SOBRE LA DISTRIBUCION PROBABLE DE CORPUSCULOS EN UN CUERPO, DEDUCIDA DE LA DISTRIBUCION EN SUS SECCIONES Y PROBLEMAS ANALOGOS

por L. A. Santaló

Supongamos N corpúsculos de forma convexa distribuídos de manera arbitraria en el interior de un cuerpo también convexo K. Si V es el volumen de este cuerpo llamaremos *densidad media* de corpúsculos en K al cociente

$$D = \frac{N}{V} \tag{1}$$

o sea al número de ellos por unidad de volumen si la repartición fuese uniforme.

Si una recta arbitraria que atraviesa el cuerpo corta a n de estos corpúsculos y la longitud de la cuerda que determina en K es s, el cociente $\frac{n}{s}$ será la densidad media de los corpúsculos sobre la recta. Haciendo esta operación con varias rectas elegidas al azar, el objeto de esta nota consiste en ver cómo de estas distribuciones sobre las rectas se puede deducir la densidad media (1) del cuerpo entero.

En lugar de cortar por una recta se puede también cortar por varios planos y deducir de la densidad de corpúsculos en las secciones la densidad de ellos en todo el cuerpo. También consideramos los casos (§ 2, nos. 7, 9) de cortar por franjas limitadas por dos planos paralelos o bien por cilindros de sección convexa.

Como aplicación se obtiene en § 2, nº. 3 un resultado clásico de la teoría cinética de los gases.

El método de demostración consiste en utilizar algunos resultados de Probabilidades Geométricas o de Geometría Integral para los cuales remitiremos al lector principalmente a los libros de Blaschke «*Vorlesungen über Integralgeometrie*, I y II» [1] o al de Deltheil «*Probabilités géometriques*» [2] (1).

(1) Los paréntesis cuadrados se refieren a la Bibliografía citada al final.

§ 1. Caso del plano

1. *Secciones por una recta.* Supongamos primeramente una figura convexa K que contenga en su interior N corpúsculos C congruentes entre sí pero de forma cualquiera (con la sola restricción de ser también *convexos*).

Una recta cualquiera G del plano vendrá determinada por sus coordenadas polares p, ϑ o sea su distancia a un punto fijo y el ángulo de su normal con una dirección también fija. Dar una recta arbitraria en el plano significa lo mismo que dar al azar un par de números p y ϑ (p cualquier número positivo y ϑ comprendido entre 0 y 2π) y para medir un conjunto de rectas se toma la integral extendida a este conjunto de la forma diferencial [1, p. 7], [2, p. 59],

$$d\,G = d\,p \,.\, d\,\vartheta. \tag{2}$$

Con esta expresión si se considera una línea cualquiera de longitud l y llamamos n_1 al número de puntos en que es cortada en cada posición de la recta G se verifica [1, p. 11], [2, p. 60],

$$\int n_1\, d\,G = 2\,l \tag{3}$$

extendida la integración a todas las rectas que cortan a la línea considerada, únicas para las que es $n_1 \neq 0$.

Vamos a aplicar esta fórmula (3) a la línea formada por todos los contornos de los corpúsculos contenidos en K (fig. 1).

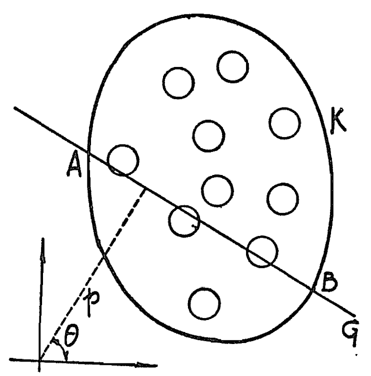

Fig. 1.

Si u es el perímetro de cada uno de ellos, la longitud total será $N u$ y si se representa por n el número de corpusculos que son cortados por la recta G, como cada uno tiene dos puntos de intersección, será

$$\int_{G.K \neq 0} n \, dG = N u \tag{4}$$

donde con el símbolo $G.K \neq 0$ entendemos que la integración debe extenderse a todas las rectas que cortan a K.

Por otra parte, si se representa por U el perímetro de la figura K, por ser convexa y por tanto n_1 constante e igual a dos, la fórmula (3) nos da como medida de todas las rectas que cortan a K:

$$\int_{G.K \neq 0} dG = U. \tag{5}$$

Dividiendo (4) por (5) se deduce, como *valor medio del número de corpúsculos que son cortados por una recta arbitraria G que atraviesa la figura K*:

$$\bar{n} = N \frac{u}{U}. \tag{6}$$

2. Llamando s a la longitud de la cuerda que la recta G determina en K y F al área de esta figura, es fácil ver que [1, p. 19], [2, p. 74],

$$\int_{G.K \neq 0} s \, dG = \int s \, dp \, d\vartheta = \int_0^{\pi} F \, d\vartheta = \pi F. \tag{7}$$

Por tanto la *longitud media* de las cuerdas de K vale, dividiendo (7) por (5),

$$\bar{s} = \pi \frac{F}{U}. \tag{8}$$

3. Si se quiere ahora ver la densidad de corpúsculos sobre las rectas que atraviesan a K, bastará dividir el número medio (6) de ellos por la cuerda media (8), obteniéndose

$$\delta_G = \frac{\bar{n}}{\bar{s}} = \frac{u}{\pi} \frac{N}{F}, \tag{9}$$

pero $\frac{N}{F}$ es la densidad media D de corpúsculos en la figura total K o sea el número de ellos por unidad de área si la repartición fuera uniforme, luego (9) puede escribirse

$$\delta_G = \frac{u}{\pi} D, \tag{10}$$

que es la relación que liga *la densidad media de corpúsculos sobre las cuerdas de las rectas que atraviesan a K con la densidad total de ellos.*

Por ejemplo, si los corpúsculos son circulares de radio r es

$$\delta_G = 2 r D. \tag{11}$$

Esta expresión representa también el número de corpúsculos que encuentra la recta G por unidad de longitud y por tanto la *distancia media* entre ellos será la inversa, o sea

$$d_G = \frac{1}{2rD} \tag{12}$$

que nos da la *distancia media entre dos corpúsculos vecinos de los N que están distribuídos al azar en el área F.*

3. PÓLYA en un artículo muy sugestivo [5], en el que llega al mismo resultado, aunque por camino completamente distinto, da a esta cuestión la siguiente interpretación gráfica: Si desde un punto arbitrario de un bosque rodeado de árboles con sección circular de radio r distribuídos con una densidad media D, se mira en todas direcciones hasta donde alcanza la vista (fig. 2) la *distancia visible media* está dada por (12).

Tomando la inversa de la fórmula (10) tendríamos una expresión más general de esta misma distancia media para el caso de no ser las secciones circulares. (Ver el Apéndice, § 3).

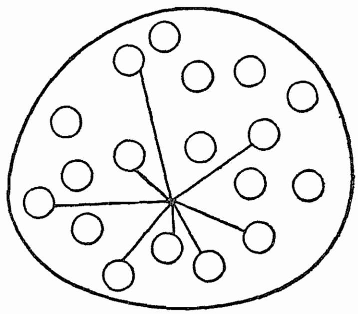

Fig. 2.

4. *Secciones por una banda paralela.* Sea el mismo problema anterior, pero ahora supongamos que se corta la figura K por una banda limitada por dos rectas paralelas a distancia Δ y de la densidad media de corpúsculos en la sección queremos deducir la densidad en la figura total (fig. 3).

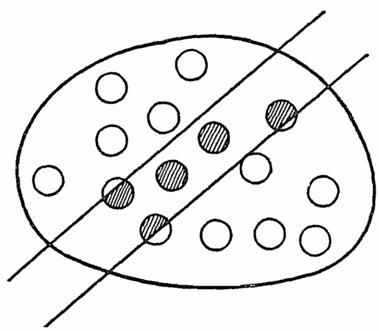

Fig. 3.

La posición de una de estas bandas paralelas queda determinada, en el plano, por las mismas coordenadas p, ϑ de una recta que puede ser, por ejemplo, su paralela media. Representando ahora por dB (densidad para conjuntos de bandas paralelas) la misma forma diferencial $dp\,d\vartheta$ de antes, o sea

$$dB = dp\,d\vartheta \tag{13}$$

y siendo n el número de corpúsculos que en cada posición que-dan total o parcialmente interiores a la banda B, es sabido que (2)

$$\int\limits_{B.K \neq 0} n\,dB = \pi N \Delta + N u \tag{14}$$

estando extendida la integración a todas las bandas B que cortan a K y siendo, como antes, N el número total de corpúsculos contenidos en K y u la longitud del contorno de cada uno de ellos.

La medida total de las bandas paralelas de anchura Δ que cortan a K es [7, p. 18]

$$\int\limits_{B.K \neq 0} dB = U + \pi\Delta \tag{15}$$

luego dividiendo (14) por (15) se deduce como *valor medio del número de corpúsculos encontrados por una banda arbitraria*

$$\bar{n} = \frac{\pi\Delta + u}{\pi\Delta + U} N. \tag{16}$$

Esta fórmula nos resuelve de paso el problema siguiente:

Supuestos n corpúsculos de forma convexa cualquiera y perímetro u interiores a una figura convexa K, el número medio de ellos que son alcanzados por una pincelada de anchura Δ *dada arbitrariamente sobre esta figura, está dado por* (16).

La fórmula (16) se encuentra también en E. GASPAR [3, p. 136].

---

(2) Sobre bandas paralelas móviles en el plano y para las fórmulas (15) y (17) se puede ver nuestra memoria [7].

La fórmula (14) se puede deducir de la de BLASCHKE [1, p. 37]

$$\int c_{01} \quad dK = 2\pi\,(C_0 F_1 + C_1 F_0 + U_0 U_1) \quad (*)$$

con solo suponer que la figura K que aquí interviene, de área F_0, longitud U_0 y curvatura total C_0, se reduce a una banda de plano limitada por rectas paralelas a distancia Δ. Habrá que sustituir dK por dB, F_0 por $\frac{1}{2}\Delta$, U_0 por 1 y C_0 se anula. Como figura fija se suponen aquí los N corpúsculos, los cuales, siendo convexos, dan $C_{01} = 2\pi n$, $C_1 = 2\pi N$ y $U_1 = Nu$. Con estas sustituciones la fórmula (*) pasa a la (14) que utilizamos en el texto.

Una demostración directa de la fórmula (14) ha sido dada por E. GASPAR [3, p. 135].

5. Llamando f al área de la parte de K que queda interior a la banda B, es sabido también que [7, p. 19], [1, p. 51],

$$\int_{B.K=|=0} f\,dB = \pi \Delta F. \tag{17}$$

y por tanto el valor medio de f vale

$$\bar{f} = \frac{\pi \Delta F}{U + \pi \Delta}. \tag{18}$$

Dividiendo (16) por (18) se tendrá el *valor medio de la densidad de corpúsculos en las secciones obtenidas cortando K por B,* que valdrá

$$\delta_B = \left(1 + \frac{u}{\pi \Delta}\right) D. \tag{19}$$

Esta es la relación buscada que nos liga *la densidad total D con la densidad media de las secciones.*

§ 2. Caso del espacio.

1. *Secciones por una recta.* Sea en el espacio un cuerpo convexo K conteniendo en su interior N corpúsculos iguales también convexos pero de forma cualquiera y distribuídos de una manera arbitraria. Queremos obtener la relación existente entre el número de estos corpúsculos que corta una recta al azar que atraviesa el cuerpo con el número total de ellos.

Una recta en el espacio está determinada por cuatro parámetros que pueden ser: las coordenadas x, y de su punto de intersección con un plano normal y la longitud y latitud φ y ϑ que fijan su dirección. Representando por $d\Omega$ el elemento de área sobre la esfera unidad correspondiente a la dirección de la recta, para medir conjuntos de rectas se toma [1, p. 66], [2, p. 90] la integral extendida al conjunto que sea, de la forma diferencial

$$dG = dx\,dy\,d\Omega. \tag{20}$$

Por ejemplo, llamando n_1 al número de puntos de intersección de la recta G con una superficie de área F, este número n_1 dependerá de la posición de la recta, y extendiendo la integración a todas las posiciones de la misma se verifica [1, p. 69], [2, p. 89],

$$\int n_1\, dG = \pi F. \tag{21}$$

Consideremos la superficie formada por la suma de las superficies de los N corpúsculos, cuya área valdrá Nf, si f es el área de cada uno de ellos. Como G sólo puede tener con cada corpúsculo dos puntos de intersección, llamando n al número de corpúsculos que la recta G encuentra al atravesar K, la fórmula (21) da

$$\int\limits_{G.K\neq 0} n\, dG = \frac{\pi}{2} N f. \tag{22}$$

Por otra parte, la medida del conjunto total de las rectas que cortan a K es (también según (21) y siendo ahora F el el área de K)

$$\int\limits_{G.K\neq 0} dG = \frac{\pi}{2} F, \tag{23}$$

luego, dividiendo (22) por (23):

$$\bar{n} = N \frac{f}{F} \tag{24}$$

que nos da el *valor medio del número de corpúsculos que encontrará una recta arbitraria que atraviesa a K.*

2. Llamando s a la longitud de la cuerda que la recta G determina en K, es fácil ver, teniendo en cuenta (20) que [1, p. 77]

$$\int\limits_{G.K\neq 0} s\, dG = 2\pi V \tag{25}$$

siendo V el volumen de K. De (25) y (23), por división, obtenemos como valor medio de la longitud de la cuerda s:

$$\bar{s} = \frac{4V}{F}. \tag{26}$$

Dividiendo el número medio de corpúsculos que encuentra G por la longitud media (26) de la cuerda, se tendrá la densidad media δ_G de corpúsculos sobre la recta G que será

$$\delta_G = \frac{f}{4} D, \tag{27}$$

recordando que D es la densidad $\frac{N}{V}$ de los corpúsculos en K.

Esta es, por consiguiente, *la relación existente entre la densidad de corpúsculos sobre una recta que atraviesa el cuerpo y la densidad total en el mismo.*

Dividiendo, inversamente, (26) por (24), se obtendrá la *distancia media* entre los *corpúsculos vecinos,* que valdrá

$$\bar{d} = \frac{4}{fD}. \tag{28}$$

Al decir distancia media entre corpúsculos «vecinos» entendemos, como se deduce de la manera como obtenemos la fórmula (28), que se consideran únicamente las distancias de cada corpúsculo a aquellos que son visibles desde el mismo, es decir, que se pueden unir por un segmento que no encuentra a ningún otro corpúsculo intermedio.

Si los corpúsculos son esféricos de radio r, será

$$\bar{d} = \frac{1}{\pi r^2 D}. \tag{29}$$

Pólya, en el artículo ya citado [5], obtiene también esta fórmula que interpreta de la manera siguiente: supuesta una caída de nieve formada por copos esféricos de radio r con una densidad D, la distancia visible media según todas las direcciones desde un punto envuelto por la nevada, está dada por (29). (Ver el Apéndice § 3).

3. *Aplicación a la teoría cinética de los gases.* El mismo método anterior sirve para resolver el problema siguiente: Sea un cuerpo K de área F y volumen V que contiene en su interior N corpúsculos convexos e iguales entre sí. ¿Cuál será el recorrido libre medio de un punto sin dimensiones que se mueve dentro de K en dirección arbitraria (todas igualmente probables)?

Sea G la recta sobre la cual en un momento considerado se mueve el punto (fig. 1, aunque ahora estamos en el espacio, la figura 1 sirve lo mismo). Los recorridos libres posibles serán los segmentos de esta recta limitados por dos corpúsculos sucesivos o por un corpúsculo y la pared de K. Llamando como antes s a la cuerda total que G determina en K o sea $s = AB$ y s_i a las cuerdas parciales interiores a los corpúsculos, la suma de recorridos libres posibles sobre G es

$$s - \Sigma s_i,$$

extendida la sumación al número de corpúsculos que son cortados por la recta G. En cuanto al número de recorridos libres o sea de segmentos en que la cuerda s de G queda dividida por los corpúsculos y las paredes del recipiente, es $n+1$ siendo n, como antes, el número de corpúsculos cortados por G. Extendiendo la integración a todas las rectas que cortan a K, la fórmula (25) da:

$$\int_{G.K \neq 0} (s - \Sigma s_1)\, dG = 2\pi\,(V - Nv), \tag{30}$$

siendo v el volumen de cada corpúsculo. Además por la fórmula (21):

$$\int_{G.K \neq 0} (n+1)\, dG = \frac{\pi}{2}\,(F + Nf) \tag{31}$$

siendo f el área de cada corpúsculo y F la del cuerpo K.

El *valor medio de los recorridos libres* se obtendrá dividiendo su suma total (30) por el número de ellos (31) o sea

$$\bar{l} = \frac{4\,(V - Nv)}{F + Nf}. \tag{32}$$

En el caso de ser los corpúsculos esféricos de radio r esta fórmula queda

$$\bar{l} = \frac{4\,(V - \frac{4}{3}N\pi r^3)}{F + 4\pi r^2 N}. \tag{33}$$

Esta fórmula se puede aplicar al caso del recorrido medio de las moléculas de un gas. Para ello basta observar que hasta ahora hemos considerado el recorrido medio de un punto sin dimensiones, si se quiere que sea el de una molécula o corpúsculo de radio r bastará suponer que ella se reduce a un punto y todas las demás duplican el radio puesto que entonces cuando el punto toque a una de estas moléculas de radio doble, es efectivamente el caso en que las dos moléculas se encontrarían. Sustituyendo en la fórmula anterior r por $2r$ se tiene pues como recorrido libre medio de las moléculas de un gas la fórmula conocida (ver por ejemplo [4, p. 34]),

$$\bar{l} = \frac{4\,(V - b)}{F + 16\pi r^2 N} \tag{34}$$

indicando por b el volumen total de estas moléculas supuestas de radio $2r$.

En general para un gas a no mucha presión b y F son despreciables al lado de los demás términos de esta expresión y como valor aproximado se toma

$$\bar{l} = \frac{V}{4\pi r^2 N} = \frac{1}{4\pi r^2 D} \tag{35}$$

siendo D el número medio de moléculas por unidad de volumen.

4. *Caso de trayectorias curvas.* Recordando algunas fórmulas más de Geometría integral es fácil demostrar que el recorrido libre medio de un punto en el interior del cuerpo convexo K que contiene N corpúsculos distribuídos arbitrariamente es independiente de la forma de la trayectoria. Es decir, tiene el mismo valor dado por (32) lo mismo si la trayectoria es rectilínea, como allí se supuso, que si es circular o elíptica o cualquiera.

En efecto, supongamos que el punto debe moverse describiendo una trayectoria de forma arbitraria (pero siempre la misma) por ejemplo la representada por una curva cerrada C de longitud L (fig. 4).

Esta curva C (plana o alabeada) viene fijada en el espacio por seis coordenadas que pueden ser las tres x, y, z de uno de sus puntos, más las ϑ y φ de una dirección por este punto, más la τ de una rotación alrededor de esta dirección. Entonces es

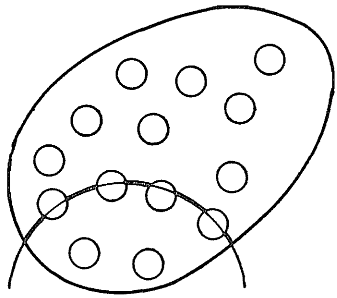

Fig. 4.

sabido que para medir un conjunto de posiciones de una tal línea se toma la integral de la llamada *densidad cinemática* que vale [1, p. 64], [6, p. 13],

$$dC = \cos\vartheta\, dx\, dy\, dz\, d\vartheta\, d\varphi\, d\tau. \tag{36}$$

Esta medida tiene la propiedad que la caracteriza de ser independiente de la posición de los ejes coordenados de referencia, o, en otras palabras, es invariante por movimientos.

Llamando n_1 al número de puntos de intersección de esta línea con las superficies de los N corpúsculos más la del cuerpo K que los contiene, vale [6, p. 39],

$$\int n_1\, dC = 4\pi^2 (F + N f)\, L \tag{37}$$

siendo como antes f el área de los corpúsculos y F la de K.

Luego si n es el número de partes, interiores a K y limitadas por dos corpúsculos o las paredes, en que c queda dividida, (fig. 4), como es $n_1 = 2n$, será

$$\int n\, dC = 2\,\pi^2 (F + N f)\, L. \tag{38}$$

Por otra parte, si s es la parte de C que en cada posición queda interior a K y Σs_i la suma de las partes interiores a los corpúsculos, se verifica [6, p. 42]

$$\int (s - \Sigma s_i)\, dC = 8\pi^2 (V - N v)\, L. \tag{39}$$

Dividiendo la longitud total (39) de las partes en que C queda dividida por los corpúsculos y paredes de K, por la suma del número de partes (38), se tendrá la *longitud media* de ellas o sea *el recorrido libre medio para un punto cuya trayectoria tuviera la forma de la línea* C, que será

$$\bar{l} = \frac{4(V - Nv)}{F + Nf}$$

que es el mismo valor (32) obtenido para el caso de las trayectorias rectilíneas.

5. *Secciones por un plano.* Veamos ahora la relación existente entre la densidad de corpúsculos en una sección plana arbitraria del cuerpo y la densidad total. Un plano viene determinado por tres parámetros que pueden ser: su distancia p a un punto fijo y la latitud y longitud ϑ y φ de la dirección de su normal. Para medir conjuntos de planos se toma la integral, extendida al conjunto de que se trate, de la forma diferencial [1, p. 66], [2, p. 92]

$$dE = dp\, d\Omega \tag{40}$$

siendo, como antes, $d\Omega$ el elemento de área sobre la esfera unidad correspondiente a la dirección normal al plano.

Supuestos como siempre N corpúsculos congruentes de área f, volumen v e integral de curvatura media m [3] repartidos arbitrariamente en el interior de K, si se representa por n el número de ellos que son cortados por un plano E que corta a K, es sabido [1, p. 102] que se verifica

(3) Recuérdese que se llama *integral de la curvatura media* a la integral $\frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) do$ extendida a toda la superficie del cuerpo siendo r_1 y r_2 los radios principales de curvatura correspondientes al elemento superficial do. Por ejemplo para un corpúsculo esférico de radio r sería $m = 4\pi r$. Si la superficie convexa tiene líneas de discontinuidad de la curvatura media, el valor que se debe atribuir a m es el límite de la curvatura media del cuerpo paralelo exterior a distancia ε cuando ε tiende a cero.

$$\int n\, dE = N\, m. \tag{41}$$

Por otra parte, la medida de todos los planos que cortan a K es [1, p. 72], [2, p. 95],

$$\int_{E.K \neq 0} dE = M \tag{42}$$

siendo M la curvatura media total de K. De (41) y (42) por división se deduce *el valor medio del número de corpúsculos que serán cortados por un plano dado al azar,* que será

$$\bar{n} = N \frac{m}{M}. \tag{43}$$

6. Llamando σ al área de la sección que el plano E determina en K es fácil deducir de la definición (40) que es [1, p. 74]

$$\int \sigma\, dE = 2\pi V \tag{44}$$

y dividiendo por (42), el *valor medio* de σ será:

$$\bar{\sigma} = 2\pi \frac{V}{M}. \tag{45}$$

Dividiendo el número medio (43) de corpúsculos que son cortados por E, por el valor medio (45) del área de la sección, se tendrá la *densidad media* de corpúsculos en las secciones de K por un plano arbitrario, que valdrá

$$\delta_E = \frac{mN}{2\pi V} = \frac{m}{2\pi} D \tag{46}$$

que relaciona *la densidad media de la sección con la densidad del conjunto.*

Si los corpúsculos son esféricos de radio r, es $m = 4\pi r$ y esta relación se reduce a

$$\delta_E = 2rD.$$

7. *Secciones por franjas paralelas.* Lo mismo dicho en el nº. 4 de § 1 para el caso del plano, se puede repetir para el espacio, suponiendo que se corta el cuerpo convexo K por una franja de espacio limitada por dos planos paralelos a distancia Δ. La posición de una de estas franjas queda determinada por la de un plano invariablemente unida a ella, de manera que como medida de un conjunto de franjas se toma la integral de la misma expresión diferencial (40) que ahora representaremos por

$$dB = dp\, d\Omega. \tag{47}$$

Llamando n al número de corpúsculos que en cada posición son alcanzados por la franja B, tiene lugar la fórmula [1, p. 101], [8],

$$\int n\, dB = (2\pi\Delta + m)\, N \tag{48}$$

siendo, como antes, m la curvatura media total de cada corpúsculo. Como además la medida total de las franjas que cortan a K es [7, p. 34],

$$\int_{B.K \neq 0} dB = M + 2\pi\Delta, \tag{49}$$

el *valor medio del número de corpúsculos que son alcanzados por un corte de anchura Δ dado al azar en el cuerpo K* será el cociente de (48) y (49) o sea

$$\bar{n} = \frac{2\pi\Delta + m}{2\pi\Delta + M}\, N. \tag{50}$$

8. Llamando v al volumen de la parte de K que queda interior a la franja B es [7, p. 35],

$$\int v\, dB = 2\pi\Delta V, \tag{51}$$

luego, según (49), el valor medio de este volumen valdrá

$$\bar{v} = \frac{2\pi\Delta V}{M + 2\pi\Delta}. \tag{52}$$

Dividiendo (50) por (52) se obtendrá el *valor medio de la densidad de corpúsculos en las secciones de K por B,*

$$\delta_B = \left(1 + \frac{m}{2\pi\Delta}\right) D, \tag{53}$$

poniendo, como siempre, $D = \frac{N}{V}$. *Esta es la relación que liga la densidad total D con la densidad media de las secciones.* Si los corpúsculos son esféricos de radio r es $m = 4\pi r$.

9. *Secciones por cilindros convexos.* Un cilindro convexo queda determinado en el espacio por la posición de una recta paralela a sus generatrices, más un giro alrededor de esta recta. Representando por G esta recta y por τ el giro, como medida de un conjunto de cilindros se toma la integral de la expresión [6, p. 45]

$$dZ = dG\, d\tau \tag{54}$$

siendo dG la expresión dada en (20).

Con esta definición se obtiene (4) que la medida de todos los cilindros congruentes que cortan a un cuerpo convexo K es [6, p. 46]

$$\int_{Z.K \neq 0} dZ = 2\pi\,(4\pi\sigma + \pi F + \lambda M) \tag{55}$$

siendo σ el área y λ el perímetro de la sección recta del cilindro Z y F y M el área y curvatura media de K respectivamente.

Además llamando n al número de corpúsculos encontrados por este cilindro al atravesar K, tiene lugar [1, p. 101], [8],

$$\int n\, dZ = 2\pi\,(\pi f + \lambda m + 4\pi\sigma)\, N \tag{56}$$

luego, *el valor medio del número de corpúsculos encontrados por un cilindro que atraviesa al azar el cuerpo K es*

---

(4) Aprovecho la oportunidad para corregir que en [6] pág. 46 y 52 en esta fórmula (55) y en la (58) falta en el segundo miembro el factor 2, como es fácil darse cuenta siguiendo el razonamiento allí empleado.

$$\bar{n} = \frac{(\pi f + \lambda m + 4\pi\sigma)}{\pi F + \lambda M + 4\pi\sigma} N. \tag{57}$$

10. Llamando v al volumen de la parte de K que queda interior a Z en cada posición es [6, p. 52]

$$\int v \, dZ = 8\pi^2 \sigma V \tag{58}$$

y teniendo en cuenta (55) el valor medio de este volumen v será

$$\bar{v} = \frac{4\pi\sigma V}{4\pi\sigma + \pi F + \lambda M}. \tag{59}$$

Dividiendo por este volumen medio el número medio (57) de corpúsculos, tendremos la densidad media de ellos

$$\delta_Z = \left(1 + \frac{\pi f + \lambda m}{4\pi\sigma}\right) D$$

que es *la relación que liga la densidad media de corpúsculos en las secciones de K por cilindros congruentes arbitrarios, con la densidad total en el interior de K.*

Si los corpúsculos son esféricos de radio r habrá que sustituir $f = 4\pi r^2$, $m = 4\pi r$.

§ 3. Apéndice

En § 1, nº. 3 y § 2, nº. 2 hemos identificado la *distancia media* entre dos corpúsculos vecinos con la *distancia visible media,* considerada por Pólya, desde un punto situado en el interior del espacio que contiene a los corpúsculos. Esta identificación es lícita considerando la manera como deben entenderse dichos valores medios y que se deduce de cómo han sido obtenidos en cada caso. En el camino seguido por Pólya, se empieza por considerar un segmento de longitud x que parte de un punto fijo y se calcula luego su longitud media suponiendo que todos los corpúsculos se colocan al azar. Ello equivale a buscar la longitud media de los segmentos que se pueden colocar en la región de los corpúsculos sin que corten a ninguno de ellos. En esta forma es claro que la longitud media obtenida debe resultar igual a la distancia media obtenida por nosotros.

El camino seguido por nosotros se generaliza sin dificultad a n dimensiones. Consideremos, en efecto, como densidad para medir conjuntos de rectas la forma diferencial $dG = dP_{n-1}\, d\omega_n$, siendo dP_{n-1} el elemento de volumen de un hiperplano normal a la recta y $d\omega_n$ el elemento de área sobre la esfera unidad del espacio de n dimensiones correspondiente a la dirección de la recta. Esta expresión de dG es la generalización inmediata de (2) y (20). La medida de las rectas que cortan a un cuerpo convexo K vale

$$\int_{G.K \neq 0} dG = \frac{1}{2} \int \sigma\, d\omega_n = \frac{1}{2} \varkappa_{n-1} F, \tag{60}$$

representando por σ el área de la proyección del cuerpo K en la dirección $d\omega_n$ y poniendo 1/2 por tratarse de rectas no orientadas; la segunda integración está extendida a toda la esfera unidad n-dimensional; F es el área de K y $\varkappa_{n-1}$ el volumen de la esfera unidad del espacio de $n-1$ dimensiones (5).

Por tanto, si f es el área de cada corpúsculo y N el número de ellos interiores al cuerpo convexo K, llamando n al número de corpúsculos cortados por la recta G en cada posición, será

$$\int n\, dG = \frac{1}{2} \varkappa_{n-1} N f. \tag{61}$$

El número de corpúsculos encontrados por una recta arbitraria será, pues, como siempre

$$\bar{n} = \frac{f}{F} N. \tag{62}$$

Por otra parte, llamando s a la longitud de la cuerda que G determina en K es

(5) Para esta fórmula (60) recordar la llamada fórmula de CAUCHY, por ejemplo en BONNESEN-FENCHEL, *Theorie der konvexen Körper*, Berlín, 1934, pág. 48.

$$\int\limits_{G.K=/=0} s\,dG = \frac{1}{2}\,\omega_n V \tag{63}$$

siendo ω_n el área de la esfera n-dimensional y V el volumen de K. De (63) y (60):

$$\bar{s} = \frac{\omega_n}{\varkappa_{n-1}}\,\frac{V}{F}. \tag{64}$$

Si esta longitud media la dividimos por el número medio de corpúsculos encontrados por la recta arbitraria, tendremos la *distancia media* buscada, que será

$$\bar{d} = \frac{\omega_n}{\varkappa_{n-1}}\,\frac{V}{fN}. \tag{65}$$

Si los corpúsculos son esféricos de radio r es $f = \omega_n r^{n-1}$ y poniendo como siempre $\frac{V}{N} = D$ resulta

$$\bar{d} = \frac{1}{\varkappa_{n-1}\, r^{n-1}\, D}. \tag{66}$$

El producto $\varkappa_{n-1} r^{n-1}$ es el volumen de la esfera de $n-1$ dimensiones de radio r. Esta fórmula (66) nos da pues *la distancia visible media desde un punto del espacio de n dimensiones supuesto rodeado por corpúsculos esféricos de radio r situados al azar*. Es fácil comprobar que (66) comprende como casos particulares a (12) y (29).

BIBLIOGRAFIA

[1] W. Blaschke, *"Vorlesungen über Integralgeometrie"* Hamburger Mathematische Einzelschriften. Nº 20-22. Leipzig und Berlin, 1936-37.

[2] R. Deltheil, *"Probabilités géométriques"* París 1926.

[3] E. Gaspar, *"Fórmulas integrales referentes a intersección de una figura plana con bandas variables"*. Publicaciones del Instituto de Matemáticas de la Facultad de Ciencias Matemáticas etc. de la Universidad N. del Litoral. Vol. II, nº 6, Rosario, 1940.

[4] L. B. LOEB, *"Kinetic Theory of Gases"* New York, 1927.
[5] G. PÓLYA, *"Zahlentheoretisches und Wahrscheinlichkeitstheoretisches über die Sichtweite im Walde"* Arch. der Math. und Phys. 27, p. 135-142 (1918).
[6] L. A. SANTALÓ, *"Integralgeometrie 5. Ueber das kinematische Mass im Raum"* Actualités scientifiques et industrielles nº 357. Hermann. París, 1936.
[7] » *"Geometria integral 7. Nuevas aplicaciones del concepto de medida cinemática en el plano y en el espacio"*. Revista de la Academia de Ciencias, Madrid, 1936.
[8] » *"Geometría integral 15. Fórmula fundamental de la medida cinemática para cilindros y planos paralelos móviles"*. Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hansischen Universität, 12, 1937.

Rosario, Julio 1943.

TEMAS PROPUESTOS

48. - Sea C un conjunto de puntos del plano, de medida M. Siendo A, B dos cualesquiera de sus puntos, se supone que la distancia entre ellos no es nunca de la forma $\sqrt{a^2+b^2}$, siendo a, b números enteros cualesquiera (no nulos a la vez). En estas condiciones, demostrar que es $M \leqq 1$.

L. A. Santaló

49. - La distinción entre espacios separables y perfectamente separables fué establecida por *Urysohn* (Math. Annalen, 94, 1925, p. 290), dando un ejemplo de espacio numerable y no perfectamente separable.

Se pide dar un ejemplo de espacio (V), no numerable, separable y no perfectamente separable.

¿El espacio anterior podrá ser accesible?

M. Balanzat