REVISTA

DE LA

UNION MATEMATICA ARGENTINA

(Miembro del Patronato de la Mathematical Reviews)

Y DE LA

ASOCIACION FISICA ARGENTINA

□

SESIONES MATEMATICAS

Buenos Aires - La Plata, 1960

□

BUENOS AIRES
1962

SESIONES MATEMATICAS

BUENOS AIRES — LA PLATA 1960

I. ACTO INAUGURAL

El acto inaugural tuvo lugar en el aula Magna de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad de Buenos Aires el día 22 de setiembre de 1960. Asistieron al acto el Rector de la Universidad de Buenos Aires, Dr. Risieri Frondizi, el Ministro de Educación y Justicia e Interino de Relaciones Exteriores, Dr. Luis Mackay, el Decano de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Dr. Rolando V. García, el Director del Centro Regional de Matemática para América Latina dependiente de UNESCO, Dr. Alberto González Domínguez, profesores y alumnos.

Abrió el acto el Ing. José Babini, presidente de la Unión Matemática Argentina, quien pronunció las siguientes palabras:

"La Unión Matemática Argentina, institución científica que cumplirá dentro de poco un cuarto de siglo, expresa por mi intermedio su más cordial saludo de bienvenida a los distinguidos matemáticos que han acudido desde distintos países de América y a los camaradas argentinos del interior del país y de esta ciudad, que hoy se congregan para participar en las "Sesiones Matemáticas" que se realizan conmemorando el 150° Aniversario de la Revolución de Mayo.

Celebra al mismo tiempo, como un signo auspicioso, que tan fausto acontecimiento se recuerde con una reunión de camaradería y de convivencia intelectual entre científicos americanos.

No es ésta la primera ocasión en que en Argentina se realizan reuniones matemáticas con intervención de científicos americanos. Ya en julio de 1954, en Mendoza y en Villavicencio, gracias a los esfuerzos de ese mecenas científico que es el doctor Establier, el Centro de Cooperación Científica de UNESCO para América Latina y la Universidad Nacional de Cuyo organizaron un coloquio sobre "Algunos problemas matemáticos que se están estudiando en América Latina", coloquio en el que intervinieron matemáticos de toda América; y en julio del año pasado, sobre este mismo tema y siempre con la colaboración del Centro de Cooperación Científica, se realizó en esta casa un nuevo simposio, el tercero de la serie, en el que participó un selecto grupo de matemáticos latinoamericanos.

Por lo demás, en las habituales reuniones anuales de la Unión Matemática Argentina, intervinieron con frecuencia matemáticos extranjeros, visitantes o contratados por las Universidades nacionales; pero es indudable que en las "Sesiones" que hoy se inauguran, la calidad y cantidad de los participantes confiere a este promisor ambiente internacional un tono de singular importancia, gracias al honor que dispensaron a la Unión Matemática Argentina los matemáticos que aceptaron su invitación y las Universidades e Instituciones científicas que enviaron representantes.

Un aspecto de la concurrencia en el acto inaugural.
En primera fila el decano de la Facultad de ciencias, Dr. R. V. García, el presidente de la UMA, Ing. J. Babini, el ministro de educación de la Nación, Dr. L. R. Mackay, y el director del Centro Regional de matemática para América latina, Dr. A. González Domínguez.

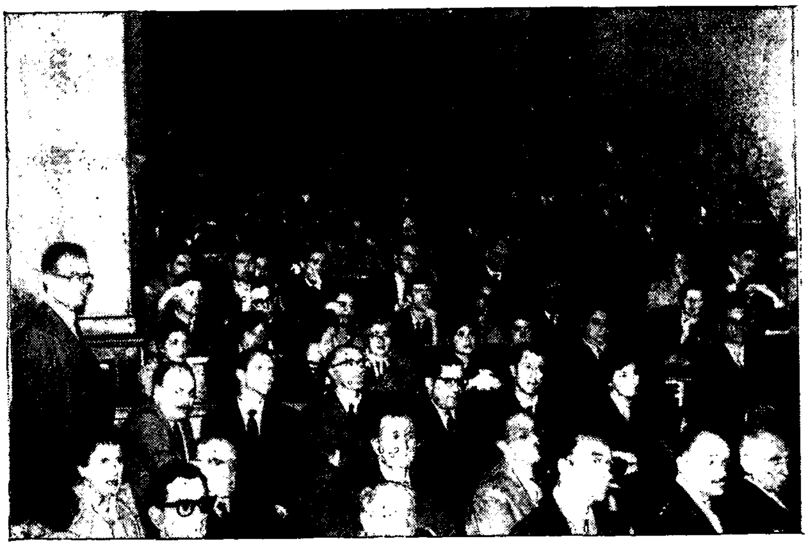
Pero tal certamen no podría haberse realizado sin la generosa ayuda que prestaron instituciones y personas. En tal sentido nos es grato destacar, en primer lugar, la acción de la Comisión Nacional Ejecutiva del 150° Aniversario de la Revolución de Mayo, que encomendó la organización de las "Sesiones Matemáticas" a esta Institución, y financió la reunión y la publicación de sus conclusiones, que han de integrar el vigésimo volumen de la Revista de la Unión Matemática Argentina. También debemos agradecer el apoyo prestado por el Presidente del Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas doctor Houssay, que preside la Comisión de organizadores de sesiones científicas y del eficaz y activo coordinador de los asuntos científicos y tecnológicos, doctor Sánchez Díaz. Agradecemos además la constante colaboración de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad de Buenos Aires, en cuya Aula Magna realizamos este acto, y de los Departamentos de Matemática de esta Facultad y de la Facultad de Ciencias Físicomatemáticas de la Universidad Nacional de La Plata, en la que se clausurarán las "Sesiones". Destaquemos, por último, la importante contribución prestada por las instituciones que designaron representantes y por los invitados, delegados y participantes extranjeros y nacionales cuya presencia e intervención realzan y prestigian estas "Sesiones".

La Unión Matemática Argentina reitera su más vivo agradecimiento a esas instituciones y personas y al expresarles sus mejores deseos de prosperidad, declara inauguradas las "Sesiones Matemáticas" de 1960 que se celebran recordando una revolución emancipadora de América iniciada hace un siglo y medio."

A continuación habló el Prof. Leopoldo Nachbin de Río de Janeiro en nombre de los delegados extranjeros. Expresó la satisfacción con que habían aceptado la invitación de la Unión Matemática Argentina y de participar en el acto inaugural de las "Sesiones" conmemorativas del Sesquicentenario de la Revolución de Mayo. Agregó: "En los trabajos que ahora se inician participan matemáticos de Brasil, Chile, Estados Unidos, Francia, México, Uruguay y Venezuela simbolizando un homenaje al desarrollo de los estudios matemáticos que se está verificando en la Argentina. Gracias a un esfuerzo sin desmayos en el campo matemático se ha desarrollado en estos últimos años, sobre todo a través de las investigaciones publicadas o inspiradas por Cotlar, González Domínguez y Santaló una escuela argentina cuya reputación ya sobrepasa los círculos latinoamericanos. De esta escuela han egresado y egresan matemáticos que comprueban los méritos de la orientación aquí seguida. La Argentina ya posee matemáticos jóvenes de renombre internacional en el campo de su especialidad. Entre otros nombres merece destacarse especialmente el de Calderón, discípulo de Zygmund y autor de importantes trabajos recientes que afirman la reputación internacional de Calderón como un joven analista de gran valor.

El ejemplo de Calderón nos indica cuanto puede rendir en el ambiente latinoamericano un talento joven guiado por un maestro inspirador y en condiciones favorables de trabajo.

Otro aspecto muy auspicioso que debe mencionarse en esta ocasión es la creación reciente de un Centro Regional de Matemática para América Latina como instituto docente y de investigación, constituido bajo el patrocinio de la UNESCO y de la Universidad de Buenos Aires con el objeto de fomentar el estudio de la matemática en América.



Otro aspecto de la concurrencia en el acto inaugural.

Las necesidades de la educación y de la formación de matemáticos son cada día mayores y el Centro Regional, fruto del esfuerzo proficuo de González Domínguez y de sus colaboradores mucho podrá contribuir para el aprovechamiento de las vocaciones y del potencial matemático en América Latina, siempre que cuente con los recursos adecuados que han de proporcionarle el Gobierno argentino, la UNESCO y los organismos internacionales de apoyo a la ciencia.

Estoy seguro de interpretar los sentimientos de los delegados extranjeros aquí presente al expresar nuestros parabienes a la Unión Matemática Argentina y al Centro Regional de Matemática para

América Latina como frutos ya logrados y por las perspectivas de éxito que el futuro ha de depararles."

Terminó al Acto Inaugural con la conferencia del profesor Solomón Lefschetz, de la Universidad de México, sobre el tema "Algunas consideraciones sobre las matemáticas modernas", que se publica a continuación.

ALGUNAS CONSIDERACIONES SOBRE LAS MATEMÁTICAS MODERNAS

Por SOLOMON LEFSCHETZ

Los matemáticos modernos se pueden clasificar en *activos y contemplativos*. Si uno piensa en las matemáticas modernas como en un edificio, algunos colegas afirman que su fundamento no es cien por ciento seguro. Los matemáticos contemplativos son aquellos que se preocupan por ese fundamento, terreno no muy firme que recuerda el subsuelo lodoso de la ciudad de México. Los activos, en cambio, son los que miran arriba, siempre arriba. Me clasifico, francamente entre los activos y hablaré a ustedes desde este punto de vista; creo que es éste el estado de ánimo de los "creadores", al menos cuando están creando. Eran, por cierto, activos, Gauss, cuando clasificaba las formas cuadráticas binarias; Poincaré, luchando con la clasificación de las variedades tridimensionales; Hilbert, resolviendo el problema de los invariantes algebraicos o el problema de Waring. Una misma persona puede pertenecer a ambos grupos, como Brouwer y Hermann Weyl, o el mismo Hilbert al fin de su vida. Pero generalmente son personalidades distintas. En su ánimo profundo, el activista está convencido de que el edificio de las matemáticas, del que metafóricamente hablamos, se mantiene vertical, a igual que el edificio más alto de la América Latina, la "Torre Latinoamericana" en la ciudad de México, a pesar de la poca consistencia del subsuelo.

Me pongo, entonces, en el punto de mira del activista. Ahora bien, en presencia de la acumulación de teorías matemáticas que se ha producido en los últimos ciento cincuenta años, el edificio de las matemáticas se ha trasformado en un verdadero laberinto, resultando muy aconsejable que el activista que desea penetrar en él, busque alguna guía. La contribución que haré en tal sentido, consiste en señalar que hay dos teorías, más o menos ajenas, pero básicas, de las cuales están compuestas las demás ramas de nuestra ciencia: el *álgebra* y la *topología*.

Lo que me propongo hacer es describir someramente estas dos teorías, ilustrar algunos de sus rasgos principales y, finalmente, justificar mi afirmación precedente. Repito que mi punto de vista es totalmente personal, al respecto. No espero, por cierto, el acuerdo de todos los colegas. Pero todos estamos de acuerdo que estamos en presencia de una verdadera jungla y necesitamos un guía. Si no se acepta mi punto de vista, que se proponga otro.

El Profesor Lefschetz pronunciando su conferencia en el acto inaugural.

Charlemos entonces del álgebra. En matemática generalmente estamos en presencia de una variedad de "cosas" o "elementos" $a, b, c, \ldots$, que constituyen un conjunto A. Por otro lado se presentan muchas relaciones $\rho, \sigma, \ldots$, que constituyen otro conjunto R. La forma de relacionarse es generalmente del siguiente tipo: dados un par cualquiera de elementos de A, por ejemplo a, b, se puede deducir otro por medio de una relación de R: $a \rho b$; $a \sigma b$; etc.

Una variante puede ser la siguiente: se tienen 3 conjuntos A, B, C cuyos elementos son $a, a', a'', \ldots$; $b, b', b'', \ldots$; $c, c', c'', \ldots$; respectivamente, tales que de cualquier par a de A, b de B, se deduce mediante las relaciones de R elementos de C: $a \rho b = c$, $a \sigma b = c'$, $\ldots$

Ahora bien, si en ningún lugar de A, R o bien A, B, C, R aparecen propiedades de medida o de cercanía de los elementos, estamos en presencia de un sistema algebraico, o bien un álgebra. Lo característico del álgebra es que en él rige un individualismo completo, mientras que en la topología, por el contrario, se siente la comunidad. Esta aserción es por cierto vaga, pero creo que se entiende. La aclararemos con algunos ejemplos.

El primer ejemplo, es la noción de *grupo*, de importancia capital en las matemáticas modernas. Tómese un solo conjunto A de elementos a, b, c, $\ldots$, y una sola relación u *operación* R. El símbolo adoptado poco importa, y por lo tanto, de acuerdo con la costumbre, representaremos la única operación por "$\times$" o simplemente por un punto. De modo que de a y b se deduce $c = a \times b$, que es también un A. Hasta ahora la generalidad es completa, y si no imponemos ciertas restricciones (axiomas) nada de interés se obtiene.

El "grupo" se caracteriza por las siguientes propiedades:

I. *Asociatividad*: $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$.

II. *Unidad*: Existe un elemento e, la "unidad", tal que $a \times e = e \times a = a$ para cualquier a de A.

III. *Inverso*: Para cualquier a existe otro elemento, que se escribe a^{-1}, tal que $a \times a^{-1} = e$ (De aquí resulta que también $a^{-1} \times a = e$).

Frecuentemente se escribe ab en lugar de $a \times b$, y 1 en lugar de e; con tal notación, por ejemplo, se escribirá: $a\,a^{-1} = 1$.

Cuando el grupo es *conmutativo*, es decir cuando $ab = ba$, la operación se indica frecuentemente con el signo $+$, en lugar de e se escribe 0, y el a^{-1} se sustituye por $(-a)$. De $a\,a^{-1} = e$ resulta, entonces: $a + (-a) = 0$.

Cuando la operación se escribe por el signo "$\times$", el grupo se dice "multiplicativo", en cambio cuando se usa el "$+$", se dice que es un grupo "aditivo".

Formalmente, un grupo multiplicativo se comporta como el conjunto de los números racionales con la operación de multiplicación; un grupo aditivo, como los enteros con la adición.

Examinemos algunos ejemplos:

Grupos finitos. Son aquellos en los que el conjunto de elementos a, b, c, $\ldots$ es finito. Los movimientos de un polígono regular en su plano, que no cambian su aspecto, constituyen un grupo finito.

Es el grupo más simple, que se puede imaginar engendrado por un solo movimiento a con la única relación $a^n = 1$ (donde $a^n = a \,.\, a \ldots a$). Otro ejemplo lo constituyen los grupos de permutaciones. Dados n elementos, que designaremos convenientemente por cifras: $1, 2, \ldots, n$, la operación típica se simboliza por

$$a = \begin{pmatrix} 1, & 2, & \ldots, & n \\ \alpha_1, & \alpha_2, & \ldots, & \alpha_n \end{pmatrix}$$

cuyo significado es el siguiente: sustitúyase 1 por α_1, 2 por α_2, ..., n por α_n. Se verifica fácilmente que tales operaciones dan lugar a un grupo, el *grupo de sustituciones de n elementos.*

Para otro ejemplo, identifíquense todos los enteros positivos no múltiplos de p (siendo p un número primo mayor que 1), con sus respectivos restos de división por p. Si r y s son dos restos, rs será el resto de la división del producto por p. De esta manera los residuos (módulo p) originan un grupo de orden $p - 1$ (es decir con $p - 1$ elementos): $1, 2, \ldots, p - 1$.

Este grupo es evidentemente conmutativo.

Por otro lado, háganse las sumas $r + s$, sólo que ahora deben incluirse los múltiplos de p. Resulta así un grupo aditivo de p elementos.

Grupos infinitos. El grupo aditivo de los enteros, o bien el grupo multiplicativo de los racionales positivos, son ejemplos de grupos infinitos. Otros ejemplo de grupo infinito, es el engendrado por las rotaciones de una esfera (de centro fijo).

Anillos. Tomemos ahora un sistema A de elementos con *dos* operaciones, que designaremos por "$\times$" y "$+$". Los axiomas que se imponen generalmente son los siguientes:

I. Bajo la operación de suma (signo $+$) los elementos de A constituyen un grupo conmutativo, cuya unidad se designa por 0.

II. La operación producto (signo $\times$) es asociativa.

III. La ley distributiva relaciona ambas operaciones: $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$.

IV. $0 \times a = a \times 0 = 0$.

El signo $\times$ suele omitirse, escribiendo ab por $a \times b$.

El comportamiento general de tales sistemas es análogo al de los enteros bajo las operaciones vulgares de suma y producto.

Ejemplos.

El sistema de los números enteros.

El sistema de los siguientes números: $0, \pm p, \pm 2p, \pm 3p, \ldots,$ donde p es un entero fijo.

El sistema de los polinomios en una variable (o en dos, o en tres, etc., variables) con coeficientes enteros, también constituye un anillo.

Sea, de nuevo, p un número primo. El conjunto de los residuos (modulo p) con las operaciones de suma y producto, es un anillo de p elementos: $0, 1, 2, \ldots, p-1$, que llamaremos A_p.

Campos. Sea A un anillo y supongamos que posee un elemento unidad e, tal que $ae \times ea = a$ para cualquier a de A. Dado un par de elementos a, b, siendo $b \neq 0$, se pueden definir de la misma manera que para los números enteros, las fracciones $\frac{a}{b}$. La totalidad de estos nuevos elementos constituyen un *campo*.

El comportamiento es similar al de los números racionales.

Ejemplos. La totalidad de los números racionales constituye un campo. También lo constituyen los siguientes:

a) El anillo A_p, vale decir los residuos módulo p (p primo). El anillo A_2 es especialmente notable.
b) La totalidad de los números de la forma $p + q\sqrt{d}$, siendo p, q números racionales, d un número entero sin factor cuadrático.
c) La totalidad de los cocientes de polinomios con coeficientes en un campo numérico.
d) Sea $f(x, y)$ un polinomio irreducible con coeficientes racionales Se identifican dos cocientes $\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$, $\frac{R(x,y)}{S(x.y)}$ del mismo tipo que f cuando y sólo cuando $PS - QR$ es divisible por $f(x, y)$. Los elementos que resultan constituyen un campo: el campo de las funciones racionales sobre la curva $f(x, y) = 0$.

Espacios vectoriales. Estas estructuras son de gran importancia en geometría, física, etc. Un espacio vectorial V es un grupo aditivo de elementos $a, b, c, \ldots$ llamados vectores, con un campo asociado

F de elementos α, β, γ, ... siempre que las expresiones del tipo $\alpha a + \beta b + \ldots + \gamma c$ bajo las reglas obvias, representen también vectores. Si $\alpha a + \beta b + \ldots + \gamma c = 0$, se dice que $a, b, \ldots, c$ son *dependientes*, si no existe tal relación, ellos son *independientes*. El número máximo de elementos independientes se llama *dimensión* del espacio vectorial.

Ejemplos. Tómense n números reales $x_1, x_2, \ldots, x_n$ que serán las componentes de un vector x. Si α es un número real, defínase el vector αx como el vector de componentes αx_i. Si x' con componentes x_i' es otro vector y α' otro número real, defínase el vector $\alpha x + \alpha' x'$ como el vector de componentes $\alpha x_i + \alpha' x_i'$. Estos vectores originan un espacio vectorial sobre el campo real, cuya dimensión es precisamente n.

Para completar lo dicho con respecto al álgebra, haría falta mucho más tiempo y lugar, razón por la cual me detengo aquí. Quiero recordar, en cambio, que el conjunto de ideas aquí esbozado ocupa una posición preponderante en la matemática moderna. Hace un siglo y cuarto por ejemplo, en base a las nociones de grupo y campo, Ruffini, Abel y Galois, demostraron que para las ecuaciones de grado superior al cuarto no existen soluciones por fórmulas algebraicas (que utilicen sólo las cuatro operaciones racionales y la extracción de raíces, un número finito de veces).

Pasamos ahora a la *topología*, nuestra teoría básica opuesta al álgebra. Cuando introducimos nociones de medida o de vecindad, estamos haciendo topología. El conjunto de nuestros elementos se llama entonces un *espacio* y sus elementos son los *puntos*. La manera más fácil de introducir aquellas nociones es por medio de una "distancia" entre los puntos del conjunto. Aceptamos esta noción intuitivamente y sólo observamos que no siempre es posible definir una distancia entre los puntos de un espacio. Si lo es, el espacio se llama *métrico*. El espacio métrico más simple es el espacio euclidiano, siendo métricos también sus subconjuntos.

Sea entonces A un espacio métrico. De la manera usual se define la noción de convergencia de una sucesión de puntos $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ de A así como su límite a. Considérese una trasformación del espacio A en el espacio B, o sea una función T definida sobre A, con valores en B. Se dice que T es *continua* si a cualquier sucesión convergente $a_1, a_2, \ldots$ con límite a_0 en A, corresponde una sucesión $Ta_1, Ta_2, \ldots$ que también es convergente y cuyo límite es Ta_0.

Sea T una relación biunívoca (a cada a de A corresponde un y sólo un $b = Ta$ de B, y cada b de B es un Ta). La trasformación que a cada b le hace corresponder el a tal que $Ta = b$, define la trasformación inversa T^{-1} de T.

Ahora bien, si entre A y B existe una trasformación biunívoca tal que tanto T como T^{-1} son continuas, T se llama *trasformación topológica* de A en B, y se dice que A y B son *topológicamente equivalentes u homeomorfos.*

Ejemplos. La proyección ortogonal π de un plano euclideano P sobre una recta R de P es continua pero no topológica.

Sea S una esfera de dimensión 2, y F la superficie de un cubo concéntrico con S. Entonces, la proyección radial de S en F es *topológica* o sea, es un *homeomorfismo.*

Son topológicamente equivalentes los siguientes pares de espacios:

El interior de la n-esfera y el interior del n-cubo; estos espacios se llaman *n-celdas*; la 1-celda es un arco.

La n-esfera y la frontera del n-cubo; estos espacios se llaman *n-esferas topológicas.*

La 2-esfera euclideana, de dimensión 2, y cualquier superficie cerrada convexa.

Tómese la superficie de un disco con $p > 0$ agujeros, es ésta una superficie F_p no equivalente a la esfera. Esto se comprende de la siguiente manera: en la esfera, cada camino cerrado la divide en dos conjuntos *ajenos* (este es el famoso teorema de Jordán), y esta propiedad, que es topológica o sea invariante en las trasformaciones topológicas, no es cierta para F_p. En general, si $p \neq q$, entonces F_p y F_q no son equivalentes.

Observemos aquí que el problema fundamental de la topología es reconocer si dos espacios dados son topológicamente equivalentes o no. Vale decir, definir las clases de espacios topológicamente equivalentes. Expresando el problema en esta forma tan general, estamos actualmente bien lejos de haberlo resuelto. La solución es bien conocida para el círculo (caso trivial), para las superficies y para las n-esferas con $n \geqq 5$ (resultado muy reciente del joven matemático americano Stallings para $n \geqq 7$, y de Stallings-Adams, inglés este último, para $n = 5$, 6).

La topología en su forma descripta hasta aquí, o sea la topología pura, se llama *topología de conjuntos.* Ha tenido un papel muy importante en la aclaración de muchos conceptos geométricos. Me refiero especialmente a la noción de dimensión, cuya idea general, bastante vaga, ha sido elucidada por completo siguiendo un método iniciado por Poincaré. Menger y Urysohn crearon toda una teoría de la dimensión; mediante esta teoría ha sido posible, por ejemplo, aclarar de manera definitiva la noción de curva.

Regresamos a la afirmación de que todas las teorías matemáticas son combinaciones, por partes, de álgebra y de topología. Observemos las dos ramas fundamentales: el análisis y la geometría.

Está claro que en una teoría analítica cualquiera, con variables reales o complejas, ecuaciones diferenciales, etc., se utilizan las operaciones algebraicas comunes, de modo que la existencia de una componente algebraica de toda la teoría es obvia. Por otra parte se introduce continuamente la noción de límite, ya sea como series o con las definiciones de derivada e integral; aquí está, pues la "componente topológica". Es probablemente mucho más evidente la incidencia de razonamientos topológicos, con la introducción de las superficies de Riemann y sus generalizaciones, o con la teoría, tan en boga actualmente, de los espacios de Banach. Hay un signo evidente: hace relativamente poco, los "analistas" no conocían la mayor parte de la topología, o, al menos, parafraseando a Mr. Jourdain, de Moliere, hacían topología sin saberlo. Todo esto ha pasado; y actualmente no existe analista activo que no utilice abiertamente una gran cantidad de nociones topológicas.

En el dominio geométrico, la parte topológica salta mucho más a la vista que la parte algebraica. Teorías como la geometría diferencial o la topología en sentido estricto, tienen evidentemente una fuerte componente topológica. Veamos un poco más de cerca lo que pasa, por ejemplo, con la geometría euclidiana.

Se puede decir que la geometría euclidiana de dimensión n consiste fundamentalmente en el estudio de colecciones de n coordenadas reales $x_1, \ldots, x_n$ llamadas puntos, o también vectores x de componentes x_i, sujetos a trasformaciones del tipo

$$y = P x + a \tag{1}$$

donde P es una matriz $n \times n$, con la propiedad

$$P P' = E_n \tag{2}$$

siendo P' la traspuesta de P, mientras E_n es la matriz unidad de $n \times n$.

Visto en esta forma, la componente algebraica aparece claramente. Pero la condición (2) es equivalente a esta otra: que la distancia $\sqrt{\| x - x^* \|}$ entre los puntos x, x^* sea invariante a través de las trasformaciones (1). Es el estudio de las propiedades que mantienen "rígido" a un cuerpo: rotaciones y traslaciones. Aquí es la parte topológica la que aparece con claridad.

Nótese que las trasformaciones definidas por (1) constituyen un grupo: el grupo de los desplazamientos en el espacio n-dimensional.

Algunas teorías geométricas son de naturaleza puramente algebraica. Consideremos, por ejemplo, un espacio A con las mismas coordenadas n-dimensionales, pero sujeto a trasformaciones del tipo (1) donde los elementos de la matriz P pertenecen a un campo cualquiera F, con la única condición de que el determinante $|P| \neq 0$. Esto origina la *geometría afin sobre el campo F*, cuya naturaleza es puramente algebraica.

Mencionemos aquí el desarrollo, durante este siglo y principalmente por los esfuerzos de Zariski, de la geometría algebraica en sentido estricto, como un capítulo del álgebra moderna. Existe, al lado de ésta, también la geometría algebraica como capítulo del análisis, con métodos bien distintos y sobre todo con una mezcla de topología y álgebra.

Posiblemente el hecho más sobresaliente sea, que el progreso de la topología haya necesitado de la ayuda muy intensa del álgebra, habiéndose desarrollado de este modo una *topología algebraica*. Finalmente, durante este siglo se usan cada vez más nociones topológicas en el álgebra, habiéndose desarrollado recientemente, nada menos que una teoría de *álgebra topológica*.

Regresemos a la topología algebraica para describir, de la manera más breve, como penetró el álgebra en el santuario de la topología. Como "culpable" de ello debe mencionarse a Poincaré.

Para simplificar, consideremos un poliedro π de dimensión dos, constituido por un número finito de triángulos $t_1, \ldots, t_\alpha$, de lados $l_1, \ldots, l_\beta$ y de vértices $v_1, \ldots, v_j$. Escribamos, con Poincaré, las "relaciones de frontera"

$$\partial\, l_i = \Sigma\, p_{ij}\, v_j \tag{3}$$

donde p_{ij} vale 1 si el vértice v_j pertenece al lado l_i, 0 en caso contrario. De modo que entre los números $p_{i1}, p_{i2}, \ldots, p_{i\alpha}$ sólo dos son iguales a 1, siendo los restantes 0.

Análogamente, escribamos

$$\partial t_k = \Sigma\, q_{mk}\; l_m \tag{4}$$

con tres de los q_{km} iguales a 1 y los demás a 0. De esta manera los coeficientes p_{ij}, q_{km} pertenecen al campo F de dos elementos 0, 1.

Tenemos entonces: las combinaciones lineales de la forma $\Sigma\, x_i\, l_i$, donde x_i pertenece a F, son los elementos para los cuales se puede escribir

$$\partial\, \Sigma\, x_i\; l_i = \Sigma\, x_i\; p_{ik}\; v_k. \tag{5}$$

De los elementos así obtenidos, los más notables son los llamados *ciclos*, que son aquellos $\gamma = \Sigma\, x_i\, l_i$, cuya frontera $\partial\, \gamma = 0$. Análogamente, para las caras del poliedro, escribamos

$$\partial\, \Sigma\, y_k\; t_k = \Sigma\, y_k\; q_{kn}\; l_n = \delta. \tag{6}$$

Se demuestra que si δ es de esta forma (vale decir es la frontera de algún complejo), entonces su propia frontera es nula, o sea es un ciclo. Más general, se dice que δ es equivalente a cero si es frontera de algún complejo.

Vemos que, en sentido algebraico, los complejos γ forman un campo vectorial sobre F, llamado grupo de homología unidimensional $H^1(\pi, F)$ de π sobre F. Su dimensión es el llamado número de Betti $R^1(\pi, F)$ de dimensión 1, de π sobre F. Se definen así varios grupos de homología, relativos a varios F, con números de Betti asociados. La propiedad fundamental, demostrada por primera vez por J. W. Alexander, es que los números de Betti son invariantes topológicos. Para la superficie del doble disco con p agujeros, $R^1 = p$, y en particular para la esfera es $R^1 = 0$. El papel que aquí juega el álgebra es evidente.

II. ACTO DE CLAUSURA

El Acto de Clausura tuvo lugar en el aula de Física de la Facultad de Ciencias Fisicomatemáticas de la Universidad Nacional de La Plata el día 27 de setiembre ,a las 17 horas. Hicieron uso de la palabra el Dr. Germán Fernández, Jefe del Departamento de Matemáticas de dicha Facultad y el Dr. Luis A. Santaló de la Universidad de Buenos Aires. Ambos discursos se publican a continuación:

PALABRAS PRONUNCIADAS POR EL DR. GERMÁN FERNANDEZ

En nombre de la Universidad Nacional de La Plata tengo el grato honor de dar la bienvenida a los ilustres matemáticos extranjeros y argentinos que nos visitan con motivo de las "Sesiones Matemáticas" organizadas por la Unión Matemática Argentina en adhesión del Sesquicentenario de la Revolución de Mayo. La Universidad Nacional de La Plata desea también expresar a los eminentes investigadores aquí presentes que una de sus preocupaciones fundamentales es la de promover la investigación científica, por lo que valora en toda su profundidad las importantes contribuciones que han realizado en el campo matemático y les desea nuevos éxitos en beneficio de la cultura y por tanto de la humanidad.

Es hecho bien conocido que las instituciones de estudios superiores han merecido especial atención en todos los países de cultura avanzada. La influencia de estos establecimientos ha sido preponderante en el progreso espiritual y de gran importancia por la vinculación que ellas tuvieron con los grandes acontecimientos históricos, políticos, económicos y sociales, producidos en cada nación.

La creación de universidades comienza en América Latina con la colonización. Los colonizadores no se limitaron sólo a fundar establecimientos para la educación primaria y media. Prestaron atención, también, a los de enseñanza superior con facultad de otorgar grados.

Las universidades erigidas en América Española con los respectivos años de fundación, son las siguientes: (1)

1. —	Santo Domingo	1538
2. —	México	1551
3. —	Lima	1551
4. —	Santa Fe de Bogotá	1573
5. —	Córdoba de Tucumán	1613
6. —	La de Charcas, Chuquisaca o Sucre	1623
7. —	Guatemala	1675
8. —	Cuzco	1692
9. —	Caracas	1721
10. —	Santiago de Chile	1728
11. —	Habana	1782
12. —	Quito	1791

No hay duda alguna de que la influencia de la colonización española en favor de las universidades fue intensa e importante. En menos de tres siglos, desde la creación de la Universidad de Santo Domingo hasta el de la revolución estallada en Buenos Aires el 25 de mayo de 1810, que fue el comienzo del movimiento emancipador de España en las naciones de América, se fundaron doce universidades.

La enseñanza y organización de las mismas ha sido severamente criticada por algunos historiadores, quienes, olvidando las condiciones especiales en que esas universidades se desarrollaron, las consideran como atrasadas, tendenciosas y de acción perjudicial para el progreso cultural americano. En realidad, las universidades americanas fundadas por los españoles perduran a través del tiempo y constituyen hoy grandes centros culturales. España no podía organizar, si se tiene en cuenta las diferencias de ambiente que existía entre ella y sus colonias americanas, universidades mejores que las españolas, que no se encontraban en un estado de gran adelanto en lo que se refiere a la Filosofía y a la Ciencia.

UNIVERSIDADES ARGENTINAS

Universidad de Córdoba. — Alrededor de 1599 comienzan las gestiones para establecer una universidad en Córdoba. En 1614 inicia sus actividades como universidad. Legalmente, o dicho de otro modo, como universidad fundada por licencia real, la funda-

(1) JULIO R. CASTIÑEIRAS: "Historia de la Universidad de La Plata". Publicaciones oficiales, 2 vol., año 1938, La Plata.

ción recién se produce en 1624 de acuerdo con la cédula de Felipe IV. Después de la Revolución de Mayo el Gobernador de la provincia de Córdoba decretó en 1828 la jurisdicción absoluta de su gobierno en la Universidad. El 11 de setiembre de 1856 bajo la presidencia de Urquiza, la Universidad Provincial de Córdoba se convierte por ley en Universidad Nacional de Córdoba.

Universidad de Buenos Aires. — Durante la colonización española no fue posible la creación de la Universidad de Buenos Aires. Los historiadores atribuyen la situación producida a la influencia que ejercieron las Universidades de Córdoba y Charcas "que ejercían la autoridad de metrópolis literarias".

Las juntas provisionales de gobierno que actuaron inmediatamente después de producida la revolución de Mayo (1810), los triunviratos de 1811 y 1812, la Asamblea de 1813 y los directores supremos desde el año 1814 hasta 1816, se consagraron principalmente a consolidar la obra revolucionaria y debieron afrontar acontecimientos políticos-militares de gran importancia para ahogar las tentativas contrarrevolucionarias. Poca atención prestóse en ese período, por esta razón, a la idea de crear la universidad. No obstante se crearon instituciones para el estudio de Matemáticas, Arquitectura civil y militar, Dibujo, etc., y se fundaron la escuela de Medicina y el Instituto médico del ejército.

Recién el 9 de agosto de 1821 se crea la Universidad Provincial de Buenos Aires resolviéndose "la erección e institución de una Universidad Mayor con fuero y jurisdicción académica y se establece una sala general de doctores que se compondrá de todos los que hubiesen obtenido el título de doctores en las demás universidades y sean naturales de esta provincia. casados o domiciliados en ella".

El 12 de agosto de 1821 se inauguró la Universidad de la Provincia de Buenos Aires con gran pompa y con la presencia del ministro don Bernardino Rivadavia. Recién el 18 de enero de 1881 se nacionaliza la universidad pasando a ser la Universidad de Buenos Aires.

Universidad de La Plata. — La Universidad Provincial de La Plata fue creada el 2 de enero de 1890 pero recién fue inaugurada el 18 de abril de 1897. La asamblea inaugural organizó la universidad en cuatro facultades: Derecho, Fisicomatemática, Química y Ciencias Médicas; y eligió primer rector al Dr. Dardo Rocha.

El 25 de setiembre la Universidad Provincial de La Plata, se convierte por ley en Universidad Nacional de La Plata.

La creación de la Universidad Nacional de La Plata fue debida a la iniciativa y acción perseverante del Dr. Joaquín V. González, facilitada indudablemente por el gran prestigio e influencia intelectual y política de que él disfrutaba. El Dr. Joaquín V. González concibió la idea de organizar una universidad de tipo nuevo, de carácter científico y experimental, en la que se desarrollara ampliamente la investigación científica, la extensión universitaria, el intercambio de profesores con universidades extranjeras y se impartieran las enseñanzas primaria y secundaria, también con carácter experimental. El 17 de marzo de 1906, el Dr. Joaquín V. González fue nombrado presidente de la Universidad y desempeñó la presidencia de la nueva Universidad durante doce años consecutivos, dedicándose con entusiasmo a la tarea de consolidarla definitivamente y ampliar su radio de acción.

La creación de la Universidad Nacional de La Plata se produjo con un proceso distinto a los que dieron origen a las universidades de Buenos Aires, del Litoral, de Tucumán y de Cuyo. Para llegar a la fundación de estas universidades nacionales fueron necesarios movimientos de opinión pública y de carácter general e iniciativas reiteradas de legisladores nacionales.

Universidad del Litoral. — El 16 de octubre de 1889 se crea la Universidad Provincial de Santa Fe.

La idea de descentralizar la universidad nacional por la afluencia relativamente extraordinaria, y siempre creciente de estudiantes a la Universidad de Buenos Aires, la fundación de la Universidad Nacional de La Plata y la aspiración de las provincias en el sentido de alcanzar personalidad intelectual de primer plano y atender las necesidades de carácter regional con la enseñanza superior, se manifestó en la presentación de diversos proyectos al Congreso de la Nación para nacionalizar la Universidad de Santa Fe. Hubo además un gran movimiento popular tendiente a la nacionalización que recibió la adhesión de las autoridades provinciales y de los más calificados representantes de los intelectuales y entidades comerciales e industriales del litoral. Los actos realizados y trabajos publicados fueron numerosísimos. Los estudiantes universitarios de todo el país lo apoyaron calurosamente y realizaron, con todo empeño, gestiones ante los poderes públicos nacionales.

El 17 de octubre de 1919 se creó la Universidad Nacional del Litoral, con asiento en la ciudad de Santa Fe. Algunas facultades funcionan en esta ciudad y otras en la ciudad de Rosario.

Universidad de Tucumán. — San Miguel de Tucumán, fundada el 31 de mayo de 1565, tiene una antigua tradición y una gran señoría cultural. Es actualmente un centro importante, comercial, industrial y ferroviario en la República Argentina. Ciudad, la de Tucumán de gran tradición histórica, en la que se realizó el 9 de julio de 1816 el Congreso que proclamó definitivamente en el mundo la independencia absoluta de la Nación, hecho que mantiene en todos los corazones argentinos un afectuoso y cordial respeto y simpatía hacia ella.

La Universidad de Tucumán fue creada el 2 de julio de 1912. En solemne ceremonia pública la Universidad Nacional de Tucumán fue inaugurada el 25 de mayo de 1924.

Universidad de Cuyo. — En las provincias del Oeste argentino, Mendoza, San Juan y San Luis, existen desde hace tiempo escuelas técnicas de carácter especial: la vitivinícola en la primera y las de minas, industrias químicas y agrícolas en la segunda.

En estas provincias, tienen una importancia extraordinaria las industrias vitivinícolas y frutícolas, para cuyo progreso son necesarias las investigaciones de carácter científico e industrial y en ellas, como en la de San Luis, abundan yacimientos de combustibles. La riqueza en minerales y su explotación son conocidas desde la época de las primeras conquistas españolas.

A partir del año 1920 se manifiestan movimientos de opinión en favor de la creación de la Universidad de Cuyo, entre los estudiantes y en los círculos intelectuales e industriales de la provincia de Mendoza, principalmente.

El 16 de agosto de 1939 fue inaugurada solemnemente la nueva universidad, funcionando el rectorado en Mendoza y con facultades en Mendoza, San Juan y San Luis.

Otras universidades. — En los últimos cuatro años se han fundado otras tres universidades: la Universidad del Sur, la Universidad de La Pampa y la Universidad del Nordeste; siendo la primera de ellas la más importante.

CENTROS DE AYUDA A LA INVESTIGACION CIENTIFICA Y TECNICA

Según acabamos de detallar, existen en nuestro país nueve universidades. La mayoría de ellas realiza, aparte de la enseñanza superior en todas las ramas de la cultura, trabajos de investigación en diversas disciplinas. En los últimos años se han creado organismos nacionales y provinciales destinados a promover la investigación científica, que ayudan a universidades e Institutos a proseguir o iniciar trabajos para los que no se contaba con elementos suficientes. Tal es el caso del Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas y, por ejemplo, la Comisión de Investigación Científica de la Provincia de Buenos Aires.

Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas. — La institución que en estos momentos se perfila como rectora de la investigación científica en la República Argentina, es el Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas, presidido por un eminente hombre de ciencia: el Dr. Bernardo A. Houssay. La ayuda de este Consejo a universidades y centros de investigación es muy valiosa. Los subsidios para completar revistas científicas, el otorgamiento de becas internas y externas para iniciarse en la investigación y para investigadores formados, la creación de la carrera de investigador científico a la que se ha adherido con entusiasmo esta Universidad, la ayuda material que presta para posibilitar la visita o radicación en nuestro país de investigadores de reconocido prestigio internacional, etc., son, entre otros, procedimientos muy acertados que tienden a consolidar y elevar la cultura a niveles superiores.

Comisión de investigación científica de la Provincia de Buenos Aires. — En el orden local, es decir en el de la provincia de Buenos Aires, tiene aproximadamente los mismos propósitos que el Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas. Ayuda a las dos universidades nacionales de la provincia: la de La Plata y de del Sur, y a todos los institutos o centros donde se realice investigación científica o técnica. Esta Comisión fue creada el 15 de octubre de 1957. Solamente en becas y contratos para investigaciones científicas y técnicas, esta Comisión ha otorgado lo siguiente: 36 becas y 18 contratos por un monto que supera los tres millones de pesos.

Centro Latino Americano de Matemáticas. — En el orden estrictamente matemático no puede dejar de mencionarse la creación en el año 1959, por parte de la UNESCO y de acuerdo con el Gobierno argentino, del Centro Latino Americano de Matemáticas, cuya dirección ejerce el destacado matemático argentino Dr. Alberto González Domínguez. Este Centro ha posibilitado la concurrencia a nuestro país de matemáticos de prestigio internacional para promover la investigación científica y ha posibilitado también la concurrencia a cursos de muchos alumnos de países latinoamericanos. Considero que esta inyección científica será de beneficio positivo a corto plazo y es de esperar que todos los países latinoamericanos aprovechen las enseñanzas que en el campo matemático puede ofrecerles este importante Centro.

PERSPECTIVAS DEL DESARROLLO DE LA MATEMÁTICA EN AMÉRICA LATINA

Por L. A. SANTALÓ

Como acto final de estas Sesiones Matemáticas organizadas con motivo del ciento cincuenta aniversario de la Revolución de Mayo, se pensó que podrían ser interesantes algunas reflexiones sobre las perspectivas del desarrollo de la matemática en América Latina. Al principio, parecería más prudente y sobre todo más exacto, por disponer de un mayor y más directo conocimiento del ambiente, limitarse a las perspectivas de la matemática en la Argentina, pero las conclusiones a que se llega son tan análogas, el pasado por cuya inercia nos movemos es tan parecido, los escollos con que el desarrollo científico tropieza y los vientos que lo estimulan y empujan tan similares, que no creo sea muy aventurada la extrapolación de lo local a lo global.

Incluso es muy probable que todo lo que se pueda decir de la matemática sea en gran porcentaje válido para cualquier ciencia. La ciencia, en su conjunto, es como una cadena continua, donde cada eslabón sigue la suerte de los demás.

Toda perspectiva necesita de un punto de mira que permita otear no solamente el futuro, siempre nebuloso y sujeto a cambios imprevisibles, sino también el pasado, mejor conocido, en el cual hay que descubrir el comienzo de los caminos que conducen a lo porvenir. La realidad es que el cultivo y consecuente florecimiento de las ciencias en América Latina es cosa reciente. Ello es debido a varias causas, estrechamente vinculadas y entremezcladas entre sí, pero que no es difícil individualizar y que en gran parte pueden condensarse en dos de ellas: la falta de tradición y la soledad.

Solamente en dos países de Latinoamérica hubo una bien definida civilización precolombiana. Pero con todo el interés y admiración que se sienta por aquella civilizaciones exóticas, debe reconocerse que no tuvieron carácter científico, por lo menos en el sentido que la palabra ciencia tiene entre nosotros. Siguen después las épocas de la conquista y de la colonia, durante las cuales se pensó más en explotar riquezas e importar dogmas que en sembrar simientes científicas de larga gestación pero segura cosecha. Finalmente llega la época de las independencias y formación de nacionalidades, épocas de inestabilidad política, guerras civiles, en que todo el esfuerzo debía ser dedicado a conseguir los medios materiales necesarios para la subsistencia de las nuevas organizaciones. Por todo ello puede decirse, término medio, que hasta los últimos años del siglo pasado o principios del presente, una vez moldeada y afirmada la organización de cada país como nación, no empiezan a nacer las preocupaciones científicas. La tradición científica, por tanto, no va más allá del medio siglo.

Un ejemplo bien significativo lo tenemos en la misma Argentina. Cuando en ocasión del centenario de la Revolución de Mayo, en 1910, se celebraron los festejos conmemorativos, probablemente que a nadie se le ocurrió celebrar "Sesiones Científicas" como las que han tenido lugar este año. Y si a alguien se le hubiera ocurrido, difícilmente hubieran podido llevarse a cabo por falta de entidades especializadas capaces de organizarlas. Las asociaciones científicas: Unión Matemática Argentina, Asociación Física Argentina. Sociedad Astronómica, Asociación Química, Asociación Geológica, etc., son todas mucho más recientes. Existía, tal vez como único caso, la Sociedad Científica Argentina, admirable y meritoria, pero demasiado extensa en sus objetivos para que pudiera ser profunda. Hoy, en cambio, casi no hay rama de la ciencia que no tenga su agrupación especial. Señal que hay interés. En cincuenta años la preocupación científica nació y se desarrolló con bríos. Este ejemplo de la Argentina, con diferencias en el tiempo de más o menos unos pocos años, es el caso de todos los países de América Latina.

Son frecuentes las preguntas ¿es que la tradición es necesaria para el florecimiento de la matemática? Siendo una ciencia de puro intelecto, que no necesita de laboratorios ni museos ni archivos ¿por qué no puede aparecer espontáneamente una inteligencia genial, aislada, como "edelweiss" en medio de las nieves solitarias? ¿No ha habido genios matemáticos que en temprana edad ya marcaron su impronta en la historia de esta ciencia? ¿qué influencia pudo tener en ellos la tradición? Si es cierto que lo que no da la naturaleza no lo presta Salamanca, ¿qué necesidad hay de Salamanca?

No vamos a discutir el porqué, problema filosófico que puede tener varias explicaciones, todas aceptables y todas discutibles, pero el hecho es real e innegable como todo hecho experimental. Es cierto que un Pascal, a los dieciseis años descubrió teoremas imperecederos sobre las cónicas y que un Galois a los veintiuno dejó huella imborrable en la teoría de ecuaciones, pero ambos se educaron en París, foco de la cultura de occidente. Es cierto también que en fecha más reciente hubo un Ramanujan en la India, pero también allí destilan en todos los ámbitos los vapores de una intensa y milenaria vida espiritual.

La matemática es una labor de equipo, de un equipo que trabaja no simultáneamente pero que lo hace sin discontinuidad en el tiempo y que se traslada con dificultad y lentitud en el espacio. La obra precedente, en su conjunto más que en sus detalles, influye de manera poderosa sobre la obra presente. Puede, como es de suponer que ocurriera dada su edad, que Pascal y Galois desconocieran mucho de la matemática anterior, pero su posición geográfica los hizo estar bajo el influjo de maestros o, todavía en forma más sutil, de un ambiente difícil de definir como toda emanación espiritual, que les acompañaba desde la primera enseñanza y les permitió comprender lo que la matemática verdaderamente es, con sus problemas e inquietudes.

Puede ser que no ocurra lo mismo con las manifestaciones artísticas del espíritu. Para ser poeta o pintor, por ejemplo, es posible que basten fuertes dotes de captación y frondosa inspiración para poder apreciar primero y expresar luego los sentimientos producidos por los raudales de belleza que la naturaleza ofrece generosamente en todas partes, en los viejos y en los nuevos continentes. El conocimiento de las técnicas anteriores puede ser conveniente, pero su grado de necesidad es limitado. El idioma es todo lo que hace falta para ser poeta: el idioma como herramienta y la inspiración como motor. Algo análogo ocurre con la pintura. En ambos casos la tradición es mucho menos necesaria. Ello explica, entre otros muchos, los casos de un Rubén Darío, una Gabriela Mistral o un Diego Rivera. En matemática los casos análogos son muchos más difíciles. Aun en los casos en que es también la Naturaleza la que presenta los problemas matemáticos, su captación es de otra índole, mucho menos directa que la captación de la belleza. Cuando Newton vio caer la manzana, posiblemente hubiera podido en cualquier lugar de la Tierra y tan solo con genio poético escribir versos sobre "la manzana hermosa - de gualda y roja sangre matizada - y de color de rosa. . .", pero difícilmente que en otro lugar distinto de Inglaterra u otro país de la Europa culta de la época, hubiera podido extrapolar tan usual fenómeno al enunciado de la ley universal de la gravitación. Para ello era necesario que sobre el ambiente influyeran todas las obras astronómicas anteriores, desde Ptolomeo a Kepler, y no sólo con su presencia material de frío y muerto contenido, como podrían haber estado en cualquier biblioteca de un país nuevo, sino con todo un halo humano y viviente de personas que las conocen y las mantienen con calor de vida.

Este ambiente, que se transmite por contagio y no por herencia, que se impregna en las aulas, en las bibliotecas, en las familias, en los "clubs" y en todas partes, es lo que llamamos tradición científica, imposible de improvisar o trasplantar y que solamente cabe crearla, lenta y cuidadosamente, con la paciencia y tenacidad con que empiezan las obras perdurables. Los comienzos son difíciles, pero en compensación, una vez creada una tradición, las mismas dificultades de su creación se transforman en seguridad de permanencia. Si difícil es crear una tradición, difícil es también romperla una vez existente.

Hemos dicho que se transmite por contagio y no por herencia, pues América ofrece la mejor prueba experimental de ello. Representantes de muchos pueblos y razas que en sus países de origen dieron abundantes e insignes matemáticos, al llegar a estas playas dedicaban su atención a otras ocupaciones y tareas. Inversamente, hay ejemplos bien notorios de hijos de países sin tradición científica que trasplantados a otros ambientes propicios han alcanzado las más altas cumbres del renombre matemático.

Otro factor negativo que ha tenido que vencer Latinoamérica para que el desarrollo de la matemática fuera posible, ha sido la soledad, derivada de las grandes distancias entre sus centros de población.

Toda ciencia necesita, para florecer, de un cultivo adecuado. La matemática, más que ninguna, necesita del calor que le proporciona la compañía de un número abundante de cultivadores. Es difícil, sino imposible, un matemático aislado. Las ideas, como las chispas del pedernal, nacen del contacto mútuo, de la discusión, de la pelea. No basta disponer de bibliografía: la lectura de libros y revistas es una condición necesaria, pero en ningún modo suficiente. Los llamados autodidactas, raros en todas las disciplinas, en matemáticas no existen. En cambio, cuando se logra formar un nucleo de cultivadores que puedan reunirse, discutir y plantearse problemas, la matemática, como por arte de magia, empieza a florecer. Decimos por arte de magia porque la manera como se ha desarrollado y crecido la matemática a través de los tiempos es un verdadero milagro. Ciencia y arte, en que la fantasía juega tanto papel como el correcto razonar, es cosa de maravilla que no haya ido nunca por sendas equivocadas. Lo que cuesta es prender el fuego y mantenerlo en sus primeros tiempos. Después marcha sólo y es difícil detenerlo.

Actualmente la soledad disminuye rápidamente gracias al progreso de los medios de locomoción, que permite reunir como en la presente ocasión de estas Sesiones Matemáticas, especialistas de países lejanos tan solo por pocos días. Si ya tenemos la tradición en marcha y la soledad vencida ¿qué hace falta más?

Para ver el camino que ha de seguir la matemática en su evolución, conviene tener presente como lo ha hecho a través de la historia. Para comprender mejor el trato que los matemáticos deben esperar de la sociedad, veamos rápidamente como ha sido en épocas pasadas, durante las cuales la matemática se fue creando.

La matemática ha progresado casi siempre gracias a la ayuda y protección de quienes, entendiéndola poco, han esperado de ella cosas bien distintas de las que podía dar. Se ha esperado siempre una inmediata utilidad práctica o un camino para descubrir relaciones místicas, vía astrológia por ejemplo, que satisfacieran la curiosidad acerca del futuro o del comportamiento ajeno.

Cuando Ptolomeo preguntaba a Euclides acerca de un camino real para la geometría, posiblemente quería saber en qué podía ser útil a los reyes esta ciencia. Arquímedes dedicaba obras a Gelon, hijo del tirano Hieron de Siracusa, cuya protección era seguramente debida más a la esperanza de que los inventos de Arquímedes fueran útiles para defender la ciudad, que al descubrimiento de que el área de la esfera es igual a la del cilindro circunscrito de igual altura. Tartaglia escribía libros de artillería y enseñaba como fortificar una plaza, pero su interés y obsesión era la ecuación de tercer grado "la flor más preciada, sin la cual todo quedaría una oscura selva...". Durante el Renacimiento, los príncipes italianos tenían a matemáticos o a científicos en general como educadores de sus hijos. Descartes debía, a las cinco de la mañana, dar clases particulares a la reina Cristina de Suecia.

Sin embargo estas ocupaciones no fueron obstáculos para el progreso de la matemática. A los matemáticos les sobraban energías para cumplir con sus tareas profesionales y dedicarse, al mismo tiempo, a la especulación pura, buscando y resolviendo problemas en los que cifraban con razón su futuro "renombre y fama", casi siempre único motor de la investigación científica.

Parece interesante hacer resaltar el aspecto anterior para que no extrañe que las circunstancias actuales son muy análogas. Ello no debe atribuirse a incomprensión moderna o a la falta de visión de los países nuevos, sino a la continua repetición de la historia. Actualmente no hay emperadores o tiranos a la antigua usanza, por la fuerza de las armas, ni príncipes renacentistas por la gracia de Dios: hay gobiernos por la voluntad del pueblo. Los matemáticos ya no tienen que hacer horóscopos ni ser puntos singulares en cortes principescas. Pero deben, y es tal vez justo que así sea, mostrar ocupaciones que justifiquen el tiempo dedicado a sus auténticas actividades matemáticas. Si Arquímedes tenía que buscar la ley de la corona del rey, si Tartaglia tenía que escribir al "Clementisimo e invittissimo Henrico VIII de Inglaterra, Francia e Hibernia" acerca de cómo conducir la artillería, si Descartes debía madrugar para satisfacer la curiosidad de una reina, si Gauss debía hacer interminables cálculos geodésicos o astronómicos, nada tiene de particular, antes al contrario es la continuación de una larga y gloriosa tradición, que los matemáticos actuales tengan que estar en una Comisión de la Energía Atómica haciendo cálculos de rutina, o en una Escuela Técnica enseñando el método de Monge, o deban agregar al nombre de sus Institutos de Matemática el estrambote de "matemática aplicada", o "de estadística", o de "cálculo numérico", todo ello para poner de manifiesto una posible aplicación de la matemática, generalmente pura y abstracta, que en ellos se cultiva. Es la retribución que los matemáticos deben a la sociedad; es una concesión, no demasiado onerosa, en aras de la subsistencia. No hay que extrañarse, ni hay que exagerar acerca de los inconvenientes que ello supone.

Las condiciones presentes son propicias para el desarrollo de la matemática. En todo el mundo se dice y repite por los poderosos medios actuales de difusión, el papel imprescindible de la ciencia en la vida moderna y más aún en el progreso futuro. Junto con toda la ciencia, también la matemática debe ser tenida en cuenta si no se quiere quedar en la categoría de país, como hoy se dice, subdesarrollado. En consecuencia, varios factores convergen para acelerar el progreso de elevar el nivel de la matemática en todos los países, factores de carácter nacional unos y de carácter internacional otros.

De carácter internacional tenemos la obra de la UNESCO, en su doble papel de estímulo y propaganda por una parte y de ayuda técnica por otra. Gracias a la UNESCO varios países pueden recibir por algún tiempo la visita de matemáticos de primera línea cuyo efecto catalítico ha resultado a veces sorprendente.

También la OEA (Organización de Estados Americanos), limitada en sus principios a encauzar y tratar únicamente problemas políticos y económicos, ha dado en los últimos años un gran incremento hacia sus preocupaciones científicas: se han creado becas, organizado reuniones, se ha facilitado el intercambio de profesores.

Junto a estas instituciones debemos señalar otras, también de carácter internacional aunque privado, cuya influencia en todos los países de Latinoamérica para el desarrollo de la matemática ha sido considerable. Me refiero a las fundaciones Rockefeller y Guggenheim, a las cuales recientemente se ha agregado la fundación Ford, gracias a las cuales numerosos becados pudieron perfeccionarse en los Estados Unidos y numerosas instituciones recibieron considerable ayuda material para llevar a cabo sus proyectos de investigación.

En el terreno nacional, también los gobiernos han ido comprendiendo la necesidad del desarrollo científico. Han ido surgiendo en los distintos países Consejos Nacionales de Investigaciones Científicas y una vez tenido el órgano, por propio instinto de conservación, la función no se ha hecho esperar. Se han ido creando becas, internas y externas, con comprensión de que el estudio y la investigación son trabajos importantes que deben ser retribuidos y estimulados. En las universidades se ha ido estableciendo el "fulltime" para los profesores, condición sobrentendida en los países de tradición, pero difícil de sostener en los países nuevos.

Va surgiendo en cada país un ambiente propicio y van apareciendo figuras de relieve que consiguen hacerse escuchar en sus prédicas en pro de la investigación científica. Se empieza a valorizar el capital científico. Hasta hace pocos años era frecuente oir de los políticos o gobernantes las ventajas o inconvenientes de la "radicación" o de la "emigración" de capitales. La potencialidad de un país dependía de sus reservas en oro o divisas. Poco o nada se hablaba de las reservas humanas, a no ser para contar el número de soldados o divisiones que podían ponerse en pie de guerra dada la eventualidad. Hoy, en cambio, voces numerosas y calificadas alertan sobre los peligros de la emigración de los científicos y la ventaja o necesidad de la radicación de científicos extranjeros. La necesidad de impulsar los estudios científicos en general y de los matemáticos en particular es ya difícilmente negada. Se están discutiendo el más o el menos de la ayuda necesaria y la manera como mejor iniciar y encauzar dicho impulso. Pero una vez comprendido el problema, debemos tener fe en que su solución será pronta y definitiva. Es la ventaja de los países nuevos, como de todo organismo joven, a veces tardíos para captar las necesidades, pero rápidos y decisivos para superarlas una vez captadas.

Todo ello está produciendo ya sus frutos. Las publicaciones y revistas matemáticas son ya numerosas y prestigiosas. Como revistas, cuyos trabajos aparecen mencionados en el *Mathematical Reviews*, se pueden citar:

Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana,
Boletim da Sociedade Matematica de São Paulo,
Mathematicae Notae, Rosario (Argentina),
Publicaciones del Instituto de Matemática y Estadística, Montevideo,
Revista Matemática Cuyana (Argentina),
Revista de Matemáticas Elementales (Bogotá),
Revista Cubana de Ciencias Físicas y Matemáticas (La Habana),
Revista de la Unión Matemática Argentina,
Revista de Matemáticas y Físicas Teóricas de la Universidad Nacional de Tucumán (Argentina),
Summa Brasiliensis Mathematica (Rio de Janeiro),
Publicaciones de la Universidad Nacional de La Plata (Argentina).

De carácter más general, pero también con elevada proporción de trabajos de matemáticas se pueden citar:

Actas de la Academia de Ciencias de Lima,
Anais da Academia Brasileira de Ciencias,
Anales de la Sociedad Científica Argentina.

Tanto o más importantes que estas publicaciones periódicas, como índice del nivel alcanzado, son las publicaciones en forma mimeografiada de los cursos y seminarios dictados en diversas universidades. En este sentido debemos citar las *Notas de Matemática*, publicadas por el Instituto de Matemática Pura e Aplicada (Río de Janeiro), los *Textos de Matemática* publicados por el Instituto de Fisica e Matematica de la Universidade de Recife (Brasil) y los *Cursos y Seminarios de Matemática* de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad de Buenos Aires, junto con otros varios de distintas universidades publicadas sin formar colección numerada ni título genérico.

Varios coloquios o simposios de Matemática que han tenido lugar en distintos países, algunos iniciando una proyectada periodicidad, cuyas comunicaciones o cursos han sido publicadas en forma de volúmenes (impresos o mimeografiados) son otra prueba del nivel alcanzado y del éxito progresivo de estas iniciativas. Citaremos:

Simposios sobre "Algunos problemas que se están estudiando en América Latina". Primero, celebrado en Punta del Este, Uruguay, en 1952. Segundo, celebrado en Villavicencio, Argentina, en 1954.

Simposio sobre Topología Algebraica, México, 1956.

Coloquios Brasileiros de Matematica, Poços de Caldas, 1957 y 1959.

Toda esta obra realizada es fruto de los últimos veinte años. En ella y en sus bríos juveniles, ciframos la esperanza de una definitiva incorporación de la América Latina al conjunto de las naciones más calificadas en el aspecto matemático.

III. (

SUR Q
CON

(Univ

Etant donn
gonales et no
envisager les
presque part

sous diverses
suffisantes po
ficients c_n. 2.°
que les foncti
soient bornée
$\{ \varphi_n(x) \}$ poss
tirer les cons

Nous allons
problèmes im

1.° Un pro
ment, par m
convergente
d'une façon a
où [1] est div
dition assez f
d'après leque