Las probabilidades geométricas y la geometría integral (*)

por L. A. SANTALÓ

Sub-Director del Instituto de Matemáticas de la Facultad de Ciencias Matemáticas, Físico-Químicas y Naturales de la Universidad Nacional del Litoral (República Argentina)

I. PROBABILIDADES FINITAS

1. — **Definiciones y ejemplos.** Dado un número finito de casos posibles n y, entre ellos, un número finito de casos favorables m, la probabilidad de que elegido al azar uno de los casos posibles, resulte favorable, se define como el cociente

$$p = \frac{m}{n} . \tag{1.1}$$

Hay que tener en cuenta que los casos posibles sean todos "igualmente probables", es decir, que entre ellos no pueda hacerse distinción particular.

De esta definición se deduce que la probabilidad p está siempre comprendida entre 0 y 1, valiendo 0 cuando el caso sea imposible y 1 cuando sea seguro que va a ocurrir.

Los ejemplos típicos de probabilidades entre un número finito de casos posibles y que fueron también los primeros estudiados al nacer el Cálculo de Probabilidades a raiz de una correspondencia entre los matemáticos franceses P. de Fermat (1601-1665) y B. Pascal (1623-1662) sostenida en 1654, se encuentran en el juego de dados. La probabilidad de sacar el número 2, por ejemplo, con un dado lanzado al azar es igual a 1/6. La probabilidad

(*) Conferencia pronunciada en la Facultad de Ingeniería de Montevideo el día 2 de Agosto de 1945.

de que, lanzando simultáneamente 3 dados al azar se obtenga una suma igual a 10 es igual a $27/216 = 1/8$, puesto que se puede contar que el número de casos posibles es $6^3 = 216$ y el de casos favorables 27.

Cuando se consideran problemas más complicados, la enumeración de los casos posibles y favorables deja de ser tarea simple, siendo necesario utilizar los artificios del cálculo matemático y ciertas reglas que constituyen las bases del Cálculo de Probabilidades.

Históricamente, por ejemplo, es notable el problema siguiente:

Dos dados se lanzan simultaneamente n veces seguidas; ¿cuál es la probabilidad de obtener por lo menos una vez el doble seis?.

Mucho más fácil que el cálculo de la probabilidad pedida es el cálculo de la probabilidad de que ninguna vez se saque el doble seis; en efecto la probabilidad de no sacar el doble seis en una jugada es $35/36$ y la de no sacar el doble seis en n jugadas será $(35/36)^n$. Como la suma de las probabilidades de no sacar el doble seis y la de hacerlo por lo menos una vez debe ser igual a la unidad, puesto que es seguro que uno de los dos casos debe ocurrir, resulta que la probabilidad buscada vale

$$p = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^n. \tag{1.2}$$

Si se pide el valor de n para que p valga $1/2$, se obtiene

$$n = \frac{\log 2}{\log 36 - \log 35} = 24,6\ldots$$

Esto nos dice que en 24 jugadas la probabilidad de sacar el doble seis es menor que la de no sacarlo y en cambio en 25 jugadas la probabilidad de sacar por lo menos una vez el doble seis es ya mayor que la de no sacarlo. Este hecho extrañaba en 1654 al Caballero de Meré, noble francés que creyendo ver en ello una paradoja acudió a Pascal, el cual resolvió por primera vez el problema (1).

Otro problema curioso, estudiado bajo diferentes formas por Montmort, Euler, Lambert y Laplace es el siguiente:

(1) Ver *Oeuvres de Fermat*, tomo II, pág. 296, carta de Pascual a Fermat del 29 de Julio de 1654.

Dos jugadores tienen un juego de 40 naipes cada uno y van sacando simultáneamente y uno a uno estos naipes, ¿cuál es la probabilidad de que por lo menos una vez los dos naipes sacados al mismo tiempo sean iguales?.

Se demuestra (2) que esta probabilidad es igual a

$$1 - \left(1 - \frac{1}{40}\right)^{40} = 0{,}632 \; . \; . \; .$$

es decir, hay aproximadamente una probabilidad del 63 °/o de que dos naipes coincidan.

2. — Teorema de Bernoulli. Para enlazar los resultados teóricos con los obtenidos experimentalmente, o sea, para ver la relación entre la "probabilidad" de un cierto suceso y la "frecuencia" con que el mismo se presenta al realizar practicamente la experiencia un número creciente de veces, se tiene el fundamental teorema de Jacob Bernoulli, publicado en su obra póstuma "Ars Conjectandi" aparecida en 1713. Dicho teorema dice:

Si la probabilidad de un suceso es p y al realizar la experiencia n veces dicho suceso tiene lugar m veces, el cociente m/n se acerca tanto como se quiera a p, con tal de tomar n suficientemente grande.

Consideremos, por ejemplo, la última cifra del premio mayor de un sorteo de lotería. La probabilidad de que esta cifra sea una determinada, por ejemplo un 4, es 1/10. El teorema de Bernoulli afirma que considerando un número suficientemente grande de sorteos, la cifra 4, como cualquier otra, habrá salido como cifra final del premio mayor un número de veces muy próximo a la décima parte del número total de sorteos y el grado de aproximación será tanto mayor cuanto mayor sea el número de sorteos. Este teorema de Bernoulli se demuestra matematicamente, pero basta un poco de atención para ver que él es muy natural y, en realidad, una simple consecuencia del principio de razón suficiente. En efecto, refiriéndonos al ejemplo concreto mencionado, se tiene: si todas las cifras, de 0 a 9, son igualmente probables, no hay razón ninguna para que una de ellas salga con más frecuencia que otra (puesto que en tal caso, si alguna saliera con mayor frecuencia, sería señal de que hay alguna causa que obliga a ello, lo que equivaldría a decir que no son todas las cifras igualmente

(2) Ver, por ejemplo, E. Czuber, *Wahrscheinlichkeitsrechnung*, 1908, p. 37, donde se encuentra la historia y bibliografía sobre el problema.

probables y que el sorteo está mal hecho) y por tanto, todas saldrán, en un número suficientemente grande de sorteos, un mismo número de veces, igual al décimo del total.

II. PROBABILIDADES NUMERABLES

3. — **Definiciones y ejemplos.** Cuando el número de casos posibles no es finito, los problemas de probabilidades ya no se pueden resolver contando los casos posibles y favorables. Se distinguen entonces dos casos, según que el infinito de los casos posibles sea numerable o no numerable.

Los problemas referentes a probabilidades "numerables" o sea, aquellos en que el número de casos posibles es infinito numerable, son en general los más difíciles y menos estudiados. En ellos, para evitar paradojas, hay que definir bien como se debe entender que se procede para dar un elemento al azar.

Supongamos, por ejemplo, la serie natural de los números

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \ldots \ldots \tag{3.1}$$

y que se pida la probabilidad de que un número elegido al azar sea par. Si la ordenación es la natural, indicada en (3.1), parece natural decir que la probabilidad es $1/2$. Pero si los mismos números naturales viniesen ordenados en la forma

$$1, 3, 2, 5, 7, 4, 9, 11, 6, \ldots \ldots$$

de manera que los números pares se vayan intercalando entre cada dos números impares, la probabilidad parece natural que sea $1/3$. Analogamente se podrían ordenar los números naturales de manera que la probabilidad de que un número sea par tuviera cualquier valor.

Esto prueba que para los problemas de probabilidades numerables hay que dar la *ordenación* en que se suponen dados los casos posibles. Una vez dada la ordenación, la probabilidad se define como *el límite de la probabilidad finita correspondiente a tomar un número finito de casos posibles y hacer luego crecer este número hasta infinito.*

En todos los ejemplos que damos a continuación supondremos que la ordenación de los números naturales sea la ordinaria (3.1).

Consideremos un ejemplo más complicado que el anterior.

Dada la serie natural de los números (3.1), *¿cuál es la probabilidad de que un número elegido al azar sea primo?*

Llamando, como es costumbre, $\pi(n)$ al número de números primos inferiores a n, la probabilidad buscada será, según la definición dada,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\pi(n)}{n} . \tag{3.2}$$

Es sabido que este límite vale cero; por tanto: la probabilidad de que un número elegido al azar sea primo es nula.

Este ejemplo hace aparecer un hecho nuevo que no ocurría en las probabilidades finitas y es que, en las probabilidades numerables, la probabilidad de un suceso puede ser igual a cero sin que ello signifique que el suceso es imposible. En estos casos cabe estudiar el orden infinitesimal de este cero. Por ejemplo, en el caso considerado, se demuestra que (3.2) tiende a cero con el mismo orden que $1/\log n$, es decir, se verifica (3)

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{\pi(n)}{n} : \frac{1}{\log n} \right) = 1 . \tag{3.3}$$

Relacionados con la teoría de números se encuentran otros muchos problemas de probabilidades numerables cuya solución no es en general simple. Nos limitaremos a mencionar algunos como ejemplo.

a) *La probabilidad de que dos números enteros elegidos al azar resulten primos entre si vale* $6/\pi^2$.

La demostración es fácil recordando algunos resultados de la teoría de números. En efecto, sea p un número primo; la probabilidad de que un número elegido al azar resulte divisible por p es $1/p$ y la probabilidad de que dos números elegidos al azar resulten ambos divisibles por p será $1/p^2$. Luego la probabilidad de que los dos números elegidos al azar no resulten ambos múltiplos de p será $1-1/p^2$. Por consiguiente la probabilidad buscada será

(3) Este resultado, uno de los más importantes de la teoría de números, no es nada fácil de demostrar. Fué ya sospechado por Legendre y después de muchas tentativas por parte de Dirichlet, Tchebychef, Riemann y Gauss, que fueron obteniendo resultados parciales, fué demostrado completamente por Hadamard y de la Vallée Poussin, independientemente, en 1896. Ver por ejemplo E. LANDAU, *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen* Leipzig und Berlin, 1909.

$$\Pi\left(1-\frac{1}{p^2}\right)$$

extendido el producto a todos los números primos. Se demuestra facilmente (4) que

$$\Pi\frac{1}{1-p^{-2}}=\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

extendida la suma a todos los números, primos y no primos, desde 1 a ∞. Se sabe además que esta última suma vale $\pi^2/6$, de donde resulta el teorema enunciado.

Analogamente, recordando que (5)

$$\Pi\frac{1}{1-p^{-2s}}=\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n^{2s}}=\frac{2^{2s-1}B_s}{(2s)!}\pi^{2s}$$

donde el primer producto está extendido a todos los números primos y la sumatoria a todos los números enteros y positivos, siendo B_s los números de Bernoulli, o sea,

$$B_1=\frac{1}{6},\quad B_2=\frac{1}{30},\quad B_3=\frac{1}{42},\quad B_4=\frac{1}{30},\quad B_5=\frac{5}{66},\ \ldots$$

resulta:

b) *Dados 2s números enteros al azar, la probabilidad de que ellos no tengan ningún divisor primo común vale*

$$\frac{(2s)!}{2^{2s-1}B_s\,\pi^{2s}}.$$

Otros problemas curiosos de probabilidades numerables son:

c) *La probabilidad de que el cociente entero entre dos números enteros elegidos al azar sea un número impar vale* $\log\sqrt{2}=0{,}3464\ldots$

d) *La probabilidad de que en la división de dos números enteros elegidos al azar la primera cifra decimal sea un 4 o un 5 vale* (6)

$$\frac{1}{60}\left[6\pi\sqrt{25-10\sqrt{5}}-19\right].$$

(4) Ver por ejemplo G. H. HARDY y E. M. WRIGHT, *An introduction to the theory of numbers*, Oxford 1938, pág. 245.

(5) HARDY-WRIGHT, Loc. cit. pág. 244.

(6) El problema a) es debido a E. Cesaro (Mathesis, vol. I, 1881), siendo obtenido también más tarde independientemente por J. J. Sylvester (Comptes Rendus de la Ac. Sciences de Paris, vol. 96, 1883, pág. 409). Los problemas c) y d) son también debidos a Cesaro (*Eventualités de la division arithmétique*, Annali di Matematica Pura ed Applicata, serie II, tomo XIII) donde puede verse la demostración, junto con otros problemas análogos.

No vamos a extendernos sobre las probabilidades numerables, que unicamente hemos mencionado de paso, como puente de transición entre las probabilidades finitas y las continuas. Añadiremos solamente que otro tipo de problemas pertenecientes al mismo campo ha sido introducido por E. Borel en su memoria titulada "*Les probabilités dénombrables et leurs applications arithmétiques*" (Rendiconti Circolo Matemático di Palermo, vol 27, 1909) (7) donde se encuentran planteados problemas tan atractivos como el siguiente: *Dada al azar una ecuación algebraica con coeficientes enteros, ¿cuál es la probabilidad de que tenga una raíz racional?* Este problema equivale a decir: Dado el conjunto de los números algebraicos (conjunto numerable), ¿cuál es la probabilidad de que elegido al azar uno de ellos resulte un número racional (cuyo conjunto es también numerable)?

III. PROBABILIDADES GEOMÉTRICAS

4. — Problema de la aguja de Buffon. Cuando el conjunto de los casos posibles tiene la potencia del continuo, el problema se llama de probabilidades continuas o geométricas. En este caso la probabilidad se define de manera análoga a como se ha hecho en el N.° 1, con la diferencia de que, como ya no se puede hablar de "número" de casos posibles o favorables, se sustituye el "número" por la "medida".

Se tiene así: *Dado un conjunto de casos posibles P y un conjunto de casos favorables F contenido en él, se llama probabilidad de que un elemento elegido al azar en P pertenezca a F, al cociente entre la medida de F y la medida de P.*

Esto obliga a definir la medida para cada tipo de conjuntos y se comprende, además, que variando la medida adoptada pueda variar el valor de la probabilidad.

El primer problema de probabilidades geométricas es el llamado "problema de la aguja" de Buffon, publicado por este autor en su "Essai d'Arithmétique morale" como suplemento de su famosa Historia Natural en 1787. El problema consiste en lo siguiente: Estando dibujadas en un plano un haz de rectas paralelas a distancia d, se arroja al azar sobre el mismo una aguja de

(7) Esta memoria de Borel se encuentra reproducida y ampliada, como nota V de sus *Leçons sur la theorie des fonctions*, 3a. ed., Gauthier-Villars, Paris 1928.

longitud a; siendo $a < d$, se pide la probabilidad de que la aguja corte a alguna paralela.

Se comprende que el número de posiciones posibles de la aguja es infinito y aún un infinito de tres dimensiones, puesto que para fijar una de ellas hay que dar, por ejemplo, la posición en el plano del punto medio de la aguja, o sea las coordenadas x, y del mismo, y el ángulo φ que ella forma con una dirección fija. El número de posiciones favorables en que la aguja corta a alguna paralela es también infinito continuo; estamos, por tanto, ante un problema de probabilidades continuas o geométricas.

Para resolver el problema hay que hallar la "medida" del conjunto de posiciones posibles y la del conlunto de posiciones favorables. Suponiendo que no haya direcciones privilegiadas, como medida se toma en ambos casos la integral triple $\iiint dx\, dy\, d\varphi$ extendida respectivamente a todos los valores posibles de x, y, φ en el plano y a todos los valores para los cuales la aguja queda en posición en que corta a alguna. paralela. El resultado es que la probabilidad buscada vale [8]

$$p = \frac{2a}{\pi d}. \tag{4.1}$$

Lo más curioso de este resultado es que, inversamente, si se conoce p, se puede deducir el valor de π. Pero p, por el teorema de Bernoulli, se puede obtener con tanta aproximación como se desee procediendo experimentalmente, es decir, arrojando al azar n veces una aguja sobre un plano dividido por un haz de rectas paralelas y viendo el número m de veces en que ella corta alguna paralela. El cociente m/n, que es la probabilidad experimental o frecuencia, sabemos que al tomar n suficientemente grande, se acercará a p en tanto como se quiera con una probabilidad tendiendo a uno. Midiendo d y a y realizando la experiencia un número n creciente de veces, se tiene un método para obtener el número π al azar.

La experiencia se ha repetido varias veces y siempre, como no podia ser de otra manera, se han obtenido resultados concordantes con la teoría [9].

(8) La demostración se puede ver, por ejemplo, en G. CASTELNUOVO, *Calcolo delle Probabilitá*, 1919, pág. 146.

(9) Se puede ver una reseña de los mismos en el libro citado de CASTELNUOVO, pág. 148.

Más adelante, N.° 10, veremos otros métodos para obtener el mero π al azar.

5. — **La paradoja de Bertrand.** Después del primer problema de ffon, los ejemplos de problemas de probabilidades geométricas multiplicaron, aumentado su complejidad. Fué entonces cuan- se vió la necesidad de aclarar un poco más los principios que servían de fundamentos.

El hecho es común a todas las teorías matemáticas y tal vez todas las ramas de la Ciencia. En sus principios las teorías na- n y progresan a base de ideas intuitivas, logicamente poco pre- ias, pero que constituyen la única manera de poder avanzar en- las malezas de un terreno virgen. Es unicamente más tarde, ando el edificio tiene ya cierta corpulencia, que tiene lugar la *visión de los fundamentos*, procurando asegurar los principios sicos con la rigidez y seguridad de una construcción axiomáti- o de unas definiciones bien precisas. Esto ha ocurrido, por emplo, en la teoría de las series infinitas: mucho tiempo se eró con ellas y fueron utilizadas en el Análisis, sin que tuviera gar el estudio indispensable de sus condiciones de convergen- a. Se ha operado igualmente desde la antigüedad con los núme- s irracionales y hasta el siglo pasado, con Cantor y Dedekind, fueron fundamentados logicamente.

Ello es debido a que en los comienzos se opera con los ele- entos más simples de las teorías, con los cuales, por su claridad, intuición suple al razonamiento lógico. Pero al ir ensanchando dominio de acción se llega a los elementos "raros", a los ca- s "patológicos", los cuales, sin unos principios bien fundamen- dos se prestan a originar paradojas.

Este fenómeno natural ha ocurrido también en las probabilida- es geométricas. Durante mucho tiempo se estudiaban y resolvían oblemas, dando la solución correcta y acorde a lo que todos s matemáticos "sobreentendían", sin que hubiera sido explicita- ente formulado. Y de esta manera, al ir resolviendo problemas rticulares cada vez más complicados, se llegó bien pronto a la radoja. Fué la llamada paradoja de Bertrand, bien conocida, pero ie vamos a recordar rápidamente.

Se trata de hallar la probabilidad de que una cuerda de un círcu- , trazada al azar, resulte mayor que el lado del triángulo equiláte- inscrito. Bertrand da tres soluciones distintas de este problema:

a) Sea a el lado del triángulo equilátero inscrito en el círculo dado. Fijado un extremo A de la cuerda arbitraria, para que su longitud sea mayor que a, el otro extremo debe caer en el arco subtendido por el lado opuesto a A del triángulo equilátero inscrito uno de cuyos vértices sea A. Como este arco es la tercera parte de la circunferencia total, resulta que la probabilidad buscada vale 1/3.

b) La cuerda arbitraria queda también determinada por su punto medio. Para que ella sea mayor que a, este punto medio debe caer en el interior del círculo concéntrico al dado y de radio mitad. Como el área de este círculo es igual a 1/4 de la del círculo dado, la razón entre las medidas de los casos favorables y posibles es 1/4.

c) Como la dirección de la cuerda es cualquiera, por simetría, se puede considerar fijada de antemano. Consideremos entonces el diámetro perpendicular a esta dirección. Para que la cuerda sea mayor que a, ella debe cortar a este diámetro a una distancia del centro menor que la mitad del radio. For tanto, si como medida de los casos favorables y posibles se toma la longitud que llenan los puntos correspondientes de dicho diámetro perpendicular, la probabilidad resulta igual a 1/2 [10].

La explicación de esta paradoja es inmediata. Los casos considerados responden a maneras diferentes de "dar una cuerda arbitraria". Según la manera como esta cuerda sea dada la probabilidad toma uno u otro valor. Experimentalmente se puede comprobar que realizando la prueba mediante dispositivos que correspondan a las tres maneras a), b), c) indicadas para fijar la cuerda, el valor de la probabilidad que se obtiene concuerda, en cada caso, con el obtenido teoricamente.

IV. LA GEOMETRIA INTEGRAL

6. — **Origen.** La manera de evitar paradojas como la de Bertránd, debe consistir en aclarar bien desde un principio que "medida" se debe tomar en cada caso para los elementos del conjunto dado, para poder aplicar la definición de probabilidad como cociente de las medidas de los conjuntos de casos favorables y posibles.

(10) La paradoja de Bertrand puede verse con más detalle en R. DELTHEIL, *Probabilités Géométriques*, Paris, Gauthier-Villars, 1926, pág. 7.

Puesto que, en general, las probabilidades geométricas tratan de conjuntos de elementos geométricos, hay que empezar por definir la medida de estos conjuntos. Es preciso, por tanto, definir la medida de conjuntos de puntos, rectas, planos y, más generalmente, conjuntos de figuras congruentes cualesquiera.

El criterio que se tomó para definir estas medidas fué que ellas *deben ser invariantes por los movimientos del espacio*. Es decir, trasladando en bloque, sin deformación, todo el conjunto de un lugar a otro del espacio, la medida no debe variar.

Con este criterio se estudiaron las medidas de conjuntos de puntos y rectas en el plano y los conjuntos de puntos, rectas y planos del espacio ordinario de 3 dimensiones (11), con lo cual ya se pudieron resolver todos los problemas de probabilidades geométricas en los que intervienen estos elementos.

Faltaba hallar, como generalización, las medidas para conjuntos de rectas, planos y en general variedades lineales cualesquiera del espacio euclidiano de n dimensiones. Esto fué hecho por Blaschke en el primer trabajo en el que introdujo el nombre de Geometría Integral (12). En lo que desde entonces se ha llamado Geometría Integral ha jugado también un papel preponderante la medida de conjuntos de figuras congruentes cualesquiera, o medida cinemática, de la que hablaremos más adelante (13).

7. — Medida de conjuntos de puntos y rectas. Si se trata de conjuntos de puntos sobre una recta, la medida correspondiente es la misma que se define en la teoría de conjuntos. Por ejemplo, la medida del conjunto de puntos pertenecientes a un segmento es igual a la longitud del mismo. Por tanto: dados dos segmentos, uno interior al otro, la probabilidad de que un punto elegido al azar sobre el mayor pertenezca también al menor, es igual al cociente entre las longitudes de ambos segmentos.

Sin ninguna dificultad se pasa a los conjuntos de puntos del

---

(11) Este estudio se puede ver, por ejemplo, en la obra citada de DELTHEIL.

(12) W. BLASCHKE, *Integralgeometrie I, Ermittelung der Dichten für lineare Unterräume im E_n*, Actualités scientifiques et industrielles, Hermann et Cie., N.º 252, París 1935.

(13) La obra de Geometría Integral que reune gran parte de los trabajos publicados hasta la fecha de su publicación es W. BLASCHKE, *Vorlesungen über Integralgeometrie*, Vol. I y II, Hamburger Mathematische Einzelschriften, 1936 - 1937.

plano o, en general, de un espacio de cualquier número de dimensiones. Si C es, por ejemplo, un conjunto de puntos del plano y C_1 otro conjunto contenido en él, la probabilidad de que un punto elegido al azar en C pertenezca también C_1 es igual al cociente entre el área de C_1 y el área de C. Se deduce de aquí: 1.° Que la probabilidad es siempre igual o menor que la unidad; 2.° que ni la probabilidad cero significa imposibilidad, ni la probabilidad uno significa certeza absoluta. En efecto, si el conjunto C_1 está formado, por ejemplo, por los puntos de una curva contenida en C, la probabilidad anterior es cero y sin embargo es posible que el punto elegido pertenezca a C_1.

Al pasar a conjuntos de rectas del plano, la cuestión presenta mayor novedad. Supongamos en el plano dado unos ejes coordenados x, y y una recta G cualquiera. Para determinar la recta G, se puede dar su distancia p al origen de coordenadas y el ángulo α que la normal a la recta forma con el eje x. Los valores p, α son, pues, las coordenadas que fijan la posición de la recta. Dado un conjunto de rectas, se define entonces como medida del mismo a la integral $\iint dp\, d\alpha$ extendida a todas las rectas del conjunto. Para abreviar es costumbre poner

$$dG = dp\, d\alpha \tag{7.1}$$

y llamar a la expresión diferencial dG *densidad para conjuntos de rectas*.

Se demustra que, salvo un factor constante, la medida así definida es la única que cumple la propiedad mencionada de ser invariante por movimientos del plano. Si por ejemplo se tomaran para fijar la posición de G los valores de la abscisa t de su punto de intersección con el eje x y el ángulo φ que ella forma con el mismo eje y se tomara como medida la integral $\iint dt\, d\varphi$, esta medida tendría el inconveniente de no ser invariante por movimientos, es decir, dependería de la posición particular de los ejes coordenados elegidos.

La primera aplicación de la medida de conjuntos de rectas se remonta ya a Cauchy (14), quien obtuvo el siguiente notable resultado:

(14) A. CAUCHY, *Mémoire sur la rectification des courbes et la quadrature des surfaces courbes.* Mémoires de l'Academie des Sciences, t. XXII, pág. 3, Paris 1850 (Oeuvres complètes, série I, t. II, pág. 167, Paris 1908).

Sea K una curva cualquiera del plano de longitud finita L. iendo G una recta variable del mismo plano, llamamos n al núiero de puntos comunes que ella tiene en cada posición con K. aturalmente n es una función de las coordinadas p, α que fijan . Vale entonces la fórmula integral

$$\int n \, dG = 2 L \qquad (7.2)$$

onde la integración se puede considerar extendida a todo el plao, siendo $n = 0$ para las rectas G que no cortan a K.

En particular, si K es una curva convexa, es siempre $n = 2$, rescindiendo de las rectas tangentes que no influyen en la inteal (7.2) por formar un conjunto de medida cero, y resulta: *La edida del conjunto de las rectas que cortan a una figura plana conxa es igual a la longitud de la misma.*

Como aplicación de este resultado a un problema de probalidades geométricas se tiene: Dadas dos curvas convexas, la priera contenida en la segunda, la probabilidad de que una recta bitraria que corta a la mayor, corte también a la menor, es igual cociente entre las longitudes de ambas.

8. Conjuntos de bandas paralelas.— La parte de plano limita por dos rectas paralelas a distancia $\triangle$ la llamaremos "banda ralela" de anchura $\triangle$ y la representaremos por B. La posición una de estas bandas queda determinada fijando, por ejemplo, paralela media; por tanto como medida de un conjunto de ndas paralelas se tomará la integral de la misma expresión (7.1) e ahora representaremos por

$$dB = dp \, d\alpha \qquad (8.1)$$

en entendido que p, α son las coordenadas de la paralela media la banda B. Según esto, la medida del conjunto de bandas palelas de anchura $\triangle$ que tienen algún punto común con una cur plana convexa K, será igual a la medida de las rectas que corn a la curva convexa paralela exterior a K a distancia $\triangle/2$, o a, igual a la longitud de esta última curva que es fácil calcular le $L + \pi\triangle$. Por tanto: *La medida del conjunto de bandas paralelas anchura $\triangle$ que cortan una curva conexa K de longitud L es $L + \pi\triangle$.*

De aquí: dadas dos curvas convexas K y K_1, la primera inte. or a la segunda, la probabilidad de que una banda paralela de anchura Δ dada al azar de manera que corte a K_1, corte también a K, es igual a

$$\frac{L+\pi\Delta}{L_1+\pi\Delta} \tag{8.2}$$

que para $\Delta = 0$ coincide con el cociente de las longitudes de K y K_1 como debía ser.

Otro ejemplo, que sólo vamos a enunciar es el siguiente (15):

Dada una curva convexa K de área F y longitud L y trazando al azar dos bandas paralelas de anchuras respectivas Δ_1 y Δ_2 de manera que corten a K, la probabilidad de que ellas resulten con algún punto común interior a K vale

$$\frac{2\pi F + \pi L(\Delta_1 + \Delta_2) + \pi^2 \Delta_1 \Delta_2}{(L+\pi\Delta_1)(L+\pi\Delta_2)}.$$

La definición de medida de conjuntos de bandas paralelas de la misma anchura Δ, permite también calcular ciertos "valores medios". Supongamos, por ejemplo, el siguiente problema: *Dada una curva convexa K de área F y longitud L, se trazan al azar sobre ella n bandas paralelas de anchura Δ; se pide el valor medio del área de K que queda sin cubrir.*

Si f es el área de la parte de K que queda sin cubrir para una posición particular de las n bandas paralelas, el valor medio buscado, por definición, es

$$\bar{f} = \frac{\int f\, dB_1\, dB_2\, dB_3 \ldots dB_n}{\int dB_1\, dB_2\, dB_3 \ldots dB_n}, \tag{8.3}$$

donde los dB_i tienen los significados (8.1) correspondientes a cada banda y las integraciones están extendidas a todas las posiciones posibles de las bandas en las que ellas cortan a K. La integral del dominador de (8.3) vale $(L+\pi\Delta)^n$, puesto que las n bandas se suponen trazadas independientemente. Para calcular la integral del numerador, consideremos la integral múltiple

$$J = \int dP\, dB_1\, dB_2 \ldots dB_n$$

(15) Para la demostración, así como para otros varios problemas referentes a bandas paralelas, ver L. A. SANTALÓ, *Geometría Integral 7, Nuevas aplicaciones del concepto de medida cinemática en el plano y en el espacio*, Revista de la Academia de Ciencias de Madrid, 1936.

siendo $dP = dx\, dy$ el elemento de área correspondiente al punto $P(x, y)$ al que se impone la condición de pertenecer a K y ser exterior a todas las bandas B_i. Para calcular la integral J, se puede proceder de dos maneras. Primeramente si se fijan las n bandas, P puede variar por toda el área f interior a K y exterior a las bandas y por tanto J es igual a la integral que figura en el numerador de (8.3). En segundo lugar, si primero se fija P, cada banda B_i podrá variar entre todas las posiciones en que corta a K (de medida $L + \pi \Delta$) menos aquellas en que contiene a P (de medida $\pi\Delta$) y por tanto J vale también $L^n \int dP = L^n F$.

En definitiva se tiene que el valor medio buscado vale

$$\bar{f} = F \left(\frac{L}{L + \pi \Delta} \right)^n . \tag{8.4}$$

Supongamos ahora que el número de bandas tiende a infinito, al mismo tiempo que su anchura tiende a cero, conservando en conjunto la misma anchura total constante D, es decir, de manera que sea

$$n\Delta = constante = D. \tag{8.5}$$

El valor límite de $\bar{f}$ será

$$\lim_{n \to \infty} \bar{f} = F \lim_{n \to \infty} \left\{ \frac{1}{1 + \frac{\pi D}{Ln}} \right\}^n = F e^{-\pi \frac{D}{L}} . \tag{8.6}$$

Este es, por tanto, el valor límite del valor medio del área de la parte de K que queda sin manchar cuando se trazan sobre ella n pinceladas al azar cuya anchura tiende a cero al crecer n según la ley (8.5).

9. Medida cinemática. — Después de los conjuntos de puntos, rectas y bandas paralelas, quedan por estudiar en el plano los conjuntos de figuras congruentes cualesquiera.

La posición de la figura cualquiera K del plano, indeformable, queda terminada fijando uno de sus puntos O y el valor de un ángulo α alrededor de este punto. Si x, y son las coordenadas de O en un sistema cartesiano rectangular, como medida de un conjunto de posiciones de una misma figura K o, lo que es lo mismo, como medida de un conjunto de figuras congruentes con K, se toma la integal triple $\iiint dx\, dy\, d\alpha$ extendida a todos los valores de x, y, α que corresponden a figuras K del conjunto. Obsérvese que esta medida fué la que se tomó para resolver el problema de la aguja de Buffon, en cuyo caso la figura K era la aguja. Para abreviar se suele poner

$$dK = dx\, dy\, d\alpha \tag{9.1}$$

y a esta expresión diferencial dK se le llama *densidad cinemática*. A la medida correspondiente se le llama "medida cinemática" y fué introducida por Poincaré ([16]) pero la idea no fué plenamente desarrollada hasta los primeros trabajos de Geometría Integral.

Como aplicación de la medida cinemática se han obtenido dos fórmulas fundamentales:

1.° Sea K_1 una figura convexa de área F_1 y longitud L_1. Sea K otra figura convexa móvil de área F y longitud L. Se quiere medir el conjunto de todas las posiciones de la figura K en las que tiene algún punto común con K_1. Se demuestra que dicha medida vale

$$\int_{K.K_1 \neq 0} dK = 2\pi\,(F + F_1) + LL_1. \tag{9.2}$$

Es decir, se obtiene el resultado notable de que dicha medida depende unicamente del área y de la longitud de las dos figuras convexas.

Un caso particular de (9.2) es aquel en que K es un círculo de radio r. Entonces se puede tomar como punto x, y que sirve para fijar su posición, el centro del círculo; para cada posición de K en que corte a K_1 el ángulo α puede variar entre 0 y 2π y por tanto (9.2), poniendo $L = 2\pi r$, $F = \pi r^2$ y dividiendo por 2π queda

$$\int_{K.K_1 \neq 0} dx\, dy = F_1 + L_1 r + \pi r^2, \tag{9.3}$$

que es una fórmula bien conocida que da el área limitada por la curva paralela exterior a K_1 a distancia r.

Hay que observar que ya no es fácil, ni posiblemente se pueda, dar una fórmula que exprese la medida de las posiciones de K en las que es *completamente interior* a K_1. Unicamente dicha fórmula es fácil de obtener cuando el radio de curvatura del contorno de K es en todo punto inferior al menor de los radios de curvatura de K_1; en este caso la medida de las posiciones de K en las cuales es completamente interior a K_1 vale $2\pi\,(F+F_1) - LL_1$.

(16) H. POINCARÉ, *Calcul des Probabilités*, Paris 1912, cap. VII.

2.° Sea ahora K_1 una curva fija, abierta o cerrada, de longiad L_1 y K otra curva móvil sin deformación, de longitud L. En ada posición de K, sea n el número de puntos que esta curva ene comunes con K_1; evidentemente n es una función de las vaables x, y, α que fijan la posición de K. Se demuestra entonces llamada *"fórmula de Poincaré"* que generaliza la (7.2) y se exresa

$$\int n \, dK = 4 \, L \, L_1 \tag{9.4}$$

La demostración de las fórmulas (9.2) y (9.4) puede verse en obra citada en la nota ([13]) o bien en L. A. Santaló, *Geometría tegral 4, Sobre la medida cinemática en el plano* (Abhandlungen is dem Mathematischen Seminar der Hamburgische Universität, l. 11, 1936).

La fórmula (9.2) se ha generalizado al espacio y también a firas no convexas. Ver, para ello, la obra de Blaschke citada en nota ([13]).

10. Algunos métodos para la determinación por el azar del mero π. — I. De la fórmula (9.4) se pueden deducir algunas maras, generalizaciones del problema de la aguja de Buffon, para tener el número π al azar.

Supongamos una curva fija de longitud L contenida en una gión del plano de área F. Si sobre esta región se arroja al azar a curva de longitud l, el valor medio del número de puntos de ersección de la curva arrojada con la curva fija, será

$$\bar{n} = \frac{\int n \, dK}{\int dK} = \frac{4 \, Ll}{2 \, \pi \, F} = \frac{2 \, Ll}{\pi \, F} \,. \tag{10.1}$$

Para la realización práctica de la experiencia conviene conerar todo el plano dividido en regiones de área F congruentes uponer en cada una de ellas una curva de longitud L. Entons se puede arrojar la curva de longitud l completamente al azar considerar el número de sus puntos de intersección con las curfijas. El valor medio de este número estará dado por (10.1).

Tomemos, por ejemplo, el plano cuadriculado como indica la 1. Si el lado de los cuadrados vale a, se puede suponer que cada uno le pertenecen dos lados contiguos por cuya repetición forma todo el cuadriculado; por tanto será $L = 2a$ y $F = a^2$. rojando al azar sobre el plano un hilo o un alambre (abierto o rado, deformable o indeformable, puesto que solo interesa la longitud) de longitud l el valor medio del número de puntos de intersección del mismo con las rectas que forman el cuadriculado será

$$\overline{n} = \frac{4\,a\,l}{\pi\,a^2} = \frac{4\,l}{\pi a}. \tag{10.2}$$

Por tanto, arrojando al azar sobre el plano cuadriculado de la fig. 1, un hilo o segmento de longitud l un número N de veces y anotando cada vez el número n_i de puntos de intersección, se tiene, al crecer N,

$$\frac{4\,l}{a}\;\frac{N}{\sum_1^N n_i} \longrightarrow \pi\,. \tag{10.3}$$

En particular, si $l = a/4$, se tiene

$$\frac{N}{\sum_1^N n_i} \longrightarrow \pi\,. \tag{10.4}$$

Si se trata de un segmento rectilineo tal que $l \leqq a$, solamente puede ser $n_i = 0,\ 1,\ 2$, pero las fórmulas (10,3) y (10.4) son válidas aunque se trate de un hilo flexible de longitud constante l y entonces n_i puede tomar valores más grandes.

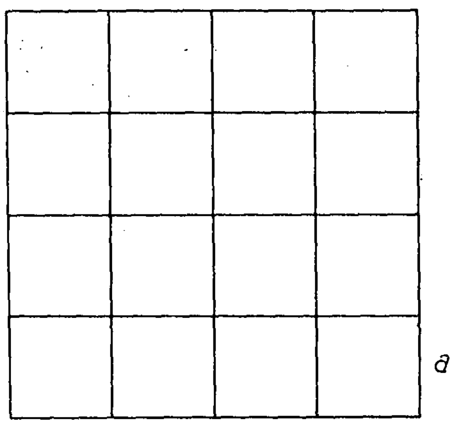

Fig. 1

II. Supongamos ahora ν puntos fijos del plano y una figura K móvil de área F. Llamando n al número de los puntos fijos considerados que en cada posición de K son interiores a esta figura, se demuestra facilmente que

$$\int n\, dK = 2\pi F \nu \tag{10.5}$$

extendida la integración a todas las posiciones de K, puesto que cuando esta figura no contiene ningún punto es $n = 0$.

Por tanto, considerando el plano dividido en regiones congruentes de área F_1 y en cada una de ellas un número constante

ν de puntos, al arrojar al azar sobre el plano la figura K, el valor medio del número de puntos que cubre vale [17]

$$\bar{n} = \frac{\nu F}{F_1}. \tag{10.6}$$

Supongamos, por ejemplo, el mismo cuadriculado de la fig. 1; para cada cuadrado puede considerarse que le pertenece uno de los vértices, los cuales en total constituyen todos los vértices del cuadriculado de la fig. 2. En este caso será $F_1 = a^2$, $\nu = 1$. Por tanto, arrojando sobre el plano de la fig. 2 una figura K de área F al azar, el *valor medio* del número de vértices del cuadriculado que son cubiertos por la misma vale

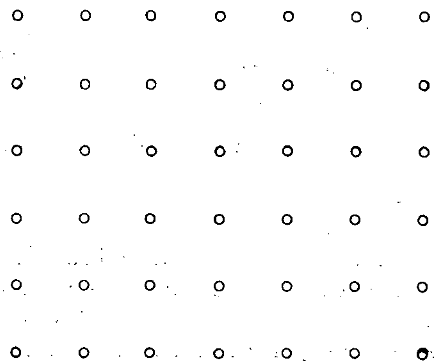

Fig. 2

$$\bar{n} = \frac{F}{a^2}. \tag{10.7}$$

Por ejemplo, si K es un círculo de radio a es $F = \pi a^2$ y por tanto arrojando sobre el plano de la fig. 2 un círculo de radio a un número N de veces y anotando cada vez el número de puntos n_i que quedan cubiertos, se tiene

$$\frac{\sum_1^N n_i}{N} \to \pi. \tag{10 8}$$

11. Observación sobre la realización práctica de las experiencias anteriores. — Si se quiere comprobar practicamente los procedimientos anteriores para la determinación por el azar del número π, es útil acudir al cálculo de probabilidades para que nos dé el número de experiencias a realizar para obtener, con una pro-

(17) La demostración es simple. Se puede ver en L. A. Santaló, *Geometría Integral 31, Sobre valores medios y probabilidades geométricas*, Abhandlungen aus dem Mathem. Seminar der Hamburgische Universität, vol. 13, 1940.

babilidad determinada, el valor medio teórico con un error menor que un cierto número.

Para ello recuérdese que si la probabilidad teórica de un suceso es p y representamos por p_{ex} al valor de la misma obtenido experimentalmente al dividir el número de casos favorables obtenidos en la realización práctica por el número total de casos, se verifica

$$| p - p_{ex} | < \varepsilon \tag{11.1}$$

con una probabilidad

$$P \geqq \frac{2k}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\varepsilon} e^{-k^2 x^2} dx \tag{11.2}$$

siendo $k = \sqrt{\dfrac{N}{2pq}}$, N el número de experiencias realizadas (que se supone bastante grande) y $q = 1 - p$.

Apliquemos esto a cualquiera de las experiencias del tipo I fórmula (10.2). Al arrojar la línea de que se trate sobre la red cuadriculada del plano, podrán resultar diversos puntos de intersección cuyo número representaremos por $i_1, i_2, i_3, \ldots, i_m$. Sea p_r la probabilidad teórica de que se obtengan precisamente i_r puntos de intersección. Por definición de valor medio experimental $\overline{n}_{ex}$ y teórico $\overline{n}$, es

$$\overline{n}_{ex} = \sum_r i_r \, p_{r,ex} \quad ; \quad \overline{n} = \sum_r i_r \, p_r \tag{11.3}$$

siendo $p_{r,ex}$ la probabilidad experimental de obtener exactamente i_r puntos de intersección. Según un teorema clásico del cálculo de probabilidades [18] de (11.2) y (11.3) se deduce que será

$$| \overline{n}_{ex} - \overline{n} | < \varepsilon \tag{11.4}$$

con una probabilidad

$$P \geqq \frac{2K}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\varepsilon} e^{-K^2 x^2} dx \tag{11.5}$$

siendo

$$\frac{1}{K^2} = \sum_r \frac{i_r^2}{k_r^2} \quad \text{y} \quad k_r = \sqrt{\frac{N}{2\, p_r \, q_r}} \,. \tag{11.6}$$

(18) Ver por ejemplo BOREL, *Théorie des Probabilités*, Paris 1924, pág. 130, o bien CZUBER, *Wahrscheinlichkeitsrechnung*, 1908, pág. 260.

Haciendo el cambio de variables $Kx = t$, resulta por valor de probabilidad (11.5) de que se cumpla (11.4)

$$P \geq \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{o}^{\varepsilon K} e^{-t^2} dt \tag{11.7}$$

ndo, según (11.6),

$$K = \sqrt{\frac{N}{2 \sum_r p_r q_r i^2_r}}.$$

Dado P, en unas tablas de la función $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{o}^{x} e^{-t^2} dt$ se deter-
na K y bastará entonces realizar un número de experiencias

$$N \geq 2K^2 \sum_r p_r q_r i^2_r \tag{11.8}$$

ra que se cumpla (11.4) con la probabilidad P.

La dificultad está en que no se conocen en general los valo- de las probabilidades p_r. Un límite seguro, aunque general- nte excesivo, se obtiene observando que siendo $p_r + q_r = 1$, es $q_r \leq 1/4$ y por tanto $\Sigma p_r q_r i^2_r \leq 1/4 \Sigma i^2_r$; luego bastará tomar

$$N \geq \frac{1}{2} K^2 \sum_r i^2_r \tag{11.9}$$

esto que si se cumple (11.9) con mayor razón se cumplirá (11.8).

Se tiene pues que: *Para obtener*

$$| \overline{n}_{ex} - \overline{n} | < \varepsilon$$

una probabilidad mayor o igual que P, basta realizar un número experiencias tal que se cumpla (11.9) donde K se determinará por condición (11.7).

El mismo razonamiento vale para el caso II; entonces i_r re- sentan los números de puntos que pueden ser cubiertos por la ura de área F al arrojarla sobre el plano.

Ejemplo. Sea el procedimiento de II, fórmula (10.8). Los ca- posibles son $i_1 = 2$, $i_2 = 3$, $i_3 = 4$. Por tanto $\sum_r i^2_r = 29$. Si quiere obtener con una probabilidad de un 90 °/₀ el valor de on un error menor de una centésima habrá que buscar en una tabla ([19]) el valor de εK que hace en (11.7) $P = 0,9$. Se obtiene $\varepsilon K = 1,163$. Como se quiere que $\varepsilon \leq 0,01$, será $K \geq 116,3$ y (11.9) nos da

$$N \geq \frac{1}{2} (116,3)^2 . 29 = 196\ 123.$$

Este número es extraordinariamente grande. Resulta bastante menor si solo se pide que el *error relativo* sea menor que 0,01, o sea, que

$$\left| \frac{\bar{n}_{ex}}{\pi} - 1 \right| < \frac{1}{100} .$$

Para ello subsiste el mismo cálculo anterior, con solo sustituir donde dice ε el valor $\varepsilon\pi$. Con ello será $K \geq 116,3 : \pi = 37,01$ y bastará hacer un número N de experiencias tal que

$$N \geq \frac{1}{2} (37,01)^2 . 29 = 19\ 861.$$

12. Un problema para resolver. — Relacionado con el conjunto de todos los puntos del plano de coordenadas enteras (positivas o negativas), o sea, con la red de puntos de la **fig. 2** para el caso, que siempre se puede suponer, de ser $a=1$, en 1939 propusimos el siguiente problema ([20]):

Hallar la figura de área mínima tal que en toda posición contenga por lo menos un punto de la red formada por todos los puntos de coordenadas enteras del plano.

En el trabajo citado insinuábamos que la solución podría ser el círculo de diámetro $\sqrt{2}$, de área $1/2\,\pi$. Más tarde hemos visto que el rectángulo de base 1 y altura $\sqrt{2}$, cuya área es menor que la de dicho círculo, también goza de la propiedad de contener en cualquier posición por lo menos un punto de la red. Todavia se pueden recortar los vértices de dicho rectángulo, de manera que su área disminuya conservando la propiedad mencionada. Queda por tanto pendiente el problema mencionado.

(19) Por ejemplo, BOREL, loc. cit. pág. 52; CZUBER, loc. cit. pág. 385.

(20) L. A. SANTALÓ, *Geometria Integral de figuras ilimitadas*, Publicaciones del Instituto de Matemática, Rosario, Vol. I, N.° 2, pág. 54.

Relacionado con este problema, Hadwiger ([21]) ha demostrado ıe cualquier conjunto cerrado de área unidad puede siempre cocarse de manera que no contenga ningún punto de la red. La gura buscada debe, por tanto, tener área mayor que uno y meor que $\sqrt{2}$.

1) H. HADWIGER, *Bemerkungen über Gitter und Volumen*, Mathematica, vol. XVIII, 1942.