GENERALIZACION DE UN PROBLEMA DE PROBABILIDADES GEOMETRICAS

por L. A. SANTALÓ

El problema resuelto por la Srta. Elba Raimondi en el número anterior de esta Revista (*) se puede generalizar al caso en que, en lugar de un polígono, se trata de una figura convexa cualquiera. El problema se enuncia entonces:

Dados al azar dos pares de puntos XY, ZT, sobre el contorno de una figura convexa, calcular la probabilidad de que el punto de intersección de las rectas que determinan, sea interior a la figura.

Consideremos primero la cuestión siguiente: «Dados arbitrariamente sobre el contorno de una figura convexa dos pares de puntos X, Y; Z, T, ¿cuál es la probabilidad de que se separen entre sí?». Hay que tener en cuenta que por probabilidad elemental de un punto sobre una línea rectificable se toma el elemento de arco de la misma.

Sea O un punto del contorno de la figura convexa dada K y sean x, y, z, t las longitudes de los arcos del mismo contorno que a partir de O determinan respectivamente a los cuatro puntos considerados. La medida de los casos favorables será la integral $I_1 = \int dx\, dy\, dz\, dt$ extendida a las posiciones en que X, Y separan a Z, T. Fijados X, Y y llamando l y $L - l$ a las longitudes de los dos arcos en que dividen al contorno de K, como Z y T pueden estar indistintamente en uno u otro lado, es

$$I_1 = 2 \int l\,(L - l)\, dx\, dy = 2 \int_0^L dx \left[L \frac{l^2}{2} - \frac{l^3}{3} \right]_0^L = \frac{1}{3} L^4.$$

L es la longitud del contorno de K. La integración es inmediata puesto que, fijado x, es $dy = dl$. La medida de todos los casos posibles es L^4, luego la probabilidad buscada vale $\frac{1}{3}$.

Se observa que, como era de esperar, este resultado no depende para nada de la figura convexa y que el razonamiento y resultado subsisten para cualquier curva cerrada no convexa.

(*) Revista de la *Unión Matemática Argentina*. Vol. VII, nº 4, pág. 106.

Supongamos ahora una figura convexa K *sin segmento de recta en su contorno*. En este caso si dos pares de puntos X, Y; Z, T dados arbitrariamente se separan, la recta que une los dos primeros cortará a la que une los dos segundos en un punto *interior* a K. Luego: «Dados al azar dos pares de puntos sobre el contorno de una *figura convexa el cual no contiene segmentos de recta*, la probabilidad de que el punto de intersección de las rectas que determinan sea interior a K es $\frac{1}{3}$».

Pasemos ahora al caso en que K contiene en el contorno n segmentos $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$. Sea F la longitud de la parte curvilínea del contorno de K, de manera que, $L = F + \sum_1^n a_i$.

La medida $I_1 = \frac{1}{3} L^4$ de los casos en que X, Y; Z, T se separan, comprende la medida de los casos en que las rectas determinadas por X, Y y Z, T se cortan *interiormente* a K, *más los casos en que alguna de estas rectas es un segmento* a_i *del contorno*. Si calculamos este última medida, restándola de $\frac{1}{3} L^4$, tendremos la solución del problema del enunciado aún para el caso más general de tratarse de una figura convexa cualquiera cuyo contorno contiene un número finito de segmentos.

Puede ocurir que los cuatro puntos X, Y; Z, T estén sobre un mismo lado a_i. Entonces, la medida de las posiciones en que se separan será: fijos X, Y y llamando σ a la distancia entre ellos, puede ocurrir que Z sea interior a σ y T esté en $a_i - \sigma$ o viceversa, y por tanto

$$J_1 = \int dx\, dy\, dz\, dt = 2 \int \sigma (a_i - \sigma)\, dx\, dy = 2a_i \int \sigma\, dx\, dy - 2 \int \sigma^2\, dx\, dy$$

entendiendo la integración extendida al segmento a_i. Es

$$2a_i \int \sigma\, dx\, dy = 2a_i \int_0^{a_i} dx \left\{ \int_0^x (x - y)\, dy + \int_x^{a_i} (y - x)\, dy \right\} = \frac{2}{3} a_i^4$$

$$2 \int \sigma^2\, dx\, dy = 2 \int_0^{a_i} \int_0^{a_i} (x - y)^2\, dx\, dy = \frac{1}{3} a_i^4.$$

Por tanto $J_1 = \frac{1}{3} a_i^4$, y sumando esta expresión para todos los segmentos a_i queda $\frac{1}{3} S_4$, llamando $S_4 = \sum_1^n a_i^4$.

Si X e Y están en segmentos distintos del contorno de K, por ejemplo está X en a_i e Y en a_k, los casos en que X, Y; Z, T se separan sin que las rectas que determinan se corten interiormente a K son aquellos en que Z y T están los dos en a_i o los dos en a_k. Llamando x a la abscisa sobre a_i que determina X e y a la abscisa de Y sobre a_k, la medida de estos casos es: si Z y T están en a_i

$$2\int_0^{a_k} dy \int_0^{a_i} (a_i - x)\, x\, dx = \frac{1}{3} a_i^3 a_k,$$

y si Z y T están en a_k:

$$2\int_0^{a_i} dx \int_0^{a_k} (a_k - y)\, y\, dy = \frac{1}{3} a_i a_k^3.$$

Sumando estas expresiones a todos los pares a_i, a_k y llamando $S_{3,1} = \sum_{i,k} a_i^3 a_k \; (i \neq k)$, resulta que la medida de las posiciones en que X, Y están en segmentos distintos y Z, T, separando a los anteriores, están sobre un mismo segmento de K, vale $\frac{2}{3} S_{3,1}$. Permutando el papel del par X, Y con el de Z, T resulta que la medida de las posiciones en que X, Y; Z, T se separan estando X, Y sobre un mismo a_i y Z, T en a_i distintos vale también $\frac{2}{3} S_{3,1}$; en total es pues $\frac{4}{3} S_{3,1}$.

Teniendo en cuenta el valor $\frac{1}{3} S_4$ antes encontrado para el caso de estar los cuatro puntos sobre un mismo segmento a_i, resulta: «La medida total de las posiciones en que X, Y; Z, T se separan y están todos sobre segmentos rectilíneos del contorno de K sin que la recta que une los dos primeros corte a la que une los dos segundos en un punto *interior* a K, vale

$$\frac{1}{3} S_4 + \frac{4}{3} S_{3,1}».$$

Puede ocurrir finalmente que X, Y; Z, T se separen y uno de ellos (por ej. el X) esté en la parte curvilínea E del contorno de K y los tres restantes sobre un mismo a_i. La medida de estos casos es, para cada a_i:

$$2\int_0^{\Gamma} dx \int_0^{a_i} y\,(a_i - y)\,dy = \frac{1}{3}\, a_i^3\, \Gamma$$

y sumando para todos los a_i resulta $\frac{1}{3}$ ΓS_3. Si Y está en la parte curvilínea Γ y X sobre a_i se obtiene análogamente $\frac{1}{3}$ ΓS_3 y si se invierte el papel del par X, Y y del Z, T resultan otra vez estas dos medidas; en total queda $\frac{4}{3}$ ΓS_3.

Los casos considerados son los únicos en los cuales X, Y; Z, T se separan sin que las rectas que determinan se corten interiormente a K, luego:

La medida de las posiciones de dos pares de puntos X, Y; Z, T del contorno de una figura convexa, en las cuales el punto de intersección de las rectas que determinan es *interior* a la figura, vale

$$\frac{1}{3} L^4 - \frac{4}{3} \Gamma S_3 - \frac{1}{3} S_4 - \frac{4}{3} S_{3,1}$$

siendo L la longitud total del contorno de K, Γ la longitud de la parte curvilínea y S_i las sumas correspondientes a los segmentos a_i del contorno.

El valor de la probabilidad del problema será éste dividido por L^4, que es la medida de todos los casos posibles.

En particular: 1º. Si el contorno carece de segmentos a_i, queda $p = \frac{1}{3}$ como ya se obtuvo. 2º. Si K es un polígono, es $\Gamma = 0$ y es fácil ver que la solución coincide entonces con la dada por la Srta. Elba Raimondi en el trabajo citado.

L. A. Santaló