Año XVII Mayo 1961 Número 5

CIENCIA E INVESTIGACIÓN

Revista publicada por la Asociación Argentina para el progreso de las Ciencias

Publicado con el apoyo del Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas

Publicado en junio de 1961.

Geometría analítica y geometría sintética*

Luis A. Santaló

(*Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires*)

La matemática, hija de una extraña unión de la razón con la fantasía, es una ciencia curiosa, mezcla de ciencia y arte. Vieja como el pensamiento, pero nunca envejecida. Su continua renovación le hace conservar imperecedera frescura y juventud. Ciencia milagrosa, que sin tener los mojones de las ciencias experimentales que le deslinden los caminos, ni disponer de experiencias cruciales con que refrendar cada progreso, ha avanzado siempre, durante siglos, por la buena senda del correcto razonar. Las alas que la fantasía le presta, aún dándole infinita libertad, no han servido nunca para apartarla de la buena ruta. Su marcha ha sido siempre un incesante progreso: los retrocesos temporales, si bien han existido, han sido siempre, como los de los planetas, más aparentes que reales.

¿Cómo se ha realizado este continuo progreso? Mirando hacia el pasado, no es difícil encontrar ciertas características que se van repitiendo, con las variantes propias de cada época, de manera más o menos periódica. Épocas de rápido florecimiento, con la aparición de nuevas y frondosas teorías, a veces mal fundamentadas pero que la intuición adivina eficaces y cultiva, seguidas de épocas en que la fundamentación olvidada se hace necesaria porque la altura del edificio exige ya cimientos firmes para evitar el tambaleo o derrumbe, amenazado por la aparición de paradojas o resultados inconsistentes. Épocas de especialización en que cada rama avanza por su lado, seguidas de épocas de síntesis en que se ponen de manifiesto las

* Memoria leída con motivo de la incorporación del autor a la Academia Nacional de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Buenos Aires.

raíces comunes de muchas ramificaciones. Épocas en que la matemática se nutre de los problemas presentados por la técnica o las ciencias experimentales, seguidas de épocas en que, en justa compensación, la matemática cede a dichas ciencias frutos que les son preciosos para su crecimiento y desarrollo, aún cuando fueron elaborados por el sólo placer de la pura especulación. Épocas, en fin, en que la matemática mantiene la jerarquía de reina de las ciencias por presentarse a la vanguardia del saber humano, seguidas de épocas oscuras, por suerte breves y reparables, en que el templo de la matemática es invadido por mercaderes, quienes, en su interés, pretenden extrapolar sus posibilidades hacia terrenos cabalísticos o bien, en su ignorancia, tratan de aplicarla a problemas incorrectamente planteados.

Entre todas estas vicisitudes que a grandes rasgos presiden la evolución de la matemática vamos a exponer, con cierto detalle, un aspecto poco señalado pero que consideró de interés y actualidad y que se refiere al campo de la geometría. Se trata de una lucha periódica, con alternativas de triunfo y derrota para ambas partes, entre la llamada geometría analítica y la geometría sintética.

Hasta 1637 ó 1679 en que Descartes y Fermat publicaron, respectivamente, sus primeros trabajos sobre geometría analítica, con los cuales se considera que nació esta disciplina, la geometría era exclusivamente sintética. Es decir no se introducían para tratar un problema, elementos ajenos al problema mismo. Cuando Apolonio estudiaba las cónicas lo hacía sobre estas mismas figuras, sin introducir elementos que motivaran la duda de si, al final, el resultado podía depender de estos elementos auxiliares introducidos.

Con la geometría analítica la cuestión cambia. Hay que introducir coordenadas y luego se razona sobre ecuaciones referidas al sistema elegido. Cambiando el sistema de coordenadas cambian también las ecuaciones representativas de las figuras y por tanto se hace necesario, cada vez, demostrar que las propiedades obtenidas, aún siendo propiedades de las ecuaciones, que pueden variar, son propiedades intrínsecas de las figuras, es decir, no dependen del sistema de coordenadas elegido. Muchas veces esta independencia es prácticamente evidente y así se toma como tal en la geometría elemental. Sin embargo, al complicarse los problemas, la evidencia va desapareciendo. Ya en la geometría analítica elemental, al estudiar la clasificación de las cónicas, se hace necesaria la teoría de los "invariantes", es decir, el estudio de aquellas expresiones algebraicas que dependen de la figura, pero no del sistema de coordenadas a que se han referido. Esta necesidad, acentuada con la complicación de los problemas, dió lugar al florecimiento de la teoría de invariantes, desarrollada y prácticamente agotada en el siglo XIX.

Por otra parte: el uso sistemático de la geometría analítica para todos los problemas condujo a complicaciones extraordinarias en que la frondosidad de fórmulas impedía ver la esencia geométrica del problema. En realidad todo apartamiento del dominio natural de un problema conduce a complicaciones artificiales que más tarde se desmoronan al volver a encontrar la senda escondida. Así ocurrió con la geometría. El reinado casi absoluto de la geometría analítica durante los siglos XVII y XVIII condujo a un abuso de sus métodos y muchos problemas, complicados innecesariamente, perdieron el sentido estético que debe mantener toda construcción matemática. Veamos un ejemplo típico para aclarar las ideas.

Apolonio de Perga (siglo II antes de J. C.) considera el problema de encontrar un triángulo inscripto en una circunferencia cuyos lados pasen, respectivamente, por tres puntos dados de su plano y lo resuelve para el caso particular en que los tres puntos están en línea recta. En 1776, en las Memorias de la Academia de Berlín, el matemático G. F. S. de Castillon lo resuelve por primera vez para tres puntos en posición cualquiera. Inmediatamente, en el mismo volumen de dichas memorias, Lagrange da otra solución de tipo analítico, complicada, que consiste en hallar una ecuación de segundo grado para la tangente del ángulo AOM, siendo A uno de los puntos dados, O el centro de la circunferencia y M un vértice incógnita del triángulo buscado (1). Deja Lagrange por hacer la construcción efectiva de la solución encontrada, que no es trivial ni breve, y sobre la cual dice Carnot en su *Géométrie de Position* (París, 1803, pág. 383): "Por invitación de Euler, Lexell en el vol. IV de las nuevas memorias de Petersburgo da la construcción de la fórmula encontrada por Lagrange y dice que ha ensayado de aplicarla al caso del cuadrilátero inscripto, pero sin éxito." A continuación da Carnot otra solución mixta, entre geométrica y analítica, que sirve para un polígono de un número cualquiera de lados, pero que tampoco es simple y la solución, como en el caso de Lagrange, está dada por una ecuación de segundo grado cuyas raíces son las tangentes trigonométricas de ciertos ángulos, conocidas las cuales puede hacerse la construcción.

Sin entrar en detalles históricos sobre otras soluciones dadas en los años sucesivos, lo importante para nuestro punto de vista es que en 1817 (*Annales de Mathématiques*, vol. 8, p. 151), Poncelet da una simplicísima demostración geométrica, válida no sólo para la circunferencia sino también para cualquier cónica y para un polígono de cualquier número de lados.

Es la solución natural del problema, basada en el concepto de proyectividad sobre una cónica y sobre la cual no vale la pena detenernos por ser bien conocida y encontrarse actualmente en casi todos los libros de geometría proyectiva.

Con este ejemplo la geometría proyectiva, entonces naciente, probó su aptitud para resolver problemas. Fué el comienzo de un retorno a la geometría sintética. Iniciado el camino los resultados fueron pronto sorprendentes. El principio de dualidad iluminó y puso orden a todo un amontonamiento de problemas dispersos; puede decirse que de un salto duplicó toda la geometría. Durante varias décadas, casi tres cuartos de siglo, la victoria de la geometría sintética fué total. Se creía —dice Blaschke— que la geometría había, al fin, encontrado el camino real que pedía Ptolomeo. En 1859 Cayley decía: la geometría proyectiva es toda la geometría.

Pronto, sin embargo, volvió el análisis a mostrar sus armas y a cotizar su valor. En 1854, Riemann presenta su famosa tesis *Sobre las hipótesis que sirven de fundamento a la geometría*, publicada en 1867, en la cual abre las puertas al fecundo campo de los espacios multidimensionales; las coordenadas aparecen nuevamente como elementos indispensables. Empieza el período áureo de la geometría diferencial.

Es interesante ver cómo introduce Riemann el concepto de variedad n-dimensional. Como precedente, estaba la idea de superficie tal como surge de la famosa memoria de Gauss *Disquisitiones generales circa superficies curvas* (1828) en la cual, por primera vez [2] se consideran las superficies "no como límite de un sólido, sino como un sólido una de cuyas dimensiones se considera como desvanecida" y se representan por sus ecuaciones paramétricas

$$X = X(x^1, x^2), \quad Y = Y(x^1, x^2),$$

$$Z = Z(x^1, x^2)$$

dependientes de dos parámetros x^1, x^2.

Aparecen las superficies, por tanto, como imágenes del plano x^1, x^2 en el espacio ordinario. Se las ha liberado de ser contorno de un cuerpo, pero se sigue suponiéndolas contenidas en el espacio ordinario de tres dimensiones. Faltaba romper esta última limitación y darles completa autonomía. Este es el paso inicial de Riemann. Parte de una variedad de una dimensión o "simplemente extendida" cuyo carácter esencial es que "partiendo de un punto no se puede ir de manera continua más que en dos direcciones, hacia adelante o hacia atrás", para pasar, sucesivamente, a las variedades de más dimensiones. La exposición de Riemann no es muy clara pero la idea, en el lenguaje actual, es la

[1] Reproducida en las *Oeuvres de Lagrange*, tomo 4, págs. 335-339.

[2] Hasta entonces era costumbre general considerar a las superficies como límites o contornos de cuerpos. Así Euler titula el apéndice de su "Introducción al Análisis Infinitesimal" dedicado a la teoría de superficies *De superficiebus corporum* y más tarde, una memoria sobre superficies desarrollables la titula *De solidus quorum superficien in planum explicare licet*.

de considerar las variedades de dos dimensiones como "producto" de dos variedades de una dimensión; las de tres dimensiones como producto de una de dos por otra de una, y así sucesivamente. Naturalmente que una definición de este tipo puede sólo aceptarse "localmente", pero hace innecesario suponer que la variedad está contenida en un espacio de mayor número de dimensiones. De esta manera, si los puntos de una variedad de una dimensión están determinados por el valor de una coordenada x^1, los puntos de una variedad de dimensión n estarán determinados por n coordenadas $x^1, x^2, \ldots, x^n$.

Con palabras más o menos análogas la misma definición ha sido la adoptada de manera general durante muchos años, prácticamente hasta que las necesidades de la geometría diferencial global obligaron a definir, más precisamente, las "variedades diferenciables".[3]

El punto de partida es siempre el conocimiento de las n coordenadas x^i $(i = 1, 2, 3, \ldots, n)$, las cuales pueden sustituirse por otras x_*^i dadas por ciertas funciones $x_*^i = f^i\ (x^1, x^2, \ldots, x^n)$ sujetas a determinadas condiciones para mantener la biunivocidad entre las x^i y las x_*^i. Para hacer geometría hay que elegir un particular sistema de coordenadas, trabajar con él, y luego probar que los resultados obtenidos no dependen del sistema elegido.

Para asegurar esta independencia del sistema de coordenadas, o sea, para distinguir fácilmente las propiedades intrínsecas de las que no lo son, se presentan dos posibilidades: a) Encontrar unas reglas o métodos de cálculo apropiados, tales que, aún utilizando coordenadas, se sepa en cada momento cuáles son los resultados que no dependen de ellas; b) Suprimir las coordenadas y operar únicamente con ciertos elementos intrínsecos introducidos especialmente. La primera alternativa dió lugar al cálculo tensorial: corresponde a la tendencia de la geometría analítica. La segunda, todavía en etapa de desarrollo, a la llamada geometría diferencial moderna, que significa una vuelta a la geometría sintética.

El Cálculo Tensorial, obra principalmente de Ricci y Levi-Civita (*Méthodes de Calcul differentiel absolu, Math. Annalen*, vol. 54, 1901) fué de utilidad fundamental. El progreso de la geometría diferencial de espacios multidimensionales, en particular de los espacios de Riemann, realizado en los primeros treinta años del siglo actual bajo el impulso muchas veces de las necesidades de la teoría de la relatividad general de Einstein, fué posible gracias a la existencia de dicho cálculo.

Sin embargo, al avanzar la teoría y ensanchar su campo de acción, los problemas se complicaron y el cálculo tensorial tropezó con dos graves inconvenientes. Primero, la complejidad de su notación. Las distintas tentativas para simplificar tuvieron poco éxito y la exuberancia de índices y combinaciones entre ellos fué una muralla que poco a poco fué cercando a las ideas, para terminar asfixiándolas por el peso del simbolismo. Segundo, su poca aptitud para tratar los problemas "en grande" de la geometría diferencial. La necesidad de disponer de coordenadas para definir los tensores, hace a estos elementos poco aptos para considerar problemas globales en que unas mismas coordenadas no sirven para toda la variedad. Por esto, cuando impulsados por la avalancha de nuevas ideas con que la Topología invadió toda la matemática en el segundo, tercero y cuarto decenio del siglo actual, se plantearon problemas globales o "en gran-

[3] He aquí algunos ejemplos. T. Levi-Civita en *The absolute differential calculus* 1923, trad. inglesa de 1926, dice: "Punto de una variedad n-dimensional abstracta es el conjunto de valores de n variables $x^1, x^2, \ldots, x^n$. Por tanto (pág. 119), "variedad n-dimensional es el conjunto de valores que pueden asignarse a n variables".
L. P. Eisenhart (*Riemannian Geometry*, 1925, pág. 1) dice: "n variables independientes $x^1, x^2, \ldots, x^n$ pueden pensarse como las coordenadas de un espacio n-dimensional en el sentido de que cada conjunto de valores de las variables define un punto de la variedad".
H. Weyl es tal vez el primero que llama la atención sobre la posibilidad de que un mismo sistema de coordenadas no valga para toda la variedad y dice (*Space ,time and matter*, 1920, pág. 84, edición inglesa): "La característica de una variedad n-dimensional es que cada uno de sus elementos (puntos, condiciones de un gas, colores) puede ser especificado dando n cantidades: las 'coordenadas', que son funciones continuas dentro de la variedad. Esto no debe significar que 'toda' la variedad, con todos sus elementos, pueda representarse de una sola y reversible manera por los valores de sistemas de coordenadas (por ejemplo esto es imposible para la esfera, para la cual es $n = 2$); significa solamente que si P es un elemento arbitrario de la variedad, siempre existe un cierto dominio en el entorno de P que puede representarse de manera unívoca y reversible por los valores de un sistema de n coordenadas."

de", el cálculo tensorial empezó a mostrarse insuficiente y hubo que acudir a nuevas armas. Primero fué el cálculo diferencial exterior y sus formas diferenciales, tan hábilmente explotado por Elie Cartan, que ahorraba símbolos y tenía carácter menos local que el tensorial. Después, ya iniciado el nuevo rumbo, fué el prurito de abandonar las coordenadas totalmente, buscando puntos de partida que fueran intrínsecos por su propia definición.

La tarea no se presentaba fácil, pues si la definición misma de variedad n-dimensional se apoyaba en las coordenadas $x^1, x^2, \ldots, x^n$ que determinaban cada uno de sus puntos, difícil era imaginar cómo podían luego rechazarse estas coordenadas y hacer geometría "diferencial" sin ellas. Cierto que la topología define intrínsecamente sus variedades multidimensionales, como conjuntos homeomorfos a otros conjuntos bien definidos del espacio euclidiano, pero la geometría diferencial necesita algo más, precisa de ciertas condiciones de regularidad para definir espacios tangentes, trayectorias, curvatura, etc.

Un primer paso, realizado sin salir del marco del cálculo tensorial clásico, pero que preparó el terreno para las investigaciones futuras, fué el libro de Veblen y Whitehead titulado *The foundations of differential geometry* publicado en 1932 (Cambridge Tracts, Nº 29). La idea esencial del libro es definir rigurosamente las relaciones entre la variedad y los sistemas de coordenadas que la sostienen y hacer una clara distinción entre ambos conceptos.

Veblen y Whitehead son los primeros en formular de manera explícita que las variedades que estudia la geometría diferencial (las llamadas variedades diferenciables) son un conjunto de dos elementos: primero, la variedad como conjunto de puntos, para cuya definición y tratamiento la topología suministra los elementos y los medios; segundo, un cierto conjunto de "sistemas de coordenadas admisibles" que permitan el estudio "diferencial" de la variedad y entre los cuales deberán existir ciertas fórmulas de transformación de unos en otros.

Para ambos elementos es fundamental la definición del *espacio numérico* o *espacio aritmético* de n dimensiones que se representa por R^n. Un punto de tal espacio es el conjunto de n números reales $x^1, x^2, \ldots, x^n$ dados en un cierto orden y el conjunto de todos los puntos constituye el R^n. Las x^i son las coordenadas del punto x correspondiente. Si no se quiere partir de los puntos que lo constituyen y usando lenguaje topológico, puede decirse que R^n es el producto cartesiano de n rectas reales.

Los "sistemas de coordenadas" se definen como correspondencias biunívocas $P \to x$ entre los puntos P de la variedad y ciertos conjuntos de puntos x del espacio numérico. Dos sistemas de coordenadas distintos $P \to x$, $P \to y$ dan lugar a una transformación $x \to y$. Una transformación se llama de clase r si las ecuaciones $y^i = y^i(x^1, x^2, \ldots, x^n)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, que la expresan admiten derivadas parciales continuas hasta el orden r.

Obsérvese que si representamos por X, Y los conjuntos en que varían respectivamente los puntos x, y y se tienen dos transformaciones de coordenadas $X \to Y$, $Y' \to Z$, solamente se puede hablar de producto o composición de las mismas si $Y = Y'$. Esto hace que el conjunto de las transformaciones de coordenadas no forme un grupo, como muchas veces se habían enunciado precedentemente, si no un pseudogrupo.

Con estos conceptos, Veblen y Whitehead definen las variedades diferenciables de clase r por tres sistemas de axiomas, de los cuales dos se refieren a las relaciones mutuas entre los sistemas de coordenadas admisibles y el tercero a la definición del espacio base, para lo cual toman como modelo los axiomas con que Hausdorff define los espacios topológicos separados.

No vale la pena reproducir aquí estos sistemas de axiomas, ya un poco anticuados, pero sí es interesante señalar que ellos fueron la base de todas las definiciones posteriores de variedad diferenciable, definiciones tan sólo diferentes en detalles de forma, pero todas equivalentes en el fondo. Vamos a recordar, en cambio, una de las definiciones actualmente más en uso, para hacer ver su carácter intrínseco.[4]

Definición de variedad diferenciable. Empecemos por definir un haz de funciones.

Sean dados un espacio topológico X y un conjunto cualquiera R, para todo abierto $U \subset X$ supongamos dado un conjunto de aplicaciones $H(U)$ del abierto U en R. Este conjunto $H(U)$ se dirá qué es un *haz de funciones* de valores en R si se cumplen las condiciones siguientes:

1. Dados dos abiertos U y $V \subset U$ y una función $f \varepsilon H(U)$, la restricción de f en V pertenece a $H(V)$.

2. Sea $U = \cup U_i$ y $f_i \varepsilon H(U_i)$ con la condición de que $f_i = f_j$ en $U_i \cap U_j$. Entonces existe $f \varepsilon H(U)$ tal que $f = f_i$ en U_i para todo i.

El espacio X se llama la *base* del haz. Si $U \subset X$, el haz de base U definido por asociar $H(U')$ a todo $U' \subset U$, se representa por H/U.

Por ejemplo, si R es el conjunto de los números reales y $H(U)$ el conjunto de las funciones continuamente diferenciables definidas en U, entonces $H(U)$ es el haz de funciones diferenciables sobre X.

Con esto se puede establecer la siguiente definición:

Una variedad diferenciable de dimensión n *es un par (X,H) en que X es un espacio topológico y H un haz de funciones numéricas de base X, ligadas por la siguiente condición:*

Para todo abierto suficientemente pequeño $U \subset X$, existe un homeomorfismo de U sobre un abierto V del espacio numérico R^n que transforma el haz H/U en el haz de las funciones diferenciables sobre V.

En esta definición, como en la mayoría de las usuales, el espacio topológico se supone "separado" (o de Hausdorff), pero a veces también se puede prescindir de esta condición, como ha hecho por ejemplo R. S. Palais en *A global formulation of the theory of transformation groups* (*Mem. of the Am. Math. Soc.* Nº 22, 1957).

Definición de vector. Ya bien establecida la definición de variedad, elemento básico y sostén de toda geometría, se planteó la tarea de ir definiendo, vía intrínseca, los otros elementos con que trabaja la geometría diferencial. El primero es el de "vector tangente" o simplemente "vector" de la variedad.

Para el espacio numérico R^n la definición de vector es intuitiva e inmediata: vector es un par de puntos ordenado, el primero llamado origen y el segundo extremo. Para $n = 3$, esta definición coincide con la de vector como flecha o segmento orientado que permite el cálculo vectorial elemental de manera puramente geométrica. Pero si se trata de una variedad diferenciable general, el concepto de vector como flecha deja de ser aplicable. Basta pensar en una superficie curva y el problema de definir vectores en ella sin salir de la misma. Hay que partir de otras bases. Recordemos primero cómo procede el cálculo tensorial clásico:

Definición tensorial de vector. Vector *contravariante* en una variedad n-dimensional es el conjunto de n componentes $u^1, u^2, \ldots, u^n$ que por un cambio de coordenadas $x^i \rightarrow x^i_*$ se transforman según la ley

$$u^i_* = \frac{\partial x^i_*}{\partial x^h} u^h$$

y vector *covariante* es el conjunto de n componentes $u_1, u_2, \ldots, u_n$ que por un cambio de coordenadas $x^i \rightarrow x^i_*$ se transforman según la ley

$$u^*_i = \frac{\partial x^h}{\partial x^i_*} u_h$$

En ambas expresiones se entiende que los índices repetidos van sumados de 1 a n, convención que usaremos también en lo sucesivo.

De esta manera la definición de vector presupone la existencia de un sistema de coordenadas respecto del cual se dan las

[4] La definición que sigue la tomamos de R. Godement, *Variétés differentiables*. Textos de Matemática, Nº 2, notas mimeografiadas, Recife, 1959. Después de Veblen-Whitehead, quien dió a la definición la forma más comúnmente seguida en los años sucesivos, fué H. Whitney (*Differentiable Manifolds*, *Annals of Math.*, vol. 37, 1936, págs. 645-680). Otras definiciones que suelen con frecuencia servir de referencia se encuentran en Chevalley (*Theory of Lie Groups*, *Princeton*, 1946, cap. III), G. de Rham (*Variétés differentiables*, Hermann, París 1955, cap. I) S. S. Chern (*Topics in differential geometry*, curso mimeografiado, Princeton, 1951, p. 14), A. Lichnerowicz (*Théorie globale des connexiones et des groupes d'holonomie*, París, 1955, cap. I.).

componentes. La determinación de las mismas componentes en otro sistema es simple cuestión de cálculo por las fórmulas anteriores. Las coordenadas juegan un papel primordial; los índices empiezan a aparecer en abundancia y aún con la supresión del símbolo de suma (convención de Einstein), las fórmulas se complican desde las primeras operaciones con vectores.

Veamos ahora la definición intrínseca. Se pueden dar varias de ellas, todas equivalentes, pero nos limitaremos a las más usadas en la literatura corriente.

Definición de Chevalley.[5] Sea V_n una variedad diferenciable de dimensión n y x un punto de la misma. Sea f una función diferenciable definida en un entorno de x. Se llama *vector tangente* a V_n en x a toda aplicación $f \rightarrow L(f)$ de f en los números reales, tal que se cumplan las siguientes condiciones:

1. Si f', f'' coinciden en un entorno de x, es $L(f') = L(f'')$.

2. L es lineal, es decir, si a, b son números reales cualesquiera y f, g dos funciones diferenciables definidas en el mismo entorno de x, es $L(a\,f + b\,g) = a L(f) + b\,L(g)$.

3. L es una diferenciación, es decir,

$$L(f\,g) = L(f).g(x) + f(x).L(g).$$

Para comparar esta definición con la clásica, pensemos un sistema de coordenadas $x^1, x^2, \ldots, x^n$ en un entorno de x. Si u^i son las componentes de un vector contravariante en el sentido clásico, la aplicación $L(f)$ la definimos por

$$L(f) = \frac{\partial f}{\partial x^i}\, u^i$$

donde las derivadas parciales se consideran tomadas en el punto x. Para dar L en un particular sistema de coordenadas, se deben dar las u^i, es decir, la definición corresponde a los vectores contravariantes.

Si se supone un cambio de coordenadas $x^i \rightarrow x^i_*$ siendo (por derivada de una función de función)

$$\frac{\partial f}{\partial x^i} = \frac{\partial f}{\partial x^h_*}\,\frac{\partial x^h_*}{\partial x^i}$$

y debiendo ser $L(f)$ un número real independiente del sistema de coordenadas resulta

$$\frac{\partial f}{\partial x^h_*}\,\frac{\partial x^h_*}{\partial x^i}\, u^i = \frac{\partial f}{\partial x^h_*}\, u^h_*$$

de donde (debiendo esta igualdad verificarse para toda f)

$$u^h_* = \frac{\partial x^h_*}{\partial x^i}\, u^i$$

que es la ley de transformación que sirve como definición en el tratamiento clásico.

Si L, L' son dos vectores tangentes en el mismo punto x, de la definición se deduce que la aplicación $f \rightarrow \lambda\,L(f) + \lambda'\,L'(f)$ para λ, λ' números reales cualesquiera, es también un vector tangente. Es decir, los vectores tangentes en un punto x forman un espacio vectorial, el cual se llama espacio vectorial tangente en x. Lo representaremos siempre por T_x.

Por dualidad, se define el espacio dual T^*_x, cuyos elementos son los co-vectores o vectores covariantes.

Definición de vector según Ehresmann. Se basa en el concepto de "jet".[6] Sean V_n y V_p dos variedades diferenciables de dimensiones n, p respectivamente. Sea f una aplicación de un entorno U de un punto $x_0 \in V_n$ en V_p, tal que si $x^1, x^2, \ldots, x_n$; $y^1, y^2, \ldots, y^p$ son coordenadas locales en U y $f(U)$, las funciones $y^i = f^i(x^1, x^2, \ldots, x^n)$, $i = 1, 2, \ldots, p$ admitan derivadas parciales continuas de orden $\geqslant r$ en x_0. El r-jet $j^r_{x_0} f$ de orden r, fuente x_0 y extremo $y_0 = f(x_0)$ es la clase de las aplicaciones g de un entorno de x_0 en V_p que aplican x_0 en y_0 y tales que las derivadas parciales de las g^i de orden igual o menor que r toman el mismo valor en x_0 que las derivadas de las f^i.

Siendo como siempre R^p el espacio nu-

[5] C. Chevalley, *Theory of Lie groups*, Princeton 1946, pág. 77.

[6] C. R. Acad. Sc. París, 233, 1951, p. 598. Dejamos la palabra "jet" sin traducir, por no haberse todavía introducido una traducción generalmente aceptada en castellano. La traducción literal sería "chorro"; a veces se ha traducido por "tiro".

mérico de dimensión p, se llama p^r-velocidad en V_n, de origen x_0, a todo j_0^r de R^p en V_n de fuente O (origen de coordenadas de R^p) y extremo x_0. Se llama p^r-covelocidad en V_n de origen x_0, a todo $j_{x_0}^r$ de V_n en R^p de origen x_0 y extremo O. Para $r = p = 1$, las velocidades y covelocidades son los vectores y covectores de V_n.

Veamos con un poco más de detalle esta definición de las dos clases de vectores, para ver que ellos coinciden con los vectores contravariantes y covariantes de la definición tensorial.

Para $p = 1$, R^1 es la recta real. Por tanto j_0^1 será la clase de las aplicaciones dadas por funciones $x^1 = f^1(y), x^2 = f^2(y), \ldots, x^n = f^n(y)$, $y \varepsilon R^1$ definidas en un entorno de $y = 0$, tales que ellas y sus derivadas primeras toman los mismos valores en $y = 0$. El vector resulta, por tanto, dado por las derivadas $(df^i/dy)_0$, es decir, en lenguaje geométrico clásico, se trata del vector tangente a la curva $x^i = f^i(y)$ o bien, en lenguaje físico, interpretando a y como la variable tiempo, del vector velocidad. Se ve así la coincidencia de los vectores de Ehresmann con los vectores contravariantes clásicos.

Si se considera j_x^1 se tendrá la clase de las funciones $y = f(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ definidas en un entorno del punto $x_0 \varepsilon V_n$ con valores reales $y \varepsilon R^1$, que toman el mismo valor y_0 en el punto dado x_0 y cuyas derivadas parciales $\partial f / \partial x^i$ toman también todas el mismo valor en x_0. Un vector, en el punto x_0 está determinado por tanto, por las n derivadas parciales anteriores. Vemos aparecer el concepto de gradiente como origen de vectores covariantes tal como, de manera más o menos escondida, asoma en todas las definiciones.

Definicón de tensor. La definición clásica se basa en las que ya hemos recordado de vectores contravariantes y covariantes. Un conjunto de n^{p+q} números reales serán componentes de un tensor p veces contravariante y q veces covariantes en un punto fijo de una variedad diferenciable dada, si por un cambio de coordenadas $x^i \rightarrow x_*^i$ se transforman como el producto de p vectores contravariantes y q vectores covariantes. Esto no quiere decir, naturalmente, que todo tensor sea un producto de vectores, sino únicamente que su ley de transformación es la misma que la de un producto de vectores.

La definición intrínseca es esencialmente la misma, sin necesidad de coordenadas que ya se abandonaron al definir los vectores. En efecto, una vez en posesión del espacio vectorial tangente T_x de los vectores contravariantes y su dual T_x^* de los covariantes, tanto la definición de Chevalley como la de Ehresmann permiten enunciar:

Tensor p veces contravariante y q veces covariante, en un punto x de la variedad diferenciable V_n es un elemento del espacio vectorial obtenido como producto tensorial de p factores iguales a T_x y q factores iguales a T_x^*.

Si se quiere conservar una mayor uniformidad con la definición de Chevalley, cabe decir: tensor de tipo (p,q) en x es toda aplicación multilineal del producto directo $T_x \times T_x \times T_x \ldots \times T_x \times T_x^* \times \ldots \times T_x^*$ (con p factores T_x y q factores T_x^*) en los números reales, que viene a ser la versión moderna de la definición de tensor como conjunto de coeficientes de una forma multilineal invariante (Levi-Civita, *The absolute differential calculus*, pág. 71) o aún como la misma forma multilineal (H. Weyl, *Space, time, matter*, p. 36).

Una vez adquiridos, a través de definiciones precisas e intrínsecas, los conceptos de variedad diferenciable y de tensores sobre la misma, se puede emprender la tarea de edificar la geometría diferencial con este bagaje de armas renovadas. Por lo menos de la geometría que parte de datos tensoriales, como es la geometría de Riemann cuyo dato inicial es un tensor simétrico g_{ij} dos veces covariante cuya forma cuadrática asociada $g_{ij}x^i x^j$ sea definida y positiva en todo punto de la variedad. Esta última condición equivale a decir que su signatura es $+ + \ldots +$, o sea, que en un particular sistema de coordenadas sus componentes pueden, en cada punto, reducirse a $g_{ij} = 0$, si $i \neq j$, $g_{ii} \neq 0$.

Un primer éxito de los nuevos puntos

de vista fué el siguiente, obtenido por Whitney en 1936 (loc. cit. nota [4]). Dada una V_n ¿se podrá siempre definir en ella una estructura de Riemann?, en otras palabras, ¿existirá siempre un tensor simétrico g_{ij} definido sobre ella y de signatura $+ + \ldots +$ en todo punto? Obsérvese que el problema no se presenta desde el punto de vista local, pues para regiones suficientemente limitadas de V_n la existencia es evidente. Se trata de un problema esencialmente global. Whitney resolvió el problema por la afirmativa, demostrando que toda V_n se puede sumergir en un espacio euclidiano de dimensión $2n + 1$ con lo cual la métrica euclidiana de este último subordina una de Riemann sobre V_n. Más tarde se han dado otras demostraciones del mismo teorema, simplificadas por el uso de la teoría de espacios fibrados (ver por ejemplo Steenrod, *The Topology of Fiber Bundles*, Princeton, 1951, p. 58).

El resultado pudiera parecer evidente, pero su interés se pone de manifiesto al intentar generalizarlo a la posible existencia de métricas indefinidas, es decir, de signatura con $m > 0$ signos negativos. Encuentra entonces Ehresmann (*C. R. Acad. Sc. Paris, 216*, 1943, p. 628) que para ello es condición necesaria y suficiente la existencia de un campo continuo de espacios lineales tangentes de dimensión m. Por ejemplo, para que sobre una variedad V_4 exista una métrica de signatura $+ + + -$ (como es la exigida por la teoría de la relatividad para el espacio-tiempo) es necesario y suficiente que sobre ella exista un campo continuo de vectores; por tanto, según un teorema clásico de Hopf, si V_4 es compacta, la condición es que su característica de Euler-Poincaré sea nula. Otra demostración de este resultado se encuentra en Steenrod (loc. cit. pág. 207).

La geometría de Riemann es tan sólo un ejemplo —posiblemente el más importante— de una gran cantidad de geometrías posibles de definir sobre una variedad diferenciable. Estas geometrías, en el tratamiento clásico parten de la idea de "objeto geométrico", es decir "de un conjunto de N componentes dadas en un particular sistema de coordenadas y de una ley de transformación que permita calcular el valor de las mismas en cualquier otro sistema de coordenadas".

Los vectores y tensores son objetos geométricos, pero hay muchos otros, principalmente las llamadas *conexiones* (afines, proyectivas, conformes...). Las geometrías de los objetos geométricos, muy en boga y con mucho éxito entre 1920 y 1940 tienen el inconveniente de su carácter local, ya que todo elemento definido a partir de un sistema de coordenadas no puede tener más campo de validez que el de las coordenadas mismas, el cual en general no cubre toda la variedad. Cierto que este inconveniente se puede obviar empalmando de manera conveniente los distintos campos de validez de los sistemas de coordenadas, pero con ello se sale ya del campo de acción apropiado del cálculo tensorial y las cuestiones se complican; es preferible encontrar otros puntos de partida que ya sean intrínsecos y globales desde su misma definición.

La teoría de los objetos geométricos corresponde a lo que hemos llamado geometría analítica. La reacción sintética, ya iniciada para las definiciones de vectores y tensores, se propuso extender sus posibilidades a todo objeto geométrico, vale decir, a toda geometría. Para ello fué necesario ir jalonando el camino con nuevas definiciones, que apoyándose cada una en las precedentes, permitieran disponer al fin de los elementos necesarios. Fué útil en este sentido el concepto de espacio fibrado (Whitney, Ehresmann, Steenrod), en particular de espacio fibrado principal.

No vamos a entrar en el detalle de estas definiciones. Baste decir que en los últimos quince años se ha avanzado mucho en este sentido. Se tienen ya definiciones sintéticas de todos los objetos geométricos y se dispone de los elementos fundamentales necesarios para cosechar frutos.

La exposición moderna tiene las dos ventajas ya señaladas: a) Como toda labor de síntesis, permite disminuir el simbolismo y concentrar la atención en los puntos verdaderamente fundamentales; b) Al liberarse de las coordenadas, desaparece el carácter local de las definiciones clásicas. Pero tiene también una tercera ventaja muy importante. Al poner de manifiesto los elementos esenciales permite saber cuáles deben quedar inamovibles y cuáles son caso particular de otros más generales, abriendo camino a nuevas investigaciones. De la misma manera como la geometría proyectiva del siglo XIX abrió las puertas al estudio y clasificación de todas las geometrías del grupo lineal y dió lugar a otras geometrías aparecidas al sustituir este grupo por otro más general hasta desembocar en el programa de Erlangen de F. Klein (1872), así el tratamiento *sintético de las conexiones ha permitido* a Ehresmann señalar la importancia de muchas nuevas estructuras posibles de definir sobre las variedades diferenciables. En efecto, cambiando los grupos estructurales de los espacios fibrados, aparece una interesante variedad de estructuras, como son las llamadas casi-compleja, casi-hermitiana, casi-cuaternioniana, etcétera. Sobre ellas señalaremos sólo los trabajos de Ehresman [7] y Liebermann [8], en los cuales hay abundantes referencias y sugerencias para trabajos futuros.

Los ejemplos anteriores pueden dar una idea de la tendencia actual en el campo de la geometría diferencial. Hacia ella han sido dirigidos, en busca de problemas en que ejercitarse, los poderosos medios que fueron creados hace pocos lustros para la topología, los cuales, a su vez, procedían del exuberante florecimiento del álgebra moderna del primer cuarto de siglo.

Con los nuevos métodos han surgido nuevos problemas. Por suerte, los nuevos puntos de vista no han conducido sólo a una generalización artificial de resultados conocidos, ni a una fría fundamentación subterránea. Se han presentado muchos problemas nuevos sin análogos en las formulaciones clásicas. La fundamentación realizada ha servido, no sólo para fortalecer, sino también para agrandar el edificio de la geometría.

En una conferencia dada en Berna en 1931 [9], Hermann Weyl pasaba revista a la matemática de los años inmediatamente precedentes y mostraba como casi toda la obra realizada se refería a la topología y al álgebra abstracta y dentro de estos campos, por un lado a la generalización sin límite de resultados anteriores y, por el otro lado, a la formalización y fundamentación axiomática de los mismos. Terminaba diciendo: "Antes de generalizar, formalizar o axiomatizar, es necesario disponer de la substancia matemática para ello. Pienso que esta substancia matemática, en cuya formalización nos hemos ocupado en los últimos decenios, está próxima a agotarse. Por esto me imagino que la matemática volverá a ser cosa difícil para las nuevas generaciones".

Para la geometría diferencial, las últimas generalizaciones han creado, a su vez, nueva substancia matemática. Y es justamente el cultivo de esta nueva substancia lo que ofrece amplias perspectivas para el futuro. Tal vez sea un principio general, en cuya virtud la matemática aparece como inagotable: toda generalización bien dirigida no es nunca fin, sino comienzo de nuevas teorías.

Los nuevos métodos sintéticos permiten una comprensión más efectiva de lo que las distintas geometrías contienen en su base y fundamento. Estos métodos, sin embargo, necesitan para su progreso crear su propio simbolismo. Desaparecen las coordenadas, pero aparecen grupos, pseudogrupos, homomorfismos, homotopías, diagramas, sucesiones exactas... y se va introduciendo un cálculo operatorio con estos elementos y un simbolismo que, paulatinamente, llevan a una nueva geometría analítica, de otro orden que la tradicional, pero en la que ya se vislumbra un futuro lleno de sobrecargado formulismo. Nuevamente se hará necesaria la labor de otros matemáticos que vuelvan a podar las superfluas ramificaciones y a introducir nuevos conceptos sintéticos que condensen y aclaren los resultados adquiridos y abran nuevas vías a la investigación geométrica. Es a esta marcha alternada, sin pausa ni retroceso, con horizontes cambiantes pero con el fin definido de conocer cada vez más y más claro, que la geometría debe su eternidad.

[7] C. Ehresmann, *Sur les varietés presque complexes*, Proc. of the International Congress of Math, 1950, Vol. II, págs. 412-419.

[8] P. Liebermann, *Sur les structures presque complexes et autres structures infinitésimales régulières*, Bull. de la Soc. Math. de France, 83, 1955, páginas 195-224.

[9] *Unterrichtbläter für Mathematik und Naturwissenschaften*, año 38, Nº 6, 1932, págs. 177-188.