^2)^{n-1/2}.$$

3 — SEGMENTOS DE LONGITUD VARIABLE QUE CORTAN A UN CUERPO CONVEXO

Consideremos el caso de un segmento de longitud variable l, dada al azar según la densidad de $dF(l)$, tal que

$$\int_0^{\infty} dF(l) = 1. \tag{3.1}$$

La densidad para conjuntos de estos segmentos será

$$dK^* = dK \wedge dF(l) \tag{3.2}$$

donde dK tiene cualquiera de las formas (2.1) o (2.2).

Sea Q un cuerpo convexo fijo de área A y volumen V. La medida de los segmentos K que tienen punto común con Q es

$$M^*(K \cap Q \neq \phi) = \int_{G \cap Q \neq \phi} (\sigma + l) dG \wedge dF(l) = O_{n-1} V + \frac{O_{n-2}}{n-1} A\, E(l) \tag{3.3}$$

donde $E(l)$ es la esperanza matemática o valor medio de la longitud l.

En términos probabilísticos, el resultado (3.3) se puede enunciar de la siguiente manera:

Teorema 3.1. *Dados en* E_n *en dos cuerpos convexos* Q *y* Q_0 tales que $Q \subset Q_0$, *la probabilidad de que un segmento dado al azar según la densidad* (3.2), *que corta a* Q_0, *corte también a* Q, *vale*

$$p = \frac{(n-1)\,O_{n-1}\,V + O_{n-2}\,A\,E(l)}{(n-1)\,O_{n-1}\,V_0 + O_{n-2}\,A_0\,E(l)}. \tag{3.4}$$

Si se dan al azar N segmentos que cortan a Q_0, la probabilidad de que exactamente r de ellos $(0 \leqslant r \leqslant N)$ corten a Q es

$$\binom{N}{r} p^r (1-p)^{N-r} \tag{3.5}$$

Suponiendo que Q_0 se extiende a todo el espacio E_n de manera que $N/V_0 \to \lambda$, teniendo en cuenta que entonces $A_0/V_0 \to 0$, resulta

Teorema 3.2. *Suponiendo en* E_n *segmentos de longitud variable con longitud media* E(l), *distribuidos según un proceso de Poisson de intensidad* λ, *la probabilidad de que un cuerpo convexo* Q *dado al azar, independientemente del proceso, corte exactamente a* r *segmentos, es*

$$P_r = \frac{(\lambda H)^r}{r!} \exp(-\lambda H) \quad , \quad \text{siendo } H = V + \frac{O_{n-2}\,A\,E(l)}{(n-1)\,O_{n-1}} \tag{3.6}$$

En particular, para $r = 0$, resulta que la probabilidad de que Q no corte a ningún segmento del proceso, es

$$P_0 = \exp(-\lambda H). \tag{3.7}$$

En estas fórmulas, si Q es una bola de radio u, es

$$H = \frac{O_{n-1}}{n} u^n + \frac{O_{n-2}}{n-1} u^{n-1} E(l). \tag{3.8}$$

4 — SEGMENTOS QUE CORTAN A UN CUERPO CONVEXO Y TIENEN DOS, UNO O NINGUN EXTREMO INTERIOR AL MISMO

Entre los segmentos que cortan a un cuerpo convexo Q, hay los que totalmente interiores (sea M_0^* su medida), los que cortan al contorno de Q en un solo punto y por tanto tienen un solo extremo interior a Q (sea M_1^* su medida) y los que cortan al contorno de Q en dos puntos y que, por tanto, tienen los dos extremos exteriores a Q (sea M_2^* su medida).

La ecuación (3.3) nos dice que

$$(4.1)\qquad M_0^* + M_1^* + M_2^* = O_{n-1} V + \frac{O_{n-2}}{n-1} A\,E(l).$$

Por otra parte, como cada recta corta al contorno de Q en dos puntos (salvo las posiciones de apoyo que son de medida nula), se tiene también

$$(4.2)\qquad M_1^* + 2M_2^* = 2 \int_{G\cap Q\neq\phi} l\, dG = \frac{2\, O_{n-2}}{n-1} A\,E(l).$$

Estas ecuaciones (4.1), (4.2) no permiten calcular las tres medidas M_i^*. Hace falta otra ecuación que, en general, ya no es expresable en forma simple. Vamos a distinguir dos casos.

(4.1). *La longitud* l *es mayor o igual que el diámetro de Q.*

En este caso es $M_0^* = 0$ y por tanto de (4.1) y (4.2) se deduce

$$(4.3)\qquad M_1^* = 2\, O_{n-1} V \quad ; \quad M_2^* \; \frac{O_{n-2}}{n-1} A\,E(l) - O_{n-1} V.$$

Obsérvese que M_1^* resulta también inmediatamente de la expresión (2.1).

4.2. *La longitud* l *es menor que el diámetro de* Q. En este caso hay que calcular directamente M_0^*. La expresión de esta medida en función de invariantes elementales (volumen, área, integral de curvatura media,...) no es posible en el caso general. *Vamos a limitarnos al caso en que* Q *es la bola* S(O, u) *de centro* O *y radio* u. En este caso, fijando primero l es

$$(4.4)\qquad M_0 = \int_{\sigma\geqslant l} (\sigma - l)\, dG = \int_{\sigma\geqslant l} \sigma\, dG - l \int_{\sigma\geqslant l} dG.$$

La última integral es la medida de las rectas orientadas que cortan a la bola $S\left(O, (u^2 - l^2/4)^{1/2}\right)$ y por tanto, según (2.5) vale

$$(4.5)\qquad \int_{\sigma\geqslant l} dG = \frac{O_{n-2}\, O_{n-1}}{n-1} (u^2 - l^2/4)^{(n-1)/2}.$$

La primera integral del último miembro de (4.4), para cada dirección de la recta G, es igual al volumen de la intersección de la esfera $S(O, u)$ con un cilindro de revolución de radio $(u^2 - l^2/4)^{1/2}$ cuyo eje pasa por O. Esta intersección es la suma de un cilindro de altura l y base la $(n-1)$–esfera de radio $(u^2 - l^2/4)^{1/2}$, cuyo volumen es

$$(4.6)\qquad \frac{O_{n-2}}{n-1} (u^2 - l^2/4)^{(n-1)/2}\,;$$

mas dos segmentos de la esfera $S(O, u)$ determinados por los hiperplanos cuya distancia al centro de la esfera es $l/2$, y por tanto según (2.9), es (para cada segmento)

$$(4.7) \qquad \frac{O_{n-2}}{n} u^n \phi_{n-2}(\alpha) - \frac{O_{n-2}}{n(n-1)} \frac{l}{2} (u^2 - l^2/4)^{(n-1)/2}$$

con

$$(4.8) \qquad \alpha = arc \cos (l/2u).$$

Por tanto, sumando (4.6) y dos veces (4.7) multiplicados por O_{n-1} para integrar a todas las direcciones y restando (4.5) multiplicado por l, se tiene

$$(4.9) \qquad M_0 = \frac{2\, O_{n-1}\, O_{n-2}}{n} u^n \phi_{n-2}(\alpha) - \frac{O_{n-1}\, O_{n-2}}{n(n-1)} l(u^2 - l^2/4)^{(n-1)/2}.$$

Supongamos ahora que l varía al azar según la distribución $dF(l)$. Teniendo en cuenta que para $l \geqslant 2u$ es $M_0 = 0$, según (3.2) resulta

$$(4.10) \qquad M_0^*(u) = \frac{2\, O_{n-1}\, O_{n-2}}{n} u^n \int_0^{2u} \phi_{n-2}(\alpha)\, dF(l)$$

$$- \frac{O_{n-1}\, O_{n-2}}{n(n-1)} \int_0^{2u} l(u^2 - l^2/4)^{(n-1)/2}\, dF(l).$$

Escribiendo las ecuaciones (4.1) y (4.2) para el caso $Q = S(O, u)$, y por $A = O_{n-1} u^{n-1}$, $V = (1/n) O_{n-1} u^n$ y teniendo en cuenta (4.10), se pueden despejar los valores

$$(4.11) \qquad M_1^*(u) = \frac{2\, O_{n-1}}{n} u^n + \frac{2\, O_{n-1}\, O_{n-2}}{n(n-1)} \int_0^{2u} l(u^2 - l^2/4)^{(n-1)/2}\, dF(1)$$

$$- \frac{4\, O_{n-1}\, O_{n-2}}{n} u^n \int_0^{2u} \phi_{n-2}(\alpha)\, dF(l)$$

$$(4.12) \qquad M_2^* = - \frac{O_{n-1}^2}{n} u^n + \frac{O_{n-1}\, O_{n-2}}{n-1} u^{n-1} E(l)$$

$$- \frac{O_{n-1}\, O_{n-2}}{n(n-1)} \int_0^{2u} l(u^2 - l^2/4)^{(n-1)/2}\, dF(l).$$

En términos de probabilidades geométricas, estos resultados se pueden enunciar de la siguiente manera:

Teorema 4.1. *La probabilidad de que un segmento dado al azar en* E_n *según la densidad* (3.2), *que se sabe corta a la bola* S(O, R), *corte también a la bola* S(O, u) (u $\leqslant$ R) *y tenga con el contorno de* S(O, u) *exactamente* i *puntos comunes* (*el caso* i = 0 *corresponde al caso en que el segmento es totalmente interior a* S(O, u)), *es*

$$p_i = \frac{M_i^*(u)}{M^*(R)} \quad , \quad i = 0, 1, 2. \tag{4.13}$$

donde los $M_i^*(u)$ están dados por (4.10), (4.11) y (4.12) y

$$M^*(R) = \frac{O_{n-1}^2}{n} R^n + \frac{O_{n-1}\, O_{n-2}}{n-1} R^{n-1} E(l). \tag{4.14}$$

Si se dan N segmentos que cortan a $S(O, R)$, la probabilidad de que exactamente r de ellos tengan i puntos comunes con el contorno de $S(O, u)$ ($i = 0$ significa que son totalmente interiores a $S(O, u)$), resulta ser

$$\binom{N}{r} p_i^r (1 - p_i)^{N-r} \quad , \quad r \leqslant N \quad , \quad i = 0, 1, 2. \tag{4.15}$$

Pasemos ahora a todo el espacio (proceso de Poisson), de manera que N y R tiendan a infinito siendo

$$\frac{N}{V_n(R)} = \frac{n\, N}{O_{n-1}\, R^n} \to \lambda. \tag{4.16}$$

Resulta fácilmente que (4.15) tiende a

$$P_r^{(i)} = \frac{1}{r!} \left(\frac{\lambda M_i^*}{O_{n-1}}\right)^r \exp\left(\frac{\lambda M_i^*}{O_{n-1}}\right). \tag{4.17}$$

y por tanto se tiene el siguiente:

Teorema* 4.2. *Dado en* $E_n (n > 1)$ *un proceso de Poisson de segmentos de intensidad* λ, *con la densidad* dF(l) *para la distribución de las longitudes, la probabilidad de que una bola de radio* u *dada al azar, independientemente del proceso, contenga exactamente a* r *segmentos en su interior (caso i = 0) ***o bien su contorno corte exactamente a* r *segmentos en* i *puntos*** (i = 1, 2), ***está dada por*** (4.17.).

Si se desea la probabilidad de que la bola no contenga a ningún segmento, ni su borde corte a ningún segmento en un solo punto, ella será $P_0^{(0)}P_0^{(1)}$. Sustituyendo en este producto los valores (4.17) y teniendo en cuenta que si la bola $S(O, u)$ no contiene a ningún segmento, ni su contorno corta a ningún segmento en un solo punto, quiere decir que la distancia de O al extremo más próximo de los segmentos del proceso es $\geqslant u$, el resultado se puede enunciar de la siguiente manera:

Teorema 4.3. *Dado en* $E_n (n > 1)$ *un proceso de Poisson de segmentos, de intensidad* λ, *cuyas longitudes están distribuidas según la densidad* $dF(l)$, *la probabilidad de que la distancia de un punto dado al azar, independientemente del proceso, al extremo más próximo de los segmentos sea igual o mayor que* u, *está dada por*

$$\exp\big(-\lambda B(u)\big) \tag{4.18}$$

siendo

$$B(u) = \frac{2u^n}{n} \times \tag{4.19}$$

$$\Big[O_{n-1} - O_{n-2} \int_0^{2u} \Big(\phi_{n-2}(\alpha) - \frac{1}{n-1}\,\frac{l}{2u}\,(1 - \frac{l^2}{4u^2})^{(n-1)/2}\Big)\, dF(l)\Big].$$

Para $n = 2, 3$ resultan los valores de R. Coleman [1]. Para $n = 1$ la fórmula anterior no es aplicable, pero el problema se puede tratar fácilmente de manera directa.

Todo lo anterior se puede aplicar a segmentos de longitud constante l_0, dados al azar según las densidades (2.1) o (2.2), con sólo sustituir $dF(l)$ por la distribución de Dirac $\delta(l - l_0)\, dl$.

Obsérvese que si en lugar de la distancia al extremo más próximo se pidiera que la distancia "al segmento más próximo" fuera igual o mayor que u, el resultado es más fácil. En efecto, en este caso basta aplicar (3.6) para $r = 0$ para obtener que *en las condiciones del Teor. 4.3, la probabilidad de que la distancia de un punto dado al azar, independientemente del proceso, a cualquiera de los segmentos del proceso sea igual o mayor que* u, *vale* $\exp(-\lambda H)$, *siendo* $H = (O_{n-1}/n)u^n + \big(O_{n-2}/(n-1)\big)u^{n-1}E(l)$.

Como observa Coleman, para $l = 0$ se tiene un proceso de Poisson de puntos de intensidad λ y la probabilidad de que un punto dado al azar independientemente del proceso tenga una distancia igual o mayor que u del punto más próximo resulta ser $\exp\big(-\lambda(O_{n-1}/n)u^n\big)$. En efecto, basta aplicar (4.19) para $l = 0$ y tener en cuenta que $\alpha = \pi/2$ y por tanto $\phi_{n-1}(\pi/2) = O_{n-1}/2O_{n-2}$.

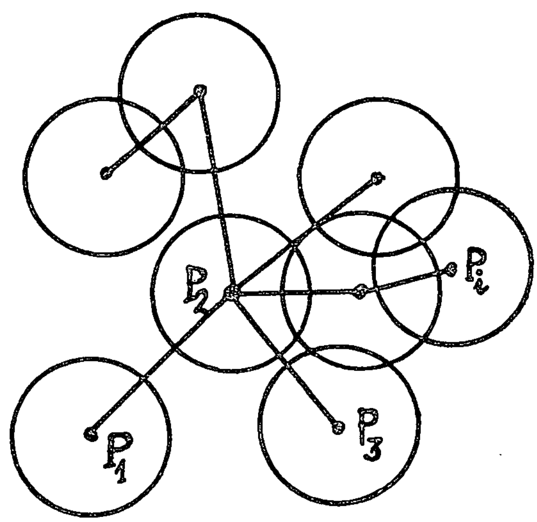
El valor medio de la distancia al punto más próximo del proceso será

$$E(\text{distancia mínima}) = \int_0^\infty \exp\left(-\lambda (O_{n-1}/n) u^n\right) du.$$

Por ejemplo, para el plano, $n = 2$, resulta

$$E(\text{distancia mínima}) = 1/\sqrt{\lambda}.$$

Generalización. En vez de un segmento de longitud l consideramos un árbol de vértices $P_1, \ldots, P_N$ que puede moverse de manera rígida, sin deformación, en el espacio. La posición del árbol queda determinada por la de uno de sus vértices, sea P_1, y un movimiento alrededor de P_1. Supongamos que P_1 sigue un proceso de Poisson de intensidad λ y que la posición alrededor de P_1 sigue la distribución uniforme (densidad cinemática de la geometría integral). Consideremos que cada vértice P_i es el centro de una esfera de radio u (fig. 1). El volumen del espacio cubierto por estas esferas será



(4.20) $$\sigma(u) = N V_n(u) - M_2 + M_3 - \ldots - (-1)^N M_N$$

donde $V_n(u)$ es el volumen de la esfera de radio u (2.3) y M_i indica el volumen del espacio que pertenece a la intersección de i esferas del árbol.

La probabilidad de que un punto del espacio, dado al azar, independientemente del proceso, quede cubierto por r árboles, es

$$P_r = \frac{(\lambda\sigma)^r}{r!} \exp\bigl(-\lambda\sigma(u)\bigr)$$

que es la fórmula que vale para todo proceso de Poisson de intensidad λ de figuras congruentes de volumen σ, cualquiera que sea su forma. En particular, para $r = 0$ tenemos que *la probabilidad de que la distancia mínima a los vértices de un árbol sea igual o mayor que* u *vale* $\exp\bigl(-\lambda\sigma(\mathrm{u})\bigr)$.

El valor de $\sigma(u)$ hay que calcularlo aplicando (4.20) para cada árbol particular. Para $N = 2$, resulta (4.18), (4.19). Para $u \leqslant$ mínimo de las distancias P_iP_j, es $M_2 = M_3 = \ldots = 0$ y el resultado es como si los puntos P_i correspondiesen a N procesos de Poisson de puntos superpuestos de intensidad λ. Para u mayor que esta distancia mínima, el proceso no es equivalente a N procesos de Poisson de puntos.

BIBLIOGRAFIA

[1] COLEMAN, R.: *The distance from given point to the nearest end of one member of a random process of linear segments,* libro *Stochastic Geometry,* editado por E. F. Harding y D. G. Kendall, John Wiley, 1974, 192-201.

[2] HADWIGER, H.: *Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie,* Springer Verlag, Berlín 1957.

[3] SANTALÓ, L. A.: *Sur la mesure des espaces linéaires qui coupent un corps convexe et problèmes qui s'y rattachent,* Colloque sur les questions de Réalité en Géométrie, Liege, 1955, 177-190.