PORTUGALIAE MATHEMATICA
Vol. 3—Fasc. 1—Março, 1942

QUELQUES PROPRIÉTÉS DES COURBES GAUCHES DANS LA GÉOMÉTRIE DIFFERENTIELLE AFFINE

par L. A. SANTALÓ (À ROSARIO, ARGENTINA)

(Recebido em 1941, Setembro, 19)

L'objet de cette note est d'étudier les surfaces développables qui passent par une courbe donnée de l'espace et dont la droite génératrice occupe quelque position particulière par rapport au «trièdre fondamentale affin» lié à la courbe. Nous verrons, en même temps, que de cette étude, on peut déduire certaines propriétés caractéristiques des courbes gauches dont la courbure ou la torsion affine sont liées par relations determinées.

1. *Definitions et notations.* [1] — Soit $x=x(s)$ l'équation vectorielle d'une courbe dans l'espace E_3, dont le paramètre s soit l'arc affin.

Si les accents indiquent les dérivées par rapport à s, nous appellons les vecteurs x', x'', x''', tangente, normal affin et bi-normal affin respectivement. Le fait d'être s l'arc affin, implique, comme on sait, la condition

1) $$(x' x'' x''')=1$$

où $(x' x'' x''')$ représente le déterminant formé par les composants des vecteurs x', x'', x'''. Cette relation 1) nous dit que les trois vecteurs x', x'', x''' ne sont pas dans un même plan : ils forment donc un trièdre que nous appellerons le «trièdre fondamentale affin». Le plan déterminé par x', x'' est le *plan osculateur ;* le plan déterminé par x'', x''' sera le *plan normal affin* et le plan determiné par x', x''' sera le *plan rectifiant affin.*

La courbure et la torsion affines ont les valeurs

2) $$k=(x^{IV} x' x''') \qquad t=-(x^{IV} x'' x''')$$

et nous savons qu'existe la relation fondamentale

3) $$x^{IV}+kx''+tx'=0 \,.$$

[1] Voir par ex.: W. Blaschke, «Vorl. über Differentialgeometrie II», Chap. 3.
E. Salkowski, «Affine Differentialgeometrie», § 22 et suivants.

2. Généralités sur les surfaces développables. Considerons dans chaque point de la courbe $x=x(s)$ un vecteur $e(s)\neq 0$. L'équation vectorielle

4) $$y(s,\lambda)=x(s)+\lambda e(s)$$

où λ est un paramètre, est l'équation d'une surface réglée qui passe par la courbe donnée $x=x(s)$.

La condition nécessaire pour que la surface 4) soit développable est que, pour toutes les valeurs de λ, les vecteurs tangents $x'+\lambda e'$ et le vecteur génératrice e soient dans un plan, c'est-à-dire

5) $$(x'\,e\,e')=0.$$

Les couditions pour que la surface 4) soit un cylindre on un cône peuvent s'exprimer de la manière suivante. Puisque x', e, e' sont dans un même plan, on peut poser

6) $$e'=\mu x'+\nu e.$$

La condition pour que la surface 4) soit un cylindre s'obtient en exprimant que e a un direction constante; dans ce cas e' doit avoir la même direction que e et 6) nous donne

7) $$\mu=0.$$

Pour que la surface 4) soit un cône il faut et il suffit qu'il existe une fonction $\lambda=\lambda(s)$ telle que $x(s)+\lambda e(s)$ soit constante, c'est-à-dire $\dfrac{d(x+\lambda e)}{ds}=(1+\lambda\mu)x'+(\lambda'+\lambda\nu)e=0$ d'où $1+\lambda\mu=0$, $\lambda'+\lambda\nu=0$ et on aura

8) $$\nu=\frac{\mu'}{\mu}.$$

Donc: «La surface 4) est développable s'il y a lieu 5) et en conséquence on peut poser 6). Si, au plus, on a 7) la surface est un cylindre; si $\mu\neq 0$ et a lieu 8), la surface est un cône».

3. Equation générale des surfaces développables qui passent par une courbe donnée. — 1. Décomposons $e(s)$ de 4) dans ses composantes par rapport au trièdre fondamental affin attaché à la courbe. Soit

9) $$e=\alpha x'+\beta x''+\gamma x''';$$

on déduit de 3)

10) $$e'=(\alpha'-\gamma t)x'+(\alpha+\beta'-\gamma k)x''+(\beta+\gamma')x'''$$

et par suite $(x'\,e\,e')=(x'\,x''\,x''')[\beta\gamma'-\gamma\beta'+\beta^2-\gamma\alpha+\gamma^2 k]$.

D'après 1) et 5) on a donc: La condition nécessaire et suffisante pour que la surface 4) avec 9) soit développable est que

11) $$\beta\gamma'-\gamma\beta'+\beta^2-\gamma\alpha+\gamma^2 k=0.$$

2. En faisant dans 11) $\gamma=0$, on a $\beta=0$ et on trouve le resultat bien connu: la seule surface développable qui passe par une courbe donnée et dont les génératrices sont toujours dans le plan osculateur, est la surface tangentielle. Nous pouvons, donc, supposer $\gamma\neq 0$.

De 11) on deduit $\alpha+\beta'-\gamma k=\frac{\beta}{\gamma}(\gamma'+\beta)$ et 10) peut s'écrire

$e'=(\alpha'-\gamma t)x'+\frac{\gamma'+\beta}{\gamma}(\beta x''+\gamma x''')$ ou, selon 9),

$$e'=(\alpha'-\gamma t-\frac{\alpha}{\gamma}(\gamma'+\beta))x'+\frac{\gamma'+\beta}{\gamma}e. \tag{12}$$

Les conditions 7) et 8) nous donnent donc: La condition nécessaire et suffisante pour que la surface 4) soit un cône est que soit verifiée la condition 11) et en outre

$$\frac{\gamma'+\beta}{\gamma}=\frac{[\alpha'-\gamma t-\frac{\alpha}{\gamma}(\gamma'+\beta)]'}{[\alpha'-\gamma t-\frac{\alpha}{\gamma}(\gamma'+\beta)]}. \tag{13}$$

Si

$$\alpha'-\gamma t-\frac{\alpha}{\gamma}(\gamma'+\beta)=0 \tag{14}$$

la surface sera un cylindre.

4. Surfaces développables spéciales. — 1. *Surfaces développables dont les génératrices sont toujours dans le plan rectifiant affin.* En faisant $\beta=0$ dans 11) on trouve $-\gamma\alpha+\gamma^2 k=0$ équation qui admet la solution triviale $\gamma=0$ (surface tangentielle) et la solution $\frac{\alpha}{\gamma}=k$.

Donc: *La seule surface développable qui passe par une courbe $x=x(s)$ et dont les génératrices sont toujours dans le plan rectifiant affin est $y=x+\lambda(kx'+x''')$.*

Selon 14) et 13) cette surface sera un cylindre pour les courbes avec [1] $k'-t=0$ et un cône pour les courbes avec $(k'-t)'=0$ ou bien $k'-t=\text{const}$.

2. *Surfaces développables dont les génératrices sont toujours dans le plan normal affin.* I. En faisant $\alpha=0$ dans 11) on trouve

$$\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)'-\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^2-k=0 \tag{15}$$

et par conséquent: Donnée une courbe $x=x(s)$, les surfaces développables qui passent par elle et dont les génétratrices sont toujours dans le plan normal affin, sont déterminées par l'équation 15) de Ricatti.

[1] Les courbes dont l'équation intrinsèque est $k'-t=0$ sont appelées «gewindekurven». Voir Blaschke loc. cit. pg. 83. Salkowski, loc. cit. pg. 85.

Ce résultat est beaucoup plus général. Considerons dans chaque point de la courbe au lieu du plan normal affin, un autre plan quelconque qui ne contient pas la tangente, et cherchons les surfaces développables dont la génératrice est toujours dans ces plans. Les α, β, γ seront liées par une relation de la forme $\alpha+b(s)\beta+c(s)\gamma=0$ d'où $\alpha=-b\beta-c\gamma$ et 11) nous donne $\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)'=\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^2+b\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)+c+k$.

Cette équation est aussi de Ricatti et nous dit que: *Si on considère dans chaque point d'une courbe gauche un plan qui ne contient pas la tangente, les surfaces développables qui contiennent la courbe et dont les génératrices sont toujours sur ces plans, sont données par une équation de Ricatti.* Par conséquent: a) *Si on connaît une de ces surfaces développables on peut trouver les autres par quadratures.* b) *la raison anharmonique de 4 génératrices correspondantes à 4 surfaces développables diverses est constante tout le long de la courbe.*

II. Revenons au cas des surfaces dont les génératrices sont sur le plan normal affin, c'est-à-dire, $\alpha=0$.

La condition pour que n'importe quelle de ces surfaces soit un cylindre, selon 14), est $\gamma t=0$, d'où $t=0$. Donc: *La condition pour l'existence d'un cylindre qui contient une courbe gauche et dont les génératrices soient toujours sur le plan normal affin, est que la torsion affine de la courbe soit nulle.* Dans ce cas toutes les surfaces développables normales sont cylindres.

III. La condition pour qu'une surface développable déterminée par 15) soit un cône est donnée par 13) qui devient $\frac{\beta}{\gamma}=\frac{t'}{t}$. Cette condition et 15) nous disent que: *La condition nécessaire et suffisante pour que les plans normaux affins d'une courbe gauche passent tous par un même point, est que la courbure affine et la torsion affine soient liées par la relation*

16) $$\left(\frac{t'}{t}\right)'-\left(\frac{t'}{t}\right)^2-k=0.$$

Dans ce cas les génératrices du cône sont données par la relation $\frac{\beta}{\gamma}=\frac{t'}{t}$, c'est-à-dire: Pour les courbes avec la condition 16) les droites $y=x+\lambda(t'x''+tx''')$ passent par un même point.

Le sommet de ce cône s'obtient facilement en écrivant que la dérivée de $x+\lambda(t'x''+tx''')$ (en considerant λ fonction de s) est nulle. On obtient $\lambda=\frac{1}{t^2}$. Pour $t=0$ le cône est un cylindre comme nous avons vu. Le sommet du cône est donc $x+\frac{t'}{t^2}x''+\frac{1}{t}x'''$.

En particulier: les courbes gauches avec $k=0$, $t=$const. sont caracterisées par le fait que ses binormales affines passent par un point. Si $t=0$, les binormales affines sont parallèles.

5. Surfaces développables dont les génératrices ont une position invariable par rapport au trièdre fondamentale affin. — 1. Considerons le cas où α, β, γ sont constantes.

La condition 11) devient

17) $$\beta^2-\gamma\alpha+\gamma^2 k=0\,.$$

De là on déduit que k doit aussi être constante. Réciproquement, si $k=$const., on peut déterminer les constantes α, β, γ avec la condition 17) et la surface correspondante sera développable. On a donc: *La condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une surface développable passant par une courbe gauche donnée et dont les génératrices ont une position invariable par rapport au trièdre fondamental affin, est que la courbure affine de la courbe soit constante.*

La rèlation 17) nous dit, de plus, que les génératrices de ces surfaces développables forment dans chaque point un cône de deuxième ordre, qui est tangent au plan osculateur tout le long de la tangente à la courbe.

Nous allons chercher les conditions pour que parmi ces surfaces développables il y ait des cylindres ou des cônes.

2. *Cylindres.* Étant α, β, γ constantes, la condition 14) devient

18) $$\gamma t+\frac{\alpha}{\gamma}\beta=0$$

et en conséquence, la torsion affine t doit être constante. Donc: *Pour l'existence d'un cylindre qui contient une courbe gauche et dont les génératrices sont invariablement liées au trièdre fondamental affin, il faut et il suffit que la courbe ait une courbure et une torsion affines constantes.*

Dans ce cas, les composantes α, β, γ des génératrices du cylindre sont données par 17) et 18), ou bien

19) $$\beta^2-\gamma\alpha+\gamma^2 k=0\,,\quad \alpha\beta+\gamma^2 t=0\,.$$

Dans ce système on doit exclure la solution $\gamma=0$, $\beta=0$ puisque les relations 14) et 18) ne sont pas valables pour $\gamma=0$.

En posant $\dfrac{\beta}{\gamma}=\eta$, $\dfrac{\alpha}{\gamma}=\xi$, l'élimination de ξ dans le système 19) conduit à

20) $$\eta^3+k\eta+t=0$$

et l'on a par suite: *Les courbes avec* $k=$const., $t=$const. *ont toujours un* *ou trois cylindres réels qui passent par elles et dont les génératrices sont invariablement liées au trièdre fondamental affin.*

En répresentant par η_i une solution de 20), la surface cylindrique correspondante est, selon 19), $y=x+\lambda[(\eta_i^2+k)x'+\eta_i x''+x''']$.

3. *Cônes.* Pour α, β, γ const., la relation 13) s'écrit $\alpha\beta^2+\beta\gamma^2 t-\gamma^3 t'=0$.

En posant $\dfrac{\beta}{\gamma}=\eta, \dfrac{\alpha}{\gamma}=\xi$ cette équation et 17) donnent le système

$$\xi\eta^2+\eta t-t'=0, \quad \eta^2-\xi+k=0 \tag{21}$$

ou bien, en éliminant ξ, $t'-\eta t-\eta^2(\eta^2+k)=0$ ce qui peut s'énoncer ainsi: *Pour que par uue courbe gauche passe un cône dont les génératrices soient invariablement liées au trièdre fondamental affin, il faut et il suffit:* a) *que* $k=$const. b) *que* t, t' *et* k *soient liées par une rélation de la forme*

$$t'-At-A^2(A^2+k)=0 \tag{22}$$

où A *est une constante.*

Dans ces conditions, les génératrices du cône sont déterminées par $\dfrac{\beta}{\gamma}=A, \dfrac{\alpha}{\gamma}=A^2+k$ et le cône sera $y=x+\lambda[(A^2+k)x'+Ax''+x''']$.

Pour trouver le sommet de ce cône, il suffit de poser $y'=0$; on aura $y'=[1+\lambda'(A^2+k)-\lambda t]x'+[A\lambda'+\lambda(A^2+k)-k\lambda]x''+[\lambda'+A\lambda]x'''=0$.

Les trois coefficients de cette expression doivent être nuls (x', x'', x''' sont vecteurs), et on trouve $\lambda=\dfrac{1}{t+(A^2+k)A}$.

Le sommet du cône est donc

$$y=x+\frac{1}{t+(A^2+k)A}[(A^2+k)x'+Ax''+x''']. \tag{23}$$

Cas particulier $t=$const. Dans ce cas, la relation 22) a lieu par A=0 et 23) nous donne le theorème: *Pour les courbes avec* $k=$const., $t=$const. $\neq 0$, *les vecteurs* $y=x+\dfrac{1}{t}(kx'+x''')$ *ont leur extrêmité dans un point constant en formant un cône dont les génératrices sont invariablement liées au trièdre fondamental affin de la courbe*[1].

Exception faite de ce cône, et toujours avec $k=$const., $t=$const. $\neq 0$, l'équation 22) est vérifiée seulement pour les valeurs de A racines de l'équation $t+A(A^2+k)=0$, mais dans ce cas, 23) nous dit que le cône devient un cylindre: ce sont les cylindres déjà étudiés.

[1] Pour ce cas particulier, voir Blaschke, loc. cit. pg. 81.