Revista de la
Unión Matemática Argentina
Volumen 25, 1970.

# PROBABILIDADES SOBRE CUERPOS CONVEXOS Y CILINDROS

por L.A.Santaló

*Dedicado al Profesor Alberto González Domínguez*

SUMMARY. H. GIGER and H. HADWIGER [2] and R.E. MILES [3] have recently considered different questions related to lattices of figures (convex bodies, r-flats or convex cylinders) in $E_n$. These lattices are assumed generated by N independent figures which intersect a fixed sphere S of radius R as R and N tends to $\infty$ in such a way that N/R tends to a positive constant, called the density of the lattice. In this paper we prove:

a) The result does not change if instead of the sphere S we consider a convex body of arbitrary shape, which expands to the whole space $E_n$; this is a consequence of our Lemma 2.

b) This result is applied to Theorem 1 (distribution function (3.4) of the number of cylinders of a lattice which are intersected by a convex body $K_0$ placed at random in space), which is essentially due to MILES [3] with different proof.

c) Theorem 2 refers to lattices of convex cylinders in $E_3$ crossed by an arbitrary convex cylinder and we find the distribution function (4.6) of the number of intersected cylinders.

1. INTRODUCCION Y FORMULAS FUNDAMENTALES. Todo cuerpo convexo $K_n$ del espacio euclideano n-dimensional $E_n$ tiene asignadas sus *proyecciones medias* $W_i(K_n)$ $(i=1,2,\ldots,n-1)$. Estos invariantes fueron introducidos por Minkowski y reciben distintos nombres: en alemán se llaman *Quermassintegrale*, en francés *travers exterieurs*, en inglés, a veces *mean cross sectional measures* y también *Quermassintegrals*. Un estudio de los mismos puede verse en la clásica obra de BONNESEN-FENCHEL [1] .

Los valores extremos de las proyecciones medias son

$$(1.1)\qquad \begin{aligned} W_0(K_n) &= V = \text{volumen de } K_n\,, \\ nW_1(K_n) &= F = \text{área de } K_n\,, \\ nW_{n-1}(K_n) &= B = \text{norma o anchura media de } K_n \end{aligned}$$

$W_n(K_n) = \kappa_n$ = volumen de la esfera unidad de $E_n$,
o sea,

$$\kappa_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(1+\frac{n}{2})}$$

donde $\Gamma$ es la función "gamma" que tiene la propiedad de recurrencia $\Gamma(h+1) = h\Gamma(h)$.

Para una esfera de radio R de $E_n$ , las proyecciones medias valen

(1.2) $$W_i(\text{esfera}) = \kappa_n R^{n-i}$$

Para n = 3 , es

(1.3) $$W_0 = V \;,\; W_1 = F/3 \;,\; W_2 = M/3 \;,\; W_3 = (4/3)\pi$$

donde M es la anchura media de $K_3$, que si $\partial K_3$ es de clase $C^2$ coincide con la integral de curvatura media de $K_3$ .

Para el plano, n = 2, es

(1.4) $$W_0 = f \;,\; W_1 = u/2 \;,\; W_2 = \pi$$

donde f es el área de la figura convexa plana y u su perímetro.

Sea $L_{n-p}$ un subespacio lineal de dimensión n-p de $E_n$ y sea $K_{n-p}$ un cuerpo convexo contenido en $L_{n-p}$. Supondremos siempre que se trata de cuerpos convexos acotados, de manera que los invariantes $W_i$ son todos finitos.

DEFINICION 1. Llamaremos *cilindro* $Z_p$ de sección recta $K_{n-p}$ al conjunto de los subespacios lineales $L_p$ que son ortogonales a $L_{n-p}$ en los puntos de $K_{n-p}$.

El número p = 1,2,...,n-1 se llama el rango del cilindro $Z_p$ y es igual a la dimensión de sus generatrices.

DEFINICION 2. Llamaremos *proyecciones medias* $W_i'(Z_p)$ de $Z_p$ a las proyecciones medias $W_i$ de la sección recta $K_{n-p}$ considerada como cuerpo convexo de $L_{n-p}$.

El acento indica, precisamente, que $K_{n-p}$ debe considerarse como un cuerpo convexo de $L_{n-p}$, no como un cuerpo convexo aplastado de $E_n$. Por tanto, para $W'_i(Z_p)$ sólo hay las posibilidades $i = 1,2,\ldots$ $\ldots,n-p$, siendo $W'_0(Z_p)$ el volumen de la sección recta de $Z_p$ y $W'_{n-p}(Z_p) = \kappa_{n-p}$.

Supongamos ahora un conjunto de cilindros congruentes con $Z_p$. La densidad para medir conjuntos de cilindros congruentes, invariante con respecto al grupo de los movimientos de $E_n$, es

$$dZ_p = d\vec{L}_p \wedge dK_{n-p\,[0]} \tag{1.5}$$

donde $dL_p$ es la densidad para subespacios lineales de dimensión p, referente a un subespacio generatriz de $Z_p$ y $dK_{n-p\,[0]}$ es la densidad cinemática en el espacio ortogonal $L_{n-p}$ alrededor del punto O en que se cortan $L_{n-p}$ y $L_p$. La flecha sobre $L_p$ indica que este subespacio debe considerarse orientado. Esta densidad se encuentra en [4] para $n = 3$, $p = 1$ y la generalización a $E_n$ no ofrece dificultades (ver también MILES [3]).

Con la densidad (1.5) la llamada fórmula fundamental para cilindros, que da la medida del conjunto de cilindros $Z_p$ que tienen punto común con un cuerpo convexo fijo K se escribe (ver [4] para $n = 3$)

$$m(Z_p; Z_p \cap K \neq \phi) = n(n-1)\ldots(p+1)\kappa_{n-1}\ldots\kappa_{p+1} \sum_{i=p-1}^{n-1} \binom{n-p}{i-p+1} W_{i+1}(K)\, W'_{n-1-i}(Z_p) \tag{1.6}$$

Como ejemplos de esta fórmula, consideremos los casos posibles de $E_3$.

1. $n = 3$, $p = 1$. Resulta

$$m(Z_2; Z_2 \cap K \neq \phi) = 2\pi(\pi F + uM + 4\pi f) \tag{1.7}$$

2. $n = 3$, $p = 1$

$$m(Z_1; Z_1 \cap K \neq \phi) = 2M + 4\pi a. \tag{1.8}$$

En este último caso, $Z_1$ es una banda de planos paralelos a distancia $\underline{a}$.

2. DOS LEMAS. En los trabajos referentes a conjuntos de cuerpos convexos o de subespacios lineales o de cilindros distribuídos al al azar, con ley uniforme, en $E_n$, lo que se hace siempre es:

a) Considerar un conjunto de N cuerpos convexos o espacios lineales o cilindros que cortan a un cuerpo convexo fijo dado K;

b) Suponer luego que K crece de tamaño hasta cubrir todo $E_n$, al mismo tiempo que también N crece, de manera que entre N y una característica de K (el volumen, el área o cualquiera de las $W_i(K)$) exista una relación constante $\neq 0$, $\infty$ que se llama la *densidad* en $E_n$ de las figuras geométricas consideradas.

En general, por simplicidad, se toma que K sea una esfera, pero cabe la duda de si, partiendo de otra familia de cuerpos convexos, se hubiera llegado o no al mismo resultado. Es decir, queda la duda de saber si se puede hablar de una "red de figuras" (cuerpos convexos, r-espacios o cilindros) o si debe especificarse la manera como esta red fué generada a partir de un cuerpo convexo K que crece a todo el espacio.

En los casos considerados por GIGER-HADWIGER [2] y MILES [3] el resultado es independiente de K y por tanto está justificado que esos autores tomen una n-esfera cuyo radio crece hasta infinito. Pero falta la demostración, que vamos a dar aquí. Para ello necesitamos dos lemas.

LEMA 1. *Sea* R *el radio de la esfera máxima contenida en un cuerpo convexo* K *de* $E_n$. *Vale entonces la desigualdad*

$$W_0(K) > R\, W_1(K) \tag{2.1}$$

*Demostracion.* Puesto que $W_0(K)$ es el volumen de K, llamando h a la función de apoyo respecto del centro de la esfera máxima contenida en K y $d\sigma$ el elemento de área en el punto de contacto, es

$$W_0(K) = \frac{1}{n}\int_{\partial K} h\, d\sigma \,. \tag{2.2}$$

Pero en cualquier dirección es $R < h$, de donde, teniendo en cuenta que $W_1(K) = F/n$, resulta (2.1).

LEMA 2. *Sea* $K(t)$ *una familia de cuerpos convexos de* $E_n$ $(0 < t < \infty)$ *tales que:*

i) *Para* $t_1 < t_2$ *es* $K(t_1) \subset K(t_2)$ ;

ii) *Para cualquier punto* P *de* $E_n$, *existe un* $t_p$ *tal que, para todo* $t > t_p$ *es* $P \in K(t)$.

*La última condición indica que* $K(t)$ *tiende a llenar todo el espacio para* $t \to \infty$. *Con estas condiciones es*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{W_{i+1}(K(t))}{W_i(K(t))} = 0 \tag{2.3}$$

*para* $i = 0,1,\ldots,n-1$, *cualquiera que sea* $K(t)$.

*Demostración:* Pongamos $W_i^{(n)}$ en vez de $W_i(K)$ para poner de manifiesto la dimensión n del espacio que contiene K. Supongamos que proyectamos ortogonalmente K sobre un hiperplano $L_{n-1}$ y sea $dO_{n-1}$ el elemento de área de la esfera unidad de $E_n$ correspondiente a la dirección de proyección. Obtenemos así el cuerpo convexo proyectado $K_{n-1}$ cuyas proyecciones medias representamos por $W_i^{(n-1)}$. Dentro de $L_{n-1}$ proyectamos $K_{n-1}$ ortogonalmente sobre un $L_{n-2}$ según la dirección definida por $dO_{n-2}$, obteniendo un nuevo cuerpo convexo cuyas proyecciones medias representamos por $W_i^{(n-2)}$. Procediendo sucesivamente, para cada r, q $(r \geq q)$ vale la siguiente fórmula (generalización de una clásica fórmula de KUBOTA)(ver [5]

$$W_r^{(n)} = \frac{n-q}{nO_{n-2}\cdots O_{n-q-1}} \int W_{r-q}^{(n-q)}\, dO_{n-1} \wedge \ldots \wedge dO_{n-q} \tag{2.4}$$

donde $O_i$ indica el área de la esfera i dimensional, o sea está relacionada con los $\kappa_i$ por la igualdad $O_{i-1} = i\,\kappa_i$ .

Apliquemos (2.4) a $r = r$ , $q = r$ y a $r = r+1$ , $q = r$. Resulta

$$W_r^{(n)} = \frac{n-r}{nO_{n-2}\cdots O_{n-r-1}} \int W_0^{(n-r)}\, dO_{n-1} \wedge \ldots \wedge dO_{n-r} \tag{2.5}$$

$$W_{r+1}^{(n)} = \frac{n-r}{nO_{n-2}\cdots O_{n-r-1}} \int W_1^{(n-r)}\, dO_{n-1} \wedge \ldots \wedge dO_{n-r} \tag{2.6}$$

ı desigualdad (2.1) da

2.7) $$W_0^{(n-r)} \geq R\, W_1^{(n-r)}$$

onde R es el radio de la esfera máxima, de dimensión n-r, conte-
ida en $K_{n-r}$.

i $R_n$ es el radio de la máxima esfera n-dimensional contenida en
. es $R_n \leq R$ y por tanto vale también

$$W_0^{(n-r)} \geq R_n W_1^{(n-r)}$$

e aquí y de (2.5), (2.6) resulta

$$W_r^{(n)} \geq R_n\, W_{r+1}^{(n)}$$

puesto que $R_n \to \infty$ cuando K(t) crece hasta llenar todo el espa-
io (o sea, cuando $t \to \infty$), resulta (2.3).

l *caso* $n = 3$. Consideremos en particular el caso del espacio or
inario de 3 dimensiones. Las relaciones (2.3) se escriben

2.8) $$\frac{M}{V} \to 0 \quad , \quad \frac{M}{F} \to 0 \quad , \quad \frac{4\pi}{3M} \to 0$$

iendo la última trivial.

abe considerar qué sucede con los cocientes $F^{3/2}/V$ , $FM/V$ , $M^3/V$,
ara $t \to \infty$ Las clásicas desigualdades isoperimétricas dan

2 9) $$\frac{F^{3/2}}{V} \geq 6\sqrt{\pi} \quad , \quad \frac{M\,F}{V} \geq 12\,\pi \quad , \quad \frac{M^3}{V} \geq 48\,\pi^2 .$$

n cambio *no existe una acotación superior*. Consideremos por e-
jemplo un paralelepípedo recto cuya base sea un cuadrado de lado
a y la altura sea b. Es

$$V = a^2 b \quad , \quad F = 2\,a^2 + 4\,a\,b \quad , M = 2\pi\,a + \pi\,b .$$

Supongamos que $a \to \infty$ y $b = \lambda\, a$ ($\lambda$ = constante). Resulta

$$\frac{F^{3/2}}{V} = \frac{(2+4\lambda)^{3/2}}{\lambda} , \quad \frac{M\,F}{V} = \frac{(2+4\lambda)(2+\lambda)\pi}{\lambda} , \quad \frac{M^3}{V} = \frac{(2\pi+\lambda\pi)^3}{\lambda}$$

y estos valores pueden ser tan grandes como se quiera tomando $\lambda$ suficientemente pequeño.

## 3. CUERPOS CONVEXOS EN UNA RED DE CILINDROS.

Sea $K = K(t)$ un cuerpo convexo de $E_n$ y supongamos que contiene en su interior otro cuerpo convexo $K_0$. Se dan $N$ cilindros $Z_p$ al azar (vale decir, con la densidad (1.5)), independientes, que cortan a $K(t)$. ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente $r$ de ellos corten a $K_0$?.

La solución es inmediata, a saber,

$$P_r = \binom{N}{r} p^r (1-p)^{N-r} \tag{3.1}$$

siendo

$$p = \frac{m(Z_p ; Z_p \cap K_0 \neq \phi)}{m(Z_p ; Z_p \cap K \neq \phi)} \tag{3.2}$$

donde el numerador y el denominador están dados por la fórmula (1.6).

Supongamos ahora que $K(t)$ sea una familia de cuerpos convexos en las condiciones del Lema 2 y hagamos $t \to \infty$ , al mismo tiempo que $N \to \infty$ , de manera tal que

$$\frac{N\, W_0'(Z_p)}{W_p(K)} \to D \tag{3.3}$$

siendo $D$ una constante positiva, que llamaremos la *densidad* de los cilindros $Z_p$ en $E_n$.

Sustituyendo la expresión (1.6) en (3.2), haciendo $t \to \infty$ y teniendo en cuenta (2.3) y también que $W_{n-p}'(Z_p) = \kappa_{n-p}$ , resulta, en el límite

$$(3.4) \qquad P_r^* = \frac{1}{r!} \left( \frac{D\,\Sigma}{\kappa_{n-p}\; W_0'(Z_p)} \right) \exp\left( - \frac{D\,\Sigma}{\kappa_{n-p}\; W_0'(Z_p)} \right)$$

donde

$$(3.5) \qquad \Sigma = \sum_{i=p-1}^{n-1} \binom{N-p}{i-p+1} W_{i+1}(K_0)\; W_{n-1-i}'(Z_p)$$

Por consiguiente:

TEOREMA 1. *Dada en* $E_n$ *una red de cilindros convexos* $Z_p$ *colocados al azar e independientemente unos de otros con densidad* D, *el número de cilindros cortados por un cuerpo convexo de prueba* $K_0$ *colocado al azar en el espacio, sigue una distribución de Poisson de parámetro*

$$\lambda = \frac{D\,\Sigma}{\kappa_{n-p}\; W_0'(Z_p)}$$

En consecuencia, el número medio de cilindros que son cortados por $K_0$ es

$$E(r) = \lambda$$

## 4. REDES DE CILINDROS EN $E_3$ .

Queremos considerar ahora el caso en que, en vez de $K_0$, tenemos otro cilindro $Z_q$, es decir, queremos buscar la distribución del número de intersecciones de un cilindro de prueba $Z_q$ con los cilindros de una red que cubre el espacio con densidad D. Los resultados son un poco complicados para el caso general de $E_n$ por lo cual nos vamos a limitar al caso de $E_3$ y de cilindros convexos propiamente dichos.

Sea K un cuerpo convexo fijo de área F y curvatura media (o proyección media) M. Sea $Z_0$ un cilindro que corta a K y sea $f_0$ el área y $u_0$ el perímetro de la sección recta de $Z_0$. Exceptuando posiciones del contorno que no van a influir en el límite, podemos suponer que la intersección $Z_0 \cap K$ es un cilindro limitado, de área $2f_0+au_0+\epsilon$ y proyección media (o curvatura media) $\pi a+(\pi/2)u_0+\epsilon$, siendo $\underline{a}$ la longitud de un segmento de generatriz contenido en K e indicando con $\epsilon$ cantidades (diferentes) tales que $\epsilon/a \to 0$ para $a \to \infty$ .

La medida de los cilindros $Z_1$ (cuya sección recta tenga por área $f_1$ y perímetro $u_1$) que cortan a $Z_0 \cap K$, según (1.7) vale

$$(4.1) \quad m(Z_1;Z_1 \cap Z_0 \cap K \neq \phi) = 8\pi^2 f_1+2\pi^2(2f_0+au_0)+2\pi u_1(a\pi+(\pi/2)u_0)+\epsilon.$$

La medida de los $Z_1$ que cortan a K es

$$(4.2) \qquad m(Z_1;Z_1 \cap K \neq \phi) = 8\pi^2 f_1 + 2\pi^2 F + 2\pi u_1 M$$

y por tanto: *la probabilidad de que $Z_1$, supuesto dado al azar con la densidad uniforme $dZ_1$, corte a $Z_0 \cap K$ sabiendo que corta a K vale*

$$(4.3) \qquad p = \frac{4\pi^2 f_1 + \pi^2(2f_0 + a\, u_0) + \pi\, u_1(\pi a + (\pi/2)u_0) + \epsilon}{4\pi^2 f_1 + \pi^2 F + \pi\, u_1 M}$$

Si suponemos N cilindros congruentes con $Z_1$, independientes, que cortan a K, la probabilidad de que r de ellos corten a $Z_0 \cap K$ está dada por

$$P_r = \binom{N}{r} p^r (1 - p)^{N-r}$$

Supongamos ahora que K es una esfera de centro un punto fijo O, cuyo radio R crece hacia infinito, al mismo tiempo que el número N de cilindros que cortan a K también crece de manera tal que

$$(4.4) \qquad \frac{N}{4\pi R} \to D\,.$$

siendo D una constante positiva. Diremos entonces que se tiene en $E_3$ una red de cilindros $Z_1$ de densidad D. Recordemos que para una esfera de radio R es $F = 4\pi R^2$ , $M = 4\pi R$.

Si h es la distancia de O al cilindro $Z_0$ , es $(a/2)^2 = R^2 - h^2 +$ y por tanto

$$a = R\,(1-(h/R)^2)^{1/2} + \varepsilon \tag{4.5}$$

es decir, se cumple $a/R \to 1$, cualquiera que sea la posición fija de O (o sea, cualquiera que sea h). Sustituyendo (4.4) y (4.5) en la expresión de $P_r$ y haciendo $N \to \infty$ resulta, en el límite

$$P_r^* = \frac{(u_0+u_1)^r\, D^r}{r!}\, \exp(-(u_0+u_1)D) \tag{4.6}$$

Es decir:

TEOREMA 2. *Supuesta en el espacio* $E_3$ *una red de cilindros convexos* $Z_1$ *distribuídos al azar con densidad* D, *el número de cilindros que son intersecados por un cilindro convexo* $Z_0$, *sigue una distribución de Poisson de parámetro*

$$\lambda = (u_0 + u_1)\, D\ .$$

Se observa que solamente intervienen los perímetros de las secciones rectas de los cilindros, no las áreas.

BIBILIOGRAFIA

[1] BONNESEN, T. - FENCHEL, W., *Theorie der konvexen Korper*, Ergebnisse der Mathematik, Berlín, 1934.

[2] GIGER, H. and HADWIGER, H., *Ueber Treffzahlwahrscheinlichkeiten im Eikorperfeld*, Zeits. fur Wahrscheinlichkeitstheorie 10, 1968, 329-334.

[3] MILES, R.E., *Poisson flats in Euclidean Spaces, Part II: Homogeneous Poisson flats and the complementary theorem*, (en prensa).

[4] SANTALÓ, L.A., *Integralgeometrie 5, Ueber das kinematische Mass im Raum*, Hermann, París, 1936.

[5] SANTALÓ, L.A., *Sur la mesure des espaces linéaires qui coupent un corps convexe et problèmes qui s'y rattachent*, Colloque sur les questions de réalité en Géométrie, Liège, 1955, 177-190.

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales.
Buenos Aires.

Recibido en setiembre de 1970.