

# ALGUNOS VALORES MEDIOS Y DESIGUALDADES REFERENTES A CURVAS SITUADAS SOBRE LA SUPERFICIE ESFERICA

por L. A. SANTALÓ

## INTRODUCCIÓN

Supongamos la superficie esférica de radio uno y en ella inscrito uno cualquiera de los poliedros regulares convexos. Si trazamos los arcos de círculo máximo que unen los vértices consecutivos de tal poliedro, tendremos sobre la superficie de la esfera dibujada una *red uniforme*, es decir, tendremos descompuesta la superficie esférica en un cierto número de polígonos esféricos regulares e iguales. Por ejemplo, las figuras 1 y 2 representan respectivamente las redes derivadas del dodecaedro y del icosaedro.

Supuesta, sobre la superficie de la esfera, una curva  $\Gamma$  de longitud  $L$ , móvil sin deformación, en cada posición tendrá un cierto número  $n$  de puntos de intersección con la red anterior (por ej. en la fig. 1 es  $n=3$ ). Queremos hallar, en § 1, el *valor medio* de este número  $n$  y deducir de él algunas consecuencias.

Si consideramos únicamente los *vértices* de la red esférica tal como la hemos definido, y suponemos móvil sin deformación sobre la superficie de la esfera una figura cualquiera de área  $F$ , en cada posición contendrá en su interior un cierto número  $v$  de tales vértices. En § 2 hallamos el *valor medio* de este número  $v$ , junto con algunas consecuencias que de él derivan (1).

(1) Problemas análogos en el plano y en el espacio han sido estudiados en L. A. SANTALÓ, *Geometría integral 21. Sobre valores medios y probabilidades geométricas*, Hamburg. Abh. 13, 1939, y *Geometría integral de figuras limitadas*, Publicaciones del Instituto de Matemáticas de Rosario, vol. 1, Nº 2, 1939.

Ver también sobre cuestiones análogas en el plano los siguientes trabajos de H. HADWIGER, *Ueber Mittelwerte in Figurengittern*, Comm. Math. Helvetiae, 11, 1938-39. *Ueberdeckung ebener Bereiche durch Kreise und Qua-*

REVISTA MAT  
ESPANO-AM  
BIBLIOTECA DE MEXICO  
MAD

En § 3 damos unas condiciones suficientes para que una figura esférica convexa pueda contener totalmente en su interior a otra figura esférica también convexa, generalizando así sobre la esfera un resultado que H. HADWIGER obtuvo para las figuras planas.

En § 4 aplicamos los resultados de § 3 a la obtención de algunas acotaciones que mejoran la desigualdad isoperimétrica clásica  $L^2 + F^2 - 4\pi F \geq 0$  de las figuras esféricas.

### § 4.

1. *Fórmula de Poincaré sobre la superficie esférica.* Una curva, o en general una figura cualquiera susceptible de movimiento sin deformación sobre la superficie esférica, queda determinada por la posición de un punto  $\Omega$  invariablemente unido a la misma, más una rotación  $\tau$  alrededor de  $\Omega$ . Para medir un conjunto de posiciones de una misma figura o, lo que es lo mismo, un conjunto de figuras congruentes sobre la superficie esférica, se toma la integral, extendida al conjunto considerado, de la forma diferencial

$$dK_e = d\Omega d\tau \quad (i)$$

siendo  $d\Omega$  el elemento de área de la superficie esférica correspondiente al punto  $\Omega$ . La expresión  $dK_e$  se llama *densidad cinemática esférica*.

Si la figura móvil es una curva de longitud  $L$  y sobre la esfera existe otra curva fija de longitud  $L_0$ , llamando  $n$  al número de puntos de intersección de ambas curvas para cada posición de la primera, tiene lugar la siguiente fórmula, llamada de Poincaré,

$$\int n dK_e = 4LL_0. \quad (2)$$

Arate, Comm. Math. Helvetici, 13, 1941. *Gegenseitige Bedeckbarkeit zweier Eibereiche und Isoperimetrie*, Vierteljahrsschrift der Nat. Gess. Zürich, 86, 1941.

El origen de los trabajos referentes a cuestiones como las tratadas en § 1 y § 2 se remonta a E. BARBIER, *Note sur le problème de l'aiguille et le jeu du joint couvert*, Journal de Liouville, 2<sup>a</sup> Serie, 5, 1860.

La integración se puede considerar extendida, respecto  $\Omega$ , a toda la superficie esférica y, respecto  $\tau$ , de 0 a  $2\pi$ , siendo  $n=0$  cuando las dos curvas no tienen punto común.

Esta fórmula (2) es la única que necesitamos en este § 1 y que no demostramos, suponiéndola conocida (2).

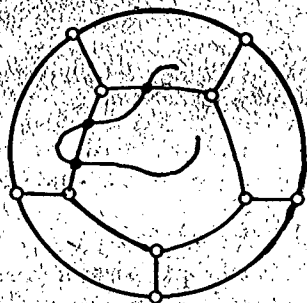


Fig. 1



Fig. 2

2. *Valor medio del número de puntos de intersección de una curva móvil con una red uniforme.* Supongamos dibujada sobre la superficie esférica una red uniforme tal como se ha definido en la Introducción. Representemos por  $d_c$  la longitud de los lados de las caras de la red (que son polígonos esféricos), indicando  $c$  ( $c=4, 6, 8, 12, 20$ ) el número de caras del poliedro regular que da origen a la red.

Sea  $K$  una curva de longitud  $L$  móvil sin deformación sobre la superficie. Para aplicar la fórmula (2) a esta curva  $K$  y a toda la red, observemos que la longitud de esta última es  $a_c d_c$  siendo  $a_c$  el número de aristas del poliedro regular de  $c$  caras. Es pues

$$\int n dK_c = 4 a_c d_c L. \quad (3)$$

Como la integración está extendida a toda la superficie esférica (cuya área es  $4\pi$  por suponer la esfera de radio unidad) respecto  $d\Omega$  y de 0 a  $2\pi$  respecto  $d\tau$ , es también

(\*) Para la definición anterior de densidad cinemática esférica y fórmula de Poincaré, ver W. BLASCHKE, *Vorl. über Integralgeometrie*, II. Hamburger Math. Einzelschriften, 1937, pág. 81.

$$\int dK_e = 8\pi^2. \quad (4)$$

Por tanto, por definición de valor medio se obtiene

$$\bar{n} = \frac{\int n dK_e}{\int dK_e} = \frac{L a_c d_c}{2\pi^2}.$$

Este es el valor medio buscado del número de puntos de intersección de la curva  $K$  con los lados de la red:

*Consecuencias.* I. Como el valor medio no puede ser superior a todos los valores posibles de  $n$ , ni tampoco inferior a todos ellos, se tiene:

*Sobre la superficie esférica de radio uno, toda curva de longitud  $L$  se puede colocar de tal manera que corte a la red esférica definida por el poliedro regular de  $c$  caras en un número de puntos igual o mayor que  $\frac{L a_c d_c}{2\pi^2}$  y también existe alguna posición en que corta a la misma red en un número de puntos igual o menor que el mismo cociente. Si este cociente no es entero, se puede sustituir por el entero superior más próximo en el primer caso y por el entero inferior más próximo en el segundo.*

II. Si  $\bar{n} < 1$  quiere decir que habrá posiciones en que  $n = 0$ , y por tanto:

*Una condición suficiente para asegurar que una curva esférica  $K$  puede colocarse en una posición tal que no tenga ningún punto común con una red uniforme de  $c$  caras, es que*

$$L < \frac{2\pi^2}{a_c d_c}.$$

III. Más general:

*Si una curva  $K$  no puede cortar a una red de  $c$  caras en más de  $n$  puntos, es  $\bar{n} \leq n$ , y por tanto*

$$L \leq \frac{2\pi^2 n}{a_c d_c} \quad (5)$$

Recíprocamente, si se cumple (5), existen posiciones de  $K$  en las cuales corta a la red en menos de  $n$  puntos.

§ 2.

1. *Valor medio del número de puntos cubiertos por una figura de área  $F$ .* Supongamos ahora que  $K$  es una figura de área  $F$ , no necesariamente convexa, y también móvil sin deformación sobre la superficie esférica de radio uno. Si  $\nu$  es el número de vértices de una red esférica que  $K$  contiene en su interior en una determinada posición (por ej. en la figura 2 es  $\nu = 1$ ), queremos hallar el *valor medio* de este número  $\nu$ .

Para ello observemos que la medida del conjunto de posiciones de  $K$  en las cuales contiene un punto fijo  $P$  es igual a  $2\pi F$ , pues para calcular  $\int dK_e$  extendida a todas las posiciones en las cuales  $P$  pertenece a  $K$ , se puede suponer primero fijo  $\tau$  (recordar (1)) y entonces la integral de  $d\Omega$  vale  $F$ , e integrar luego  $d\tau$  de 0 a  $2\pi$ . Si no se trata de un solo punto  $P$  sino que existe un número  $N$  de ellos sobre la superficie esférica, al integrar  $dK_e$  como acabamos de decir para cada punto, se obtiene en total  $2\pi FN$ , pero de esta manera las posiciones en las cuales  $K$  contiene  $\nu$  puntos vienen contadas  $\nu$  veces; en definitiva se puede escribir, por tanto,

$$\int \nu dK_e = 2\pi FN. \quad (6)$$

La integración, como siempre, se puede considerar extendida a todas las posiciones posibles de  $K$ , entendiéndose que es  $\nu = 0$  cuando no contenga ningún punto en su interior.

Siendo, como en § 1,  $\int dK_e = 8\pi^2$ , resulta como *valor medio* de  $\nu$  (cuando sobre la esfera existen  $N$  puntos en cualquier posición)

$$\bar{\nu} = \frac{\int \nu dK_e}{\int dK_e} = \frac{FN}{4\pi}. \quad (7)$$

Si los puntos fijos son los vértices de la red derivada del polígono regular de  $c$  caras, podremos poner  $\nu_c$  en lugar de  $N$ , indicando con  $\nu_c$  el número de vértices del poliedro regular de  $c$  caras.

Por las mismas razones que en § 1, se deduce:

*Consecuencias.* I. Una figura  $K$  de área  $F$  situada sobre la esfera de radio uno, siempre se puede colocar en una posición tal que contenga un número de vértices de la red definida por el poliedro regular de  $c$  caras, igual o mayor que  $\frac{F v_e}{4\pi}$ , y también en otra posición tal que el número de dichos puntos sea igual o menor que el mismo cociente. Si el cociente  $\frac{F v_e}{4\pi}$  no es entero, se puede sustituir por el entero superior más próximo en el primer caso y por el entero inferior más próximo en el segundo.

II. Si una figura  $K$  (que puede ser múltiplemente conexa, o bien compuesta de distintos pedazos, siempre que ellos conserven constante su posición relativa) no puede contener en su interior más de  $v$  vértices de una red, su área  $F$  cumple la limitación

$$F \leq \frac{4\pi v}{v_e} \quad (8)$$

Recíprocamente, si se cumple la desigualdad (8) se puede asegurar que hay alguna posición de  $K$  en la cual contiene menos de  $v$  puntos en su interior.

Análogamente, si la figura  $K$ , en cualquier posición contiene por lo menos  $v$  vértices de una red, su área  $F$  cumple

$$F \geq \frac{4\pi v}{v_e} \quad (9)$$

siendo, como siempre,  $v_e$  el número de vértices de la red.

### § 3.

1. Unas condiciones suficientes para que una figura esférica convexa pueda estar contenida en el interior de otra<sup>(3)</sup>.

(3) Un recinto esférico se llama *convexo* cuando su contorno no puede ser cortado por un círculo máximo en más de dos puntos. Una línea esférica cerrada y convexa divide a la superficie de la esfera en dos regiones: al decir recinto o figura convexa consideramos siempre aquella región que es igual o menor que una semiesfera.

H. HADWIGER ha obtenido condiciones *suficientes* para que un recinto plano convexo de área  $F$  y perímetro  $L$  pueda estar contenido totalmente en el interior de otro recinto convexo de área  $F_0$  y perímetro  $L_0$  (4).

Vamos a obtener unas condiciones análogas para el caso de figuras esféricas.

Sea  $F$  el área y  $L$  el perímetro de la figura convexa  $K$  y  $F_0, L_0$  los correspondientes valores para  $K_0$ . Considerando  $K$  fija sobre la superficie esférica de radio unidad y  $K_0$  móvil sobre la misma, la medida de todas las posiciones de  $K_0$  en las que tiene algún punto común con  $K$  (medida obtenida con la densidad cinemática (1)) es conocida y vale (5)

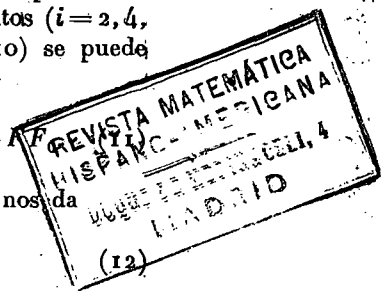
$$\int_{K \cdot K_0 \neq \emptyset} dK_e = 2\pi(F + F_0) + LL_0 - FF_0. \quad (10)$$

Esta medida comprende las posiciones en que una de las figuras,  $K$  o  $K_0$ , está totalmente contenida en la otra (cuya medida representaremos por  $M_0$ ), más la medida de las posiciones en que el contorno de  $K_0$  corta al de  $K$  en  $i$  puntos ( $i = 2, 4, 6, \dots$ ) que representaremos por  $M_i$ . Por tanto (10) se puede escribir (6).

$$M_0 + M_2 + M_4 + M_6 + \dots = 2\pi(F + F_0) + LL_0 - FF_0$$

Por otra parte, la fórmula de POINCARÉ (2), nos da

$$2M_2 + 4M_4 + 6M_6 + \dots = 4LL_0$$



(4) H. HADWIGER, *Ueberdeckung ebener Bereiche durch Kreise und Quadrate*, Comm. Math. Helvetici, 13, 1941. No hemos podido consultar directamente este trabajo de Hadwiger; conocemos únicamente la crítica del mismo aparecida en "Mathematical Reviews", vol. 3, 1942. Ignoramos, por tanto, si nuestra demostración para las figuras esféricas, que evidentemente tiene su análogo para el caso del plano, coincide o no, en tal caso, con la demostración de Hadwiger.

(5) W. BLASCHKE, *Vorl. über Integralgeometrie II*, pág. 82.

(6) Obsérvese que por ser  $K$  y  $K_0$  convexas, las posiciones en que  $i = 1, 3, 5, \dots$  tienen medida cero y no hay que considerarlas.

De (11) y (12) se deduce

$$M_0 - (M_4 + 2M_6 + 3M_8 + \dots) = 2\pi(F + F_0) - (FF_0 + LL_0).$$

Como todas las medidas  $M_i$  ( $i=0, 2, 4, 6, \dots$ ) son siempre positivas o nulas, de aquí se deduce que una condición suficiente para que existan posiciones en las cuales una de las dos figuras convexas  $K, K_0$  esté contenida totalmente en el interior de la otra (es decir, para que  $M_0 > 0$ ), es que

$$2\pi(F + F_0) - (FF_0 + LL_0) > 0. \quad (13)$$

De aquí se deduce, en consecuencia, que si dos figuras  $K$  y  $K_0$  son tales que ninguna de ellas pueda estar contenida en el interior de la otra debe ser

$$2\pi(F + F_0) - (FF_0 + LL_0) \leq 0. \quad (14)$$

En particular, tomando dos figuras iguales a  $K$ , esta desigualdad (14), nos da (haciendo  $F=F_0, L=L_0$ ) (\*)

$$L^2 \geq F(4\pi - F), \quad (15)$$

o bien, tomándolas ambas iguales a  $K_0$ :

$$L_0^2 \geq F_0(4\pi - F_0). \quad (16)$$

Como estas desigualdades (15) y (16) son válidas cualesquiera que sean  $K$  y  $K_0$ , se deduce que para cualquier par de figuras esféricas convexas, vale siempre

$$L^2 L_0^2 \geq FF_0(4\pi - F)(4\pi - F_0). \quad (17)$$

Esta desigualdad (17) nos va a permitir afinar más la condición (13). En efecto, la desigualdad (13) deja sin establecer cuál de las dos figuras  $K, K_0$  es aquella que está con-

(\*) Se observa que la desigualdad (15) es la clásica desigualdad isoperimétrica para figuras esféricas. La demostración dada, que aquí necesitamos solo de paso, es en el fondo la de BLASCHKE, *Vorl. Integralgeom.* II, pág. 83.



tenida en la otra. Queremos, más concretamente, escribir una condición suficiente para asegurar que  $K$  está contenida en  $K_0$ .

Para ello observemos la desigualdad

$$LL_0 - F(4\pi - F_0) > \sqrt{L^2 L_0^2 - FF_0(4\pi - F)(4\pi - F_0)} \quad (18)$$

cuya expresión subradical es siempre positiva o nula, según (17).

Si esta desigualdad (18) se cumple, se cumplirá también (13) y por tanto una de las dos figuras  $K$ ,  $K_0$  puede estar contenida en la otra. Vamos a demostrar, además, que la realización de (18) implica que  $F < F_0$ , con lo cual ya será seguro que es  $K$  la figura que puede estar contenida en  $K_0$ . En efecto, de (13) (que es consecuencia de 18)) se deduce

$$LL_0 < 2\pi(F + F_0) - FF_0. \quad (19)$$

Si fuera  $F \geq F_0$ , según (19), sería  $LL_0 < (4\pi - F_0)F$  y por lo tanto (18) no podría verificarse por ser el segundo miembro esencialmente positivo o nulo.

En lugar de (18) se puede también considerar

$$F_0(4\pi - F) - LL_0 > \sqrt{L^2 L_0^2 - FF_0(4\pi - F)(4\pi - F_0)}. \quad (20)$$

Esta desigualdad tiene como consecuencia (13) y además exige también que sea  $F < F_0$ . En efecto, si fuera  $F \geq F_0$ , de la desigualdad (17) se deduciría

$$L^2 L_0^2 \geq F_0^2 (4\pi - F)^2$$

o sea  $LL_0 \geq F_0(4\pi - F)$ , con lo cual, por la misma razón de antes, (20) no podría realizarse, por resultar el primer miembro negativo o nulo.

En definitiva, la condición (13) se puede puntualizar con las desigualdades (18) y (20), las cuales, cambiando un poco la estructura, permiten enunciar, sobre la esfera de radio unidad:

*Condiciones suficientes para afirmar que la figura convexa  $K$  puede estar contenida en el interior de la figura convexa  $K_0$ , son que se realice una de las dos condiciones:*

$$\frac{L L_0 - \sqrt{L^2 L_0^2 - F F_0 (4\pi - F) (4\pi - F_0)}}{F (4\pi - F_0)} > 1. \quad (21)$$

o bien

$$\frac{L L_0 + \sqrt{L^2 L_0^2 - F F_0 (4\pi - F) (4\pi - F_0)}}{F_0 (4\pi - F)} < 1. \quad (22)$$

2. *Casos particulares.* I. Si consideramos el caso en que  $K_0$  es un círculo de radio esférico  $R$  ( $\leq \frac{\pi}{2}$ ), es

$$L_0 = 2\pi \operatorname{sen} R, \quad F_0 = 2\pi (1 - \cos R) \quad (23)$$

y las condiciones (21) y (22) se escriben, después de simples transformaciones,

$$L - F \cot \frac{R}{2} > \sqrt{L^2 - F (4\pi - F)} \quad (23)$$

y

$$(4\pi - F) \operatorname{tang} \frac{R}{2} - L > \sqrt{L^2 - F (4\pi - F)} \quad (24)$$

Luego:

*Para que una figura convexa esférica  $K$  situada sobre la esfera de radio unidad pueda estar contenida totalmente en el interior de un círculo menor de radio esférico  $R$ , es suficiente que se cumpla una cualquiera de las condiciones (23), (24).*

II. *Paso al caso del plano.* Las condiciones suficientes (21) y (22) se refieren al caso de figuras esféricas convexas situadas sobre la esfera de radio uno. Si se trata de figuras situadas sobre la esfera de radio  $\rho$ , bastará escribir las mismas condiciones (21) y (22) para las figuras obtenidas proyectando las figuras dadas, desde el centro de la esfera, sobre la esfera de radio uno. Bastará, por tanto, sustituir  $L, L_0, F, F_0$  por  $\frac{L}{\rho}, \frac{L_0}{\rho}, \frac{F}{\rho^2}, \frac{F_0}{\rho^2}$  respectivamente. Escritas (21) y (22) de esta manera y haciendo tender  $\rho$  a infinito, para pasar al caso del plano como límite de una esfera cuyo radio crece infinitamente, se obtienen las condiciones

$$\frac{LL_0 - \sqrt{L^2 L_0^2 - 16 \pi^2 F F_0}}{4 \pi F} > 1,$$

$$\frac{LL_0 + \sqrt{L^2 L_0^2 - 16 \pi^2 F F_0}}{4 \pi F_0} < 1,$$

que son las condiciones suficientes obtenidas por HADWIGER<sup>(8)</sup> para que la figura plana y convexa  $K$  de área  $F$  y perímetro  $L$  pueda estar contenida en el interior de la figura convexa  $K_0$  de área  $F_0$  y perímetro  $L_0$ .

#### § 4.

1. *Desigualdades isoperimétricas sobre la esfera.* Si en lugar de escribir las condiciones (23) y (24) suficientes para que la figura  $K$  pueda estar contenida en el interior del círculo de radio  $R$  queremos escribir de manera análoga las condiciones suficientes para que un círculo de radio esférico  $r$  pueda estar contenido en el interior de  $K$ , de las desigualdades (21) y (22) se obtiene

$$F \cot \frac{r}{2} - L > \sqrt{L^2 - F(4\pi - F)} \quad (25)$$

$$L - (4\pi - F) \tan \frac{r}{2} > \sqrt{L^2 - F(4\pi - F)}. \quad (26)$$

Supongamos que sea  $R$  el máximo de los radios de los círculos que no pueden contener a  $K$  en su interior y  $r$  el mínimo de los radios de aquellos que no pueden estar contenidos en la misma  $K$ .

Según esta definición, para estos valores de  $R$  y  $r$ , no puede verificarse ninguna de las desigualdades (23), (24), (25), (26). Por tanto, llamando para abreviar

$$\Delta = L^2 - F(4\pi - F) = L^2 + F^2 - 4\pi F$$

se tendrá, según (23),

$$\sqrt{\Delta} \geq L - F \cot \frac{R}{2}$$

y también

$$\sqrt{\Delta} \geq F \cot \frac{R}{2} - L$$

puesto que si se verificase la desigualdad contraria, según (25), la figura  $K$  podría contener en su interior al círculo de radio  $R$ , lo cual no es posible. De estas desigualdades se deduce

$$(a) \quad \Delta \geq \left( L - F \cot \frac{R}{2} \right)^2,$$

y análogamente, de (24), (25) y (26) se deduce también

$$(b) \quad \Delta \geq \left( (4\pi - F) \tan \frac{R}{2} - L \right)^2,$$

$$(c) \quad \Delta \geq \left( F \cot \frac{r}{2} - L \right)^2, \quad (27)$$

$$(d) \quad \Delta \geq \left( L - (4\pi - F) \tan \frac{r}{2} \right)^2.$$

La expresión  $\Delta$  es lo que se llama «déficit isoperimétrico» para las figuras convexas situadas sobre la esfera de radio unidad<sup>(9)</sup> y las desigualdades (27) nos dan algunas acotaciones mejoradas de la desigualdad isoperimétrica clásica  $L^2 + F^2 - 4\pi F \geq 0$ .

Aplicando la relación

$$x^2 + y^2 \geq \frac{1}{2} (x + y)^2,$$

(\*) Ver *loc. cit.* en (\*); además H. HADWIGER, *Gegenseitige Bedeckbarkeit zweier Eibereiche und Isoperimetrie*, Vierteljahrssch. der Nat. Gess. Zürich, 86, (1941), pág. 153.

(9) Sobre el problema de la isoperimetria sobre la esfera ver, por ejemplo, T. BONNESEN, *Les Problemes des isopérimètres et des isopéripheanes*, Gauthier-Villars, Paris 1929, pág. 80. Para bibliografía ver BONNESEN-FENCHEL, *Theorie der konvexen Körper*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Berlin, 1934, pág. 113.

las desigualdades (a) y (c) nos dan

$$\Delta \geq \frac{1}{4} F^2 \left( \cot \frac{r}{2} - \cot \frac{R}{2} \right)^2 \quad (28)$$

y las (b), (d)

$$\Delta \geq \frac{1}{4} (4\pi - F)^2 \left( \tan \frac{R}{2} - \tan \frac{r}{2} \right)^2 \quad (29)$$

Análogamente, sumando (a), (b) y (c), (d) respectivamente, se obtienen las nuevas acotaciones

$$\Delta \geq \left( 2\pi \tan \frac{R}{2} - \frac{F}{\sin R} \right)^2, \quad \Delta \geq \left( \frac{F}{\sin r} - 2\pi \tan \frac{r}{2} \right)^2. \quad (30)$$

Todas estas desigualdades (27), (28), (29), (30) son nuevas acotaciones para el «déficit isoperimétrico». Al pasar al plano como caso límite de una esfera cuyo radio crece infinitamente (tal como se hizo en § 3, caso particular II) ellas dan acotaciones conocidas para el déficit isoperimétrico de figuras planas.

Rosario, Instituto de Matemáticas, abril de 1942.



### TEMA PROPUESTO

38. - Demostrar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-n} \left( 1 + n + \frac{n^2}{2!} + \frac{n^3}{3!} + \dots + \frac{n^{n-1}}{(n-1)!} \right) = \frac{1}{2}.$$

S.