INFLUENCIA DE EINSTEIN EN EL CAMPO MATEMATICO

Dr. Luis A. Santaló

Profesor de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad de Buenos Aires

1. EL EDIFICIO MATEMATICO

Para analizar la influencia de Einstein en la Matemática, conviene hacer un repaso de cómo esta ciencia se ha ido desarrollando y de las distintas modalidades de trabajo con que los matemáticos han actuado en esta obra creadora.

Podemos señalar tres actitudes, complementarias y no excluyentes, que han presidido el progreso matemático, a saber:

a) *Resolver problemas,* para lo cual la facultad preponderante es el *talento;* b) *Crear nuevas ramas,* para lo cual la facultad preponderante es la *imaginación;* c) *Motivar ciertas direcciones de estudio,* para lo cual se necesita principalmente *ingenio.*

Vamos a detallar y a ejemplificar estas distintas actividades.

a) *Resolver problemas.*- Muchas veces el edificio matemático avanza dejando grietas por llenar. Se trata de problemas propuestos que se plantean a los matemáticos y quedan como un reto a su talento. A veces estos problemas tardan siglos en resolverse. No es una tarea fácil, pues el hecho de haber pasado por el tamiz de otros matemáticos que no lograron resolverlos, es un índice de dificultad, tanto mayor cuanto más tiempo llevan planteados y no resueltos. Durante el Renacimiento, este fue un método de trabajo usual entre los matemáticos. Se proponían problemas que se sometían a la agudeza y habilidad de los expertos. Fueron famosos los *Cartelli* de desafíos matemáticos entre Ferrari y Tartaglia de los años 1556 a 1560, algunos dilucidados públicamente, como el encuentro entre ambos matemáticos en la iglesia de Santa María del Giardino en Milán, el 10 de agosto de 1548, ante numerosos espectadores. Otro ejemplo fue el problema de la "braquistocrona" (curva de caída de un cuerpo en tiempo mínimo entre dos puntos no situados en una misma vertical), propuesto en 1696 por Johann Bernoulli a "todos los matemáticos del mundo", con la promesa de "honor, alabanza y aplauso" a quien lograra resolverlo, lo que fue hecho más tarde por el mismo Bernoulli.

Como ejemplos modernos de matemáticos que se distinguieron por resolver problemas pendientes, se pueden citar a F. Lindemann (1852-1939) que en 1882 demostró que el número "pi" (razón de la circunferencia al diámetro) es trascendente, terminando con el secular problema de la cuadratura del círculo; G. D. Birkhoff (1884-1944) que demostró el llamado "último teorema de Poincaré" en 1913 y el teorema ergódico, pendiente desde muchos años atrás, en 1932; J. Hadamard (1865-1963) que en 1896 resolvió un problema sobre la distribución de los números primos que había sido conjeturado por Legendre, Gauss y Riemann (el teorema dice que el número de primos inferiores a un dado número N es de un orden equivalente al cociente entre N y el logaritmo neperiano de N). El mismo Hadamard, en 1923, al introducir la idea de "parte finita" en las integrales impropias, resolvió varios problemas que habían detenido el progreso de la teoría de las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales. En fecha más reciente, cabe citar a K. Appel y W. Haken que en una ardua labor conjunta, ayudada por computadoras, resolvieron el problema de los 4 colores, pendiente desde mediados del siglo pasado. Este fue el primer caso, en la historia de la matemática, que un problema teórico fue resuelto por aparatos mecánicos (por consideraciones teóricas el problema se redujo a colorear 2000 mapas de 200.000 maneras posibles, lo que exigió 12000 horas de computadora, cosa que no hubiera sido posible realizar a mano). Ver [1].

b) *Crear nuevas teorías.*- Es un método de trabajo propio de los matemáticos de mucha imaginación, mediante el cual introducen en el edificio matemático nuevas ramas, que al principio son fáciles y muchas veces causa extrañeza que no se hubieran descubierto antes. Estas teorías son luego desarrolladas por el mismo descubridor o por otros matemáticos; el mérito consiste en haber elegido teorías que luego resultan fructíferas y de gran desarrollo. Aunque en mayor o menor grado todos los matemáticos han sido creadores, como prototipos en que esta tendencia predomina notoriamente, se puede citar a G. Cantor (1845-1918) creador de la teoría de conjuntos que después invadió a toda la matemática y a Sophus Lie (1842-1899) creador de la teoría de grupos contínuos. Vistos desde la perspectiva actual, los trabajos iniciales de ambos son fáciles y simples. El mérito fue la novedad y el acierto en su importancia futura.

También debe incluirse en el tipo de matemáticos creadores a John von Neumann (1903-1957), creador de la teoría de los juegos de estrategia en una fundamental memoria del año 1928 (Mathematische Annalen, vol. 100, págs. 295-320), teoría que luego se extendió y ramificó en muchas direcciones y que, a través del libro *Theory of Games and Economic Behaviour* (Princeton, 1947), escrito en colaboración con O. Morgenstern, tuvo amplia repercusión, no *sólo* en economía, sino en todas las ciencias.

c) *Motivar estudios.*- Para el desarrollo de la matemática es fundamental la motivación. Ella puede originarse por las aplicaciones, como ocurrió, por ejemplo, con muchas ecuaciones diferenciales y funciones especiales que fueron estudiadas por haber aparecido en un problema práctico (ecuación del calor, ecuación de Navier-Stokes, funciones especiales de la física). Con la programación lineal se motivó el estudio de los politopos o poliedros en espacios de varias dimensiones.

Muchas veces, la motivación está fuertemente influída por un factor estético, debido en gran parte al modelo con que se viste o adorna la matemática. Por ejemplo, si se propusiera considerar expresiones algebraicas que pueden deducirse a partir de tres números reales x, y, z sujetos a la sola condición de que cada uno sea menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia, y luego buscar relaciones entre estas expresiones, probablemente el desarrollo se terminaría pronto, por aburrimiento y falta de interés de los matemáticos. En cambio, al considerar el triángulo de lados x, y, z esta imagen geométrica orienta para descubrir expresiones algebraicas que son interesantes. Por ejemplo, las expresiones de las medianas, bisectrices, alturas, radio del círculo inscrito... aparecen por su interés geométrico y la búsqueda de relaciones entre estas expresiones tiene un sentido geométrico que mueve el interés para su estudio. Han surgido así un sinnúmero de igualdades y desigualdades, que sigue creciendo día a día, y que su única razón de ser es su interpretación geométrica. Prescindiendo de ella, serían desigualdades entre funciones que aparecerían de manera artificial y posiblemente nunca se hubieran estudiado. A este respecto puede verse el libro de O. Bottema y otros sobre desigualdades geométricas [4].

Otro ejemplo del mismo estilo lo constituye la Geometría Diferencial, que esencialmente no es más que un capítulo de la teoría de las ecuaciones diferenciales, en el cual el lenguaje geométrico (plano tangente, curvatura, paralelismo, geodésicas...) sirve para seleccionar aquellas ecuaciones cuyo estudio ofrece interés.

A veces basta una palabra afortunada para que todo un capítulo de la matemática se desarrolle con ímpetu. Es bien conocida, por ejemplo, la reciente irrupción en el campo de la matemática de la teoría de las "catástrofes" de René Thom. Se trata de la clasificación de ciertas singularidades, entre las cuales Thom encontró algunas especiales a las que llamó "catástrofes" (de las cuales hay 7, tantas como antorchas y tres más que jinetes en el Apocalipsis). Este nombre y número afortunados, hicieron que la teoría se extendiera como reguero de pólvora por todo el mundo y a muchas disciplinas laterales (biología, sociología, economía) con agudas discusiones entre los partidarios de las "catástrofes" (Thom, Zeeman) y los enemigos de las mismas (Sussman, Zahler), discusiones que seguramente nunca hubieran aparecido si el nombre se hubiera limitado a "singularidades discontínuas" o a otros menos impactantes. Es el poder de la palabra: ''Denn wo Begriffe fehlen, da stellt ein Wort zur rechten Zeit sich ein" (Goethe). Un interesante y equilibrado juicio sobre las catástrofes puede verse en la recensión de S. Smile del libro *"Catastrophe Theory: selected papers"* de E. C. Zeeman (Addison-Wesley, 1977), publicado en el Bulletin of the Amer. Math. Society, vol. 84, 1978, págs. 1360-1368.

2. EINSTEIN: ¿INTUITIVO O ABSTRACTO?

¿Cuál es el papel de Einstein en la ordenación anterior de la Matemática? Nuestro objeto va a ser mostrar que su influencia esencial fue como 'motivador'' de ciertos estudios matemáticos, es decir, fue un exponente de la tercera de las actitudes que hemos considerado. Concretamente, al vestir con ropaje de las ciencias físicas ciertas ideas matemáticas, Einstein motivó un rápido y valioso crecimiento de estas ideas. Muchos matemáticos se dedicaron al estudio de la teoría de grupos y, sobre todo, de la geometría diferencial, empujados por la interpretación física que sus resultados adquirían gracias a Einstein. Puede decirse que Einstein no creó matemática, fue ciento por ciento físico, pero mostró a los matemáticos direcciones de estudio importantes, que resultaron luego valiosas también para la misma matemática.

Desde este punto de vista no cabe encasillar a Einstein en una de las dos ramas en que a veces se ha clasificado a los matemáticos: intuitivos o abstractos. Recordemos a este respecto las palabras de Félix Klein (1849-1925) al decir: "parecería que una natural y fuerte intuición es atributo de la raza teutona, mientras que el sentido crítico y el pensamiento lógico, estuviera más desarrollado entre las razas latina y hebrea" (Evanston Cooquium, 1893). Opinión que motivó la protesta del francés P. Duhem (1861-1916), según el cual, lo que ocurre es precisamente lo contrario. Parecería que en esta discusión, que se suscita periódicamente, ningún matemático quiere ser catalogado como "abstracto", autocalificándose de "intuitivo", a pesar de que en sus escritos la intuición no aparece y más bien son ejemplos de puros y ordenados razonamientos lógicos, sin figuras ni referencias a ejemplos sensibles. La atribución de estas características a razones raciales parece poco fundada y, en todo caso, debería basarse en estadísticas conscientes, pues la referencia a muestras aisladas puede conducir a cualquier resultado, nunca significativo. Por ejemplo, dentro de los alemanes, se tiene a Riemann, sin duda intuitivo, y a Weierstras, abstracto por excelencia, y entre los franceses, a Cauchy, intuitivo, y a Hermite, modelo de abstracción. Esta discusión se resucitó en Alemania en los años 30, pero casi siempre con manifiesta parcialidad política (ver algunas páginas del *Jahresbericht der Deutsch Math. Vereinigung,* 2a. parte, vol. 44, 1934, págs. 1-11).

Para el caso de Einstein, si tuviera sentido clasificarlo como matemático, no hay duda de que se trata de un intuitivo evidente. Las fórmulas más abstractas, toman en él un significado intuitivo que asombra por su claridad y permite comprenderlas mucho antes de llegar lógicamente a ellas.

3. LA RELATIVIDAD RESTRINGIDA

En 1905 publicó Einstein su famosa memoria "Sobre la electrodinámica de los cuerpos en movimiento" [14] en la cual introduce la teoría de la Relatividad Restringida o Especial. Se trata de un trabajo fundamental, puramente físico en sus resultados y su estructura. La matemática utilizada es elemental: poco más de la usual en un primer curso universitario. En vez de buscar la explicación de las fórmulas de Lorentz dentro de la física clásica, como intentaban Lorentz y Poincaré, las toma audazmente como punto de partida y las deduce de los principios fundamentales de la invariancia de las leyes de la física por traslación uniforme de los sistemas de referencia (principio de la relatividad, que vale también para la mecánica clásica) y del principio de la constancia de la velocidad de la luz en el vacío, que es el que realmente distingue la mecánica relativista de la clásica. Aunque en las fórmulas de transformación deducidas de estos principios, el tiempo aparece vinculado con las coordenadas de espacio, Einstein no explota la idea de espacio-tiempo, la cual aparece por primera vez, con toda su potencia y claridad, en una conferencia memorable del matemático H. Minkowski (1864-1909) titulada "Espacio y Tiempo", pronunciada en Colonia el 21 de setiembre de 1908 [49].

Puede decirse que la teoría de la relatividad, y por tanto Einstein, entran en el campo de la matemática a través del trabajo de Minkowski. Los principios en que se basa la teoría de la relatividad se formulan matemáticamente diciendo que las leyes de la física deben ser invariantes respecto de las transformaciones lineales de coordenadas que dejan invariante la forma cuadrática $ds^2 = c^2dt^2 - dx^2dy^2dz^2$, transformaciones que forman un grupo que desde entonces se llamó el grupo de Lorentz. El estudio de este grupo ha dado lugar a una extensa bibliografía de trabajos puramente matemáticos. La posible aplicación a la física motivó los estudios en esta dirección, motivación que aumentó en la década de los años 20 con la mecánica cuántica relativista. Desde entonces, la teoría de grupos, en su origen puramente matemática, ha sido esencial para la física. Detalles sobre el grupo de Lorentz y sus generalizaciones pueden verse en el libro de H. Boerner [8]. La relatividad especial motivó el estudio del espacio-tiempo, como espacio plano de 4 dimensiones con métrica indefinida, y con ello se impulsaron las geometrías no euclidianas y la teoría de grupos en ellas.

4. LA RELATIVIDAD GENERAL

Una vez introducida la idea del espacio-tiempo, como hizo Minkowski inspirado en los trabajos de Einstein, la generalización a espacios curvos era natural y se disponía de todos los elementos para ello. Minkowski falleció en 1909, pocos meses después de su conferencia de Colonia. Es imposible predecir lo que hubiera hecho, pero pensando en el espíritu generalizador de todo matemático, una vez en posesión del espacio-tiempo como espacio de Riemann "plano", parece natural que se hubiera propuesto considerar el caso de un espacio de Riemann curvo, con la métrica general $ds^2 = g_{ij}dx_idx_j$. Las herramientas matemáticas necesarias para ello eran bien conocidas por los geómetras desde la clásica memoria de Ricci (1853-1952) y Levi-Civita (1873-1941), sobre el Cálculo Diferencial Absoluto, de 1901 [54]. Llama la atención de que la generalización, que le hubiera conducido a la relatividad general, no fuera hecha por Levi-Civita, que además de geómetra era especialista en mecánica racional. Tal vez le faltó la audacia de proseguir con ideas tan poco intuitivas, y en aquellos momentos todavía discutidas, como las que estaban en la base de la relatividad.

El hecho es que ningún matemático aprovechó la oportunidad y fue nuevamente Einstein quien emprendió la tarea de ver qué pasaba en espacios-tiempos curvos. Para Einstein, físico joven, la tarea más difícil fue la de aprender el cálculo diferencial absoluto (cálculo tensorial) de Ricci y Levi-Civita. Ello le llevó tres o cuatro años a partir de la memoria de Minkowski de 1909. Sus trabajos al respecto empezaron en 1913 (16) (17) (18) (19) y culminaron con una memoria famosa en la que resume todos estos trabajos, publicada en 1916, titulada "los fundamentos de la Teoría General de la Relatividad" (15).

Esta memoria del año 1916 consta de dos partes. En la primera reúne todo lo que necesita de cálculo tensorial y no contiene ninguna novedad, pues todo ello está en la memoria citada de Ricci y Levi-Civita. Sin embargo, es de observar la claridad de exposición y el ahorro de símbolos que significó la simple observación de que, para simplificar la escritura "convendremos en que siempre hay que sumar, salvo indicación expresa en contrario, respecto de un índice que aparezca dos veces en un término de una expresión". Esta simple observación, que desde entonces se llama "convención de Einstein" contribuyó mucho a simplificar el simbolismo y facilitar el manejo del cálculo tensorial. Siguen después las llamadas ecuaciones del campo gravitatorio y las aplicaciones de las mismas. Aquí es donde se destaca el genio de Einstein al no detenerse ante la atrevida idea de explicar la gravitación por la curvatura del espacio.

Se trata de uno de estos descubrimientos de la historia de la Ciencia, que son hermosos y fascinantes por su simplicidad conceptual y su natural, casi obligada, manera de aparecer. Veamos los pasos sucesivos:

1) Había que elegir una geometría para el espacio-tiempo. La única geometría conocida en la época era la llamada geometría de los espacios de Riemann, generalización natural de la teoría de superficies curvas de Euler y Gauss. Por esto se tomó, como postulado principal, implícito por su obligatoriedad, en la memoria de Einstein que "el espacio-tiempo es un espacio de Riemann".

2) Una vez sentado que el espacio-tiempo es un espacio de Riemann de 4 dimensiones, para caracterizarlo hay que determinar los 10 coeficientes g_{ij}, componentes del tensor fundamental simétrico del espacio (potenciales

gravitatorios según Einstein). Para ello se necesitan 10 ecuaciones, que deben ser tensoriales, para que su cumplimiento no dependa del sistema de coordenadas, y por lo tanto sus primeros miembros deben ser componentes de un tensor. El primer tensor de 10 componentes estrictas que se encuentra al estudiar los espacios de Riemann de 4 dimensiones, es el tensor simétrico R_{ij}, llamado tensor de Ricci. No había, por tanto, otra alternativa, y Einstein toma como ecuaciones para determinar los potenciales gravitatorios g_{ij} las ecuaciones $R_{ij}=0$ (ecuaciones de la gravitación en el vacío).

3) Si no se trata del vacío, hay que introducir de alguna manera un tensor representativo de la materia-energía, convenientemente definido. Representándolo por T_{ij}, la primera idea es poner $R_{ij}=T_{ij}$ (por analogía a las ecuaciones de Poisson de la teoría del potencial clásico). Con esta interpretación y puesto que la divergencia de T_{ij} debe ser nula (principio de conservación de la energía, o de la materia-energía), resulta que debería ser nula la divergencia de R_{ij}. Como no ocurre así, Einstein se vio obligado a sustituir R_{ij} por el tensor $G_{ij}=R_{ij}-(1/2)Rg_{ij}$, llamado desde entonces tensor de Einstein, en el cual R es la curvatura escalar del espacio. Descubre entonces que las cuatro identidades divergencia de $G_{ij}=0$, no son otra cosa que las ya entonces bien conocidas identidades de Bianchi (Bianchi, *Lezioni di Geometria Differenziale,* vol. 1, 1902, p. 351). Para los geómetras esto fue un poderoso incentivo para seguir con estos estudios. Puede decirse que Einstein convirtió en piedras preciosas mucho materiales que los matemáticos habían elaborado en bruto sin haber sacado el brillo de cada una de sus partes. El solo hecho de que las identidades de Bianchi representaran el principio de conservación de la energía, valorizó a las mismas y a toda la geometría diferencial de su alrededor.

Por otra parte, la existencia de las cuatro identidades div $G_{ij}=0$, era una necesidad matemática. En efecto, si las diez ecuaciones $G_{ij}=T_{ij}$ fueran independientes, las funciones g_{ij} quedarían completamente determinadasdas, lo que no puede ser, pues ellas están solamente determinadas "salvo un cambio de coordenadas", es decir, salvo 4 funciones arbitrarias.

4) Las ecuaciones de la gravitación $G_{ij}=T_{ij}$, para el caso de un espacio vacío, con un solo punto singular (caso del Sol y los planetas, o caso de simetría esférica) fueron integradas por Schwarzschild, obteniendo su clásica solución que explica la mecánica del Sistema Solar, sin necesidad de la fuerza de atracción en que se basaba la mecánica de Newton. Se trató entonces de aplicar dichas ecuaciones "en grande", a todo el universo, para

tratar el llamado problema cosmológico. En este punto ocurre un hecho significativo para la *filosofía* de la ciencia. Al integrar las ecuaciones $G_{ij}=T_{ij}$ para el caso de un espacio cubierto de manera uniforme por materia de densidad constante, Einstein encuentra en 1917 que el sistema no tiene solución estática y se ve obligado a introducir en sus ecuaciones un término adicional λg_{ij}, siendo λ una constante, que se llamó la *constante cosmológica,* suficientemente pequeña para que no perturbara los resultados favorables ya obtenidos para el Sistema Solar. Es decir, Einstein no creyó demasiado en sus ecuaciones y prefirió cambiarlas en vez de mantenerlas a todo trance y analizar las consecuencias de un universo no estático, no acorde con la intuición (prejuicio aristotélico de la inmutabilidad del universo), pero no lógicamente contradictorio. Pero ocurrió que en 1931, Hubble descubrió la "expansión del universo", la cual, precisamente, está prevista por las ecuaciones primitivas de Einstein, cuyos resultados estuvieron de acuerdo con los experimentales de Hubble. Este universo no-estático había sido obtenido por A. Friedmann [33] en 1922, como posible solución de las ecuaciones gravitatorias de Einstein sin término cosmológico, pero se abandonó por falta de base experimental.

Esta falta de fe en sus ecuaciones, la reconoce Einstein en su libro "El significado de la Relatividad" [13] al decir "si se hubiera conocido la expansión de Hubble en la época de la creación de la teoría general de la Relatividad, jamás se hubiera introducido el término cosmológico". Desde entonces, Einstein abandonó siempre este término de sus ecuaciones, aunque otros autores, por ejemplo, Eddington, lo utilizaron como una constante más, útil para sus especulaciones sobre el universo.

5. LA RELATIVIDAD GENERAL Y LA MATEMATICA

Una vez establecido por Einstein que la gravitación no es más que una consecuencia de la geometría del espacio-tiempo, muchos matemáticos se dedicaron al estudio de los espacios de Riemann, incentivados por esta repentina e insospechada aplicación de su ciencia. El servicio prestado por Einstein a la geometría fue substancial. He aquí algunos datos:

a) Los espacios caracterizados por $G_{ij}=0$, o sea $R_{ij}=ag_{ij}$ (donde a es una constante) se llamaron "espacios de Einstein" y han dado lugar a innumerables memorias [31] [36] [45] [67]. No solamente para la Geometría, sino que también en la teoría de los grupos continuos, los espacios de Einstein resultaron de interés (ver Eisenhart) [26].

b) Los mejores geómetras de la época derivaron sus estudios hacia los espacios vinculados con las ecuaciones de Einstein. E. Cartan (1869-1951) [5] demostró que el tensor de Einstein G_{ij} ampliado con el término cosmológico, es el único (salvo un factor constante) que se puede formar con los g_{ij} y sus dos primeras derivadas, siendo lineal en las derivadas segundas y teniendo divergencia nula. Este resultado, intuído por Einstein, es fundamental para la justificación y belleza de la teoría, pues prueba que no hay alternativa posible en la elección de las ecuaciones gravitatorias dentro de un nivel de sencillez y naturalidad. Como prueba de la incomunicación que la primera guerra mundial (1914-1918) dejó entre los científicos europeos, son interesantes las palabras de E. Cartan en la introducción de su memoria citada [5]: "Dada la dificultad que encuentro en conocer las memorias aparecidas en el extranjero durante y después de la guerra, no estoy completamente seguro de que este resultado no haya sido demostrado por otros".

c) Después de la Relatividad General, prácticamente todos los textos de geometría diferencial prestaron atención a la geometría del espacio-tiempo y a los problemas de la misma. Nació un nuevo puente entre la física y la matemática, que fue seguramente útil a ambas ciencias. Incluso, a veces, la intención superaba a la realidad y así el conocido tratado de W. Blaschke (1885-1962) [2], que fue libro de texto en muchas universidades europeas entre 1920 y 1940, incluye en el título "fundamentos de la relatividad de Einstein", aunque luego no trata nada de esta teoría.

d) El problema cosmológico de la relatividad general, dio lugar a contribuciones de mucho interés para la geometría. Los clásicos universales de Einstein, De Sitter, Lemaitre y Friedman (que pueden verse por ejemplo en el libro de Couderc) [8] y en las memorias de De Sitter [11] y Coxeter [9], son ejemplos de espacios con importantes propiedades geométricas. También deben mencionarse los espacios de Gödel [35] y, posteriormente, muchos otros como los de Taub, Kruskal, Kerr, Reissner-Nordstrom, cuyo estudio ha significado un gran progreso para el conocimiento de la geometría diferencial y la topología de las variedades de 4 dimensiones con métrica hiperbólica. Ver, por ejemplo, el artículo de Roger Penrose [51] y varios trabajos de Geroch [34] y Lerner [46] entre otros. También varios aspectos de la topología y de las integrales de formas diferenciales sobre variedades han sido puestos de manifiesto en vistas a problemas suscitados por la relatividad, como puede verse en la Geometrodinámica de J. A. Wheeler [66].

En los últimos años, las aplicaciones de la Relatividad General a la cosmología han surgido con renovado interés. Han aparecido muchos trabajos de importancia, no solamente para la astronomía, sino también para la misma matemática Puede verse al respecto los libros de Weinberg [62], Misner-Thorne y Wheeler [60] y la puesta al día, dirigida a matemáticos, de Sachs y Wu [55]. El avance de la técnica para la exploración del universo, ha puesto de manifiesto nuevos fenómenos como los "agujeros negros" *(black holes)*, regiones del espacio en las cuales un campo gravitacional muy intenso impide la salida de toda partícula material o señal luminosa o cualquier tipo de radiación, cuya explicación a través de la Relatividad General obliga a crear nuevos tipos de espacios-tiempo y al estudio de su geometría.

Recientemente, también la teoría de las variedades complejas se ha vinculado con los problema derivados de la teoría de la gravitación de Einstein. En este sentido promete ser importante el estudio de los llamados "twistors" (torbellinos) introducidos por R. Penrose, que son nuevos objetos geométricos (como son los tensores y los espinores) formados por un espacio de 4 dimensiones complejas y una forma hermitiana indefinida en el mismo Se puede ver para ello el libro de E. J. Flaherty [32], varios trabajos de Penrose [52] [53] y la interesante exposición de conjunto de R. O. Well, jr. [63].

6. EL PROBLEMA DE LA UNIFICACIION DE LOS CAMPOS

La Relatividad General tuvo gran influencia en el desarrollo de la geometría de Riemann, pero inmediatamente después de esa teoría, que explicaba perfectamente la gravitación, surgió en Einstein el deseo de obtener por la misma vía, una teoría más general, que abarcara también el campo electromagnético. Es decir, una teoría en que las ecuaciones de Maxwell resultaran también como consecuencia de la geometría del espacio-tiempo. Más tarde, al aparecer otros campos (campos nucleares), la idea se extendió también a éstos, y nació el problema de encontrar una teoría unificada, que comprendiera en una misma interpretación geométrica a todos los campos conocidos. En este problema trabajó Einstein todo el resto de su vida. No llegó a resultados interesantes en física, pero despertó el interés de los matemáticos para crear nuevas geometrías, a las que él mismo contribuyó en distintas oportunidades. Vamos a mencionar algunas de estas teorías, todas ellas más bien de carácter matemático que físico.

Puesto que en el espacio-tiempo riemanniano se necesitan todos sus elementos para explicar la gravitación, había que buscar otra geometría con más elementos iniciales. Una primera dirección fue la de suponer que el espacio-tiempo tiene más de 4 dimensiones, con la idea de interpretar las componentes de las dimensiones suplementarias como responsables de los otros campos. En este sentido, los primeros trabajos fueron los de T. Ka luza [43] y O. Klein [44]. En ellos el espacio-tiempo es riemanniano de 4 dimensiones, pero está sumergido en otro espacio de 5 dimensiones. Con ello el número de componentes del tensor fundamental aumenta a 15 y por tanto se dispone de 5 de ellas para interpretar el campo electromagnético En esta dirección, desde el punto de vista matemático, no se introduce nada nuevo, puesto que no se sale de la geometría de Riemann. Sin embargo, también la geometría de sub-espacios de un espacio de Riemann se vio impulsada y alcanzó nuevos progresos por este afán de conseguir una teoría unificada satisfactoria. Cuando más tarde se quiso incluir en la unificación el campo mesónico, se aumentó el número de dimensiones a 6 o más. Muchos autores, entre ellos el mismo Einstein, trabajaron en este sentido. Citaremos como contribuciones importantes, las de Hoffman [38] y Thiry [59]. Una exposición de esta última se encuentra en el libro de A. Lichnerowicz [47].

Una variante de estas teorías multidimensionales se obtuvo al querer dar una interpretación a las dimensiones superiores a la cuarta. Con O. Veblen [61] se originaron las teorías proyectivas, de gran interés matemático, que interpretan la quinta variable, no como coordenada de una dimensión más, sino como la coordenada homogénea del espacio-tiempo original de 4 dimensiones. Estas teorías proyectivas obligaron a crear el concepto de tensor proyectivo (o "proyector") y el cálculo tensorial correspondiente. Como contribuciones notables en esta dirección, cuya literatura es muy abundante, citaremos el libro magnífico de P. Jordan [42], de mucho interés matemático, y una monografía de G. Ludwig [42].

También se ensayó sustituir la métrica de Riemann por una métrica de Finsler (Schaffahauser-Graf [57], Horvath [39]) o una geometría conforme (Ingraham [41]) o, más particularmente, una geometría invariante por transformaciones semejantes (Hoffmann [32]). Todos estos ensayos quedaron en contribuciones a las geometrías respectivas, aunque el interés físico fue escaso.

Pero la idea más importante y fructífera desde el punto de vista matemático, fue la de considerar que el dato inicial del espacio, en lugar de ser una métrica de Riemann, fuera una "conexión afin", o sea, un conjunto especial de funciones que permitieran definir en el espacio un "paralelismo" entre vectores. Más concretamente, así como a partir del tensor fundamental g_{ij}, en los espacios de Riemann se pueden definir los símbolos de Christoffel y con ellos escribir las ecuaciones de las geodésicas y del paralelismo, surgió la idea, principalmente debida a H. Weyl [64] [65] y a E. Cartan [6] de construir la geometría del espacio partiendo directamente de las componentes de una conexión, que tenga propiedades análogas a las de los símbolos de Christoffel y que, por tanto, permitan definir ciertas curvas, llamadas trayectorias o caminos, cuyas ecuaciones son análogas a las de las geodésicas de los espacios de Riemann. A partir de los coeficientes de la conexión, también se pueden definir tensores de curvatura y desarrollar mucha geometría del espacio.

Así nacieron los espacios de conexión afin, y posteriormente los de conexión proyectiva y aún otros más generales, todos los cuales han pasado a ser fundamentales en la moderna geometría diferencial. Pero lo que nos interesa señalar es que, a pesar de que luego evolucionaron en direcciones muy diversas, en su origen y en sus progresos iniciales, el motivo perseguido era el problema de la unificación de los campos, por lo que hay que reconocer que Einstein tuvo un papel fundamental en su creación. Ver por ejemplo, los trabajos [6] [7] [24]. Son interesantes al respecto, las cartas intercambiadas entre Einstein y Cartan en las postrimerías de la década de 1920, editadas por R. Debever [10].

Dentro de las teorías afines, que tienen como base una conexión afin, en condiciones variables, las obras fundamentales son las de H. Weyl [65], Eddington [12] y la excelente exposición de E. Schrödinger [58] quien trabajó mucho sobre el problema en distintas memorias. Como obra enciclopédica debe mencionarse el libro de M. A. Tonnelat [60].

Sería largo describir todos los trabajos de Einstein en los cuales, buscando una teoría unificada, fue dejando resultados de interés matemático, con ideas que fueron luego muchas de ellas desarrolladas por alumnos y colaboradores. Entre estas últimas hay que mencionar un trabajo de 1944, publicado por Einstein, parcialmente en colaboración con V. Bargmann [25], en el cual se da comienzo a una teoría de "bivectores" o tensores dependientes de dos puntos del espacio, teoría abandonada, pero que desde el punto de vista matemático posiblemente merecería todavía ser considerada con cierto detenimiento y atención.

7. LA ULTIMA TEORIA DEL CAMPO UNIFICADO

En 1950 publicó Einstein su última teoría del campo unificado, como apéndice a la tercera edición de su libro "El Significado de la Relatividad" [17], teoría que en posteriores ediciones modificó ligeramente.

Desde el punto de vista matemático, la nueva teoría inicia el estudio de un nuevo tipo de espacios, de 4 dimensiones, en los cuales el tensor fundamental g_{ij} deja de ser simétrico, por lo que se distingue de los espacios de Riemann. Además, el tensor fundamental está estrechamente vinculado con cierta conexión afin del espacio, tampoco simétrica. Se trata, en realidad, de espacios cuyos elementos iniciales son un tensor de segundo orden no simétrico y una conexión afin, tampoco simétrica, cuyas componentes están íntimamente ligadas por ecuaciones tensoriales (ecuaciones del campo), fáciles de escribir pero muy difíciles de resolver. Del tensor g_{ij}, la parte simétrica sirve para definir el campo gravitatorio (como en la Relatividad General) y la parte antisimétrica debería estar vinculada al campo electromagnético.

El hecho de suponer que g_{ij} no es un tensor simétrico, permite una mayor variedad en las operaciones de ascenso y descenso de índices del cálculo tensorial, y da origen a diversos tipos de derivación covariante y por tanto a nuevos tensores análogos al de curvatura del caso simétrico. Eisenhart [28] [29] ha bautizado a estos espacios con el nombre de espacios de Riemann generalizados y varios autores han trabajado en ellos, pero casi siempre desde el punto de vista matemático, puesto que la teoría no tuvo ni ha tenido hasta el presente mayor trascendencia física. Aparte los resultados del mismo Einstein, como su generalización de las identidades de Bianchi a los nuevos espacios [22], los resultados más profundos fueron debidos a Tonnelat [60], Hlavaty [37] y Lichnerowicz [47]. El libro de Hlavaty [37] así como una serie de trabajos del mismo autor, contienen muchos resultados interesantes, todos ellos consecuencia de la idea inicial de Einstein.

Desde el punto de vista de la Física, esta teoría de Einstein de 1950 no ha tenido éxito, a pesar de las esperanzas de Einstein y de algunos de sus seguidores. Así por ejemplo, L. Infeld escribía en 1951: "La física moderna utiliza la mecánica cuántica para el interior del átomo. Ciertamente que no está claro cómo sus leyes pueden deducirse de la última teoría de Einstein, pero no debemos ser demasiado escépticos: la obra de Einstein siempre ha chocado temporalmente con dificlultades y con el escepticismo de muchos, debido a que su genio ha ido adelantado sobre sus tiempos.

Esto ha ocurrido dos veces, cuando la relatividad especial (1905) y cuando la relatividad general (1916) y puede muy bien ser que haya sucedido de nuevo al traspasar la mitad de este siglo veinte" [40].

El principal defecto de la teoría, a nuestro entender, es su excesiva libertad en la elección de las ecuaciones del campo. La fuerza de la Relatividad General, como ya observamos, es que sus ecuaciones están bien determinadas dentro de ciertas hipótesis naturales de simplicidad. Otras cualesquiera serían más complicadas. Ello hace pensar que se está en la teoría adecuada. En cambio, en la última teoría de Einstein del campo unificado, las posibles ecuaciones del campo son muchas, todas ellas con iguales méritos. Es difícil imaginar que la Naturaleza haya elegido una teoría que se presenta en igual plano de igualdad que otras varias. Dentro del mismo modelo geométrico, el mismo Einstein propone primero unas ecuaciones del campo, que constituyen el llamado "sistema fuerte" y poco después, preocupado por su posible incompatibilidad, propone las del "sistema débil", que pueden deducirse de un principio variacional y por tanto tienen asegurada su compatibilidad. Pero aún en este caso, con el mismo grado de complicación, hay varios lagrangianos posibles y Einstein, como posibles criterios de elección, propone varios de ellos, como el de "simetría pseudo-hermitiana" o el de "lambda" invariancia, pero así y todo la ideterminación subsiste. En varios trabajos, recopilados en [56] hemos intentado sistematizar todos los lagrangianos y por tanto todas las posibles ecuaciones del campo, todas dentro de unas mismas condiciones de máxima simplicidad, dentro de la geometría elegida. Tal vez esta indeterminación sea la causa, de naturaleza filosófica, del por qué la teoría no está dirigida según el verdadero camino.

Pero el hecho de que hasta el momento no haya resultado una teoría útil a la Física, no impide pensar que pueda serlo en el futuro. Por otra parte, como teoría matemática tiene su interés y ha planteado problemas de naturaleza muy variada, como puede verse en el libro ya mencionado de Hlavaty. Como culminación de su obra, al filo de los 70 años de edad, Einstein indicó a los matemáticos nuevas líneas de investigación. La geometría se vio enriquecida con nuevos espacios y nuevas estructuras. Y la historia prueba que toda nueva adquisición matemática, tarde o temprano presta servicios a la física, lo que, por otra parte, no es más que una consecuencia natural de la unidad de la Naturaleza, incluído en su conjunto el hombre y su pensamiento.

7. APENDICE: LA ACTUAL FISICA MATEMATICA

La influencia de Einstein en el desarrollo de la Matemática es una tendencia general que se acentúa rápidamente. La Física actual necesita cada vez más la Matemática y aún, posiblemente, de nueva matemática todavía desconocida. De aquí, que, como acicate para el progreso de esta última ciencia, el papel de la Física es cada día más valioso.

La Matemática pertenece al mundo de las ideas, pues, "sin utilizar nada de sensible, no se sirve más que de las ideas para ir, mediante ideas, a otras ideas, y terminando en ideas" (Platón, República, 511, b). La Física, en cambio, se refiere desde Aristóteles, al movimiento o cambio de los entes y va unida a la observación del mundo exterior. Cuando esta observación se realiza a través de nuestros sentidos, la experiencia secular o milenaria hace que los resultados estén de acuerdo con la intuición y la Matemática no juegue otro papel que la de permitir cuantificar con exactitud los resultados experimentales que, en cierto modo, eran de esperar o adivinar.

Antes del Cálculo Infinitesimal, la Matemática ayudaba a la Física tan sólo suministrando modelos geométricos (por tanto, visibles) como las circunferencias o elipses de las trayectorias planetarias, o los poliedros regulares con los que Platón identificaba los corpúsculos elementales de Demócrito o las cuatro componentes tierra, agua, aire y fuego de la Naturaleza. Con el Cálculo, la Matemática hizo posible el estudio cuantitativo del movimiento y la física matemática alcanzó el desarrollo esplendoroso de los siglos XVII, XVIII y XIX en todas sus ramas: mecánica, óptica, electricidad, calor. Estos éxitos hicieron creer que su base, la hoy llamada Mecánica Clásica, era algo insustituible, que se había encontrado con ella el verdadero camino para explicar y entender la Naturaleza. Todo, método y resultados, era satisfactorio: se respetaba la lógica y los resultados estaban de acuerdo con la intuición.

Todo ello anduvo bien, mientras los fenómenos que se estudiaban permanecían a la "escala humana", vale decir, dentro de magnitudes de espacio y tiempo no demasiado alejadas de las dimensiones del hombre. Pero al entrar en el siglo XX, los avances de la técnica permitieron observar el interior del átomo (espacios de 10^{-10} cm. y tiempos de 10^{-10} segundos) o las nebulosas del Universo, a distancias de miles y millones de años luz y períodos de tiempo de millones de años.

A estas escalas, nada tiene de particular que la intuición fracase y entonces el papel de la Matemática, que había jugado tan sólo un papel de auxiliar de la intuición, salta de golpe y pasa a jugar un papel decisivo. Las teorías físicas del átomo o del cosmos dejan de ser previsibles por la intuición y pasan a depender únicamente del tratamiento matemático. La teoría de la Relatividad de 1905 rompió con toda idea intuitiva: la constancia de la velocidad de la luz, la ley de composición de las velocidades, la equivalencia de la masa y de la energía, no pueden ser intuitivas y cabe aceptarlas únicamente por no ser lógicamente contradictorias y estar avaladas por los hechos experimentales.

Con ello la Matemática, en un principio auxiliar, pasa a rectora. Así como los nuevos fenómenos no pueden ser captados directamente por los sentidos, si no tan sólo a través de registros y placas fotográficas, su análisis puede ser hecho únicamente por el cálculo matemático. Su explicación necesita de "modelos" matemáticos con los cuales trabajar y poder predecir. También los poliedros de Platón eran "modelos" de las partículas elementales de su tiempo. La analogía existe, si bien en la actualidad los modelos son más complejos y más variados: espacios de Riemann, espacios de medida, autovalores de ecuaciones diferenciales, espinores, catástrofes...

Einstein rompió con la intuición, pero conservó la lógica clásica. Pero iniciado el camino, la marcha siguió incesante. Todo el edificio matemático fue tomado al asalto por los físicos en busca de modelos para explicar los fenómenos, que en progresión geométrica iban apareciendo en sus placas fotográficas o en sus pantallas o registros de computadoras. Se ensayaron y se siguen ensayando todos los modelos posibles, aún los más extravagantes. La intuición como guía aproximada o como medio de comprensión de los fenómenos queda completamente a un lado. Sólo se pide al modelo que ande, no que se entienda el por qué anda. Y no solamente ésto, sino que se han ensayado nuevas lógicas. Tal vez, se dice, la física de lo infinitamente pequeño y de lo infinitamente grande no responda a la lógica clásica. Se entra así en un campo de resultados imprevisibles.

Einstein terminó con la intuición, pero conservó la lógica. Actualmente, tambalea también este firme baluarte de la Ciencia clásica.

BIBLIOGRAFIA

(1) APPEL, K. - HAKEN, W. *Every planar map is four coloreable*, Part II: *Discharging*, Illinois J. Math. 21, 1977, 429-490. Par II, con J. Koch, *Reducibility*, Illinois J. Math. 21, 1977, 491-567.

(2) BLASCHKE, W. *Vorlesungen über Differentialgeometrie und geometrische Grundlagen von Einstein Relativitätstheorie*, Springer, Berlin, 1925.

(3) BOERNER, H. *Darstellungen von Gruppcn*, Springer, Berlin, 1955.

(4) BOTTEMA, O. y otros. *Geometric Inequalitics*, Noordhof, Holanda, 1969.

(5) CARTAN, Elie. *Sur les Equations de la Gravitation d'Einstein*, J. Math. Pures et Appl. (9), 1, 1922, 141-203.

(6) CARTAN, Elie. *Sur les varietés à connexion affines et la théorie de la Relativité Géneralisée*, Ann. Ecole Normale Superieure, 40, 1923, 325-412.

(7) CARTAN, Elie. *Le paralelisme absolu et la théorie unitaire du champ*, Hermann, Paris, 1937.

(8) COUDERC, Y. *L'cxpansion de l'Univers*, Press Universitaire, Paris, 1950.

(9) COXETER, H. S. M. *A geometrical background for De Sitter's world*, Amer. Math. Monthly, 50, 1943, 217-228.

(10) DEBEVER, R. *Elie Cartan and Albert Einstein, letters on absolute parallelism*, Princeton University Press, 1978.

(11) DE SITTER, *The astronomical aspect of the Theory of Relativity*, University of California Press, Berkeley, 1933.

(12) EDDINGTON, A. *The Mathematical Theory of Relativity*, Cambridge University Press, 1923.

(13) EINSTEIN, A. *El significado de la Relatividad*, traducción castellana, Espasa Calpe Argentina, Buenos Aires, 1952.

(14) EINSTEIN, A. *Sobre la electrodinámica de los cuerpos en movimiento*, Ann. der Physik, 17, 1905, 891; traducción castellana en el libro *La Relatividad*, Emecé Editores, Buenos Aires, 1950.

(15) EINSTEIN, A.*Die Grundlagen der Allgemeinen Relativitätstheorie*, Ann. der Physik, 49, 1916, 769. Traducción castellana en el mismo libro citado en (17).

(16) EINSTEIN, A. *Physikalische Grundlagen einer Gravitationstheorie*, Naturforsch. Gess. Zurich Vieret Vierteljahrschrift, 58, 1913, 284.

(17) EINSTEIN, A. *Zur gegenwärtigen Stande des Gravitationsproblem*, Phys. Zeitschr. 14, 1913, 1249.

(18) EINSTEIN, A. *Zur Theorie der Gravitation*, Naturforsch. Gess. Zürich Viert. 59, 1914, 4.

(19) EINSTEIN, A. *Prinzipielles zur verallgemeinerten Relativitätstheorie*, Phys. Zeitschr. 15, 1914, 176.

(20) EINSTEIN, A. *Die formale Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie*, Preuss. Akad. Wiss. Sitz. 1914, 1030.

(21) EINSTEIN, A. *Kosmologische Betrachtungen zur allgemeine Relativitätstheorie*, Preuss. Akad. Wiss. Sitz. 1917, 142.

(22) *The Bianchi identities in the generalized theory of Gravitation*, Candian J. Math. 1950.

(23) EINSTEIN, A., BERGMANN, P. *On a generalization of Kaluza's theory of electricity*, Ann. Math. 39, 1938, 683.

(24) EINSTEIN, A. und MAYER, W. *Einheitliche Theorie von Gravitation und Electracität*, Preuss. Ak. Wiss. 1931, 1932.

(25) EINSTEIN, A. and BARGMANN, V. *Bivector fields*, I and II, Ann. of Math. 1944, 45, 1-23.

(26) EISENHART, L. P. *Continuous groups of Transformations*, Princeton University Press, 1933.

(27) EISENHART, L. P. *Riemannian Geometry*, Princeton Univ. Press, 1926.

(28) EISENHART, L. P. *Generalized riemannian spaces*, I, II, Proc. Nat. Acad. Sciences U.S.A., 1951, 37, 311-315; 1952, 38, 505-508.

(29) EISENHART, L. P. *A unified theory of general relativity of gravitation and electromagnetism*, Proc. nat. Acad. Sc. U.S.A. 42, 1956, 249, 646, 878; 43, 1957, 333.

(30) ELLIS, G. F. R. *Relativistic Cosmology*, General relat. and Cosmology, Acacdemic Press, N. York, 1971.

(31) FIALKOW, A. *Einstein spaces in a space of constant curvature*, Proc. Nat. Ac. Sc. U.S.A. 1938; *Totally geodesic Einstein spaces*, Bull. Amer. Math. Soc. 1939, 45.

(32) FLAHERTY, E. J. *Hermitian and Kählerian Geometry and Relativity*. Lecture notes in Physics, 46, Springer, Berlin, 976.

(33) FRIEDMANN, A. *Uber die Krummung des Raumes*, Zeitschr. Phys. 10, 1922, 326.

(34) GEROCH, R. *Space-time structure from a Global Viewpoint*, General relativity and Cosmology, Academic Press, New York, 971, 71-103.

(35) GÖDEL, K. *An example of a new type of cosmological solution of Einstein's field equations of gravitation*, Rev. Modern Physic, 21, 1949, 447.

(36) HAANTJES, J. WRONA, W. *Ubcr konformeuklidische und Einsteinsche Räume gerader dimensione*, Proc. Kon. Akad. Amsterdam, 1939, 42.

(37) HLAVATY, *V. Geometry of Einstein's unified field thcory*, P. Noordhoff Ldt. Groningen, Holanda, 1957.

(38) HOFFMANN, B. *The gravitational, electromagnetic and vector meson fields and the similarity geometry*, Phys. Rev. 1948, 73.

(39) HORVATH, J. *A geometrical model for the unified theory of physical fields*, Phys. Rev. 1950, 80.

(40) INFELD, L. *On Einstein's new theory*, Smithsonian Reports for 1951, 189-197.

(41) INGRAHAM, R. L. *Conformal relativity*, Proc. Nat. Acad. Sc. U.S.A., 1952, 38; Nuovo Cimento, 1952, 9.

(42) JORDAN, P. *Schwerkraft und Weltall*, Braunschwieg, 1951.

(43) KALUZA, T. *Zum Unitätsproblem der Physik*, Sitz. Press. Akad. Wiss. 2, 1921, 966.

(44) KLEIN, O. *Quantentheorie und fünfdimensionale Relativitäts* Theorie, Zeitschr. Phys. 37, 1926, 895.

(45) KUIPER, N. H. *Einstein spaces and connections*, I, II, Proc. Kon. Akad. Amsterdam, 1950, 53.

(46) LERNER, D. *Differential Geometry in General Relativity*, Lecture Notes in Physics, Nº 14, Springer, Berlin, 1974, 1-44.

(47) LICHNEROWICZ, A. *Theories Relativistes de la Gravitation et de l'Electromagnetisme*, Masson, Paris, 1955.

(48) LUDWIG, G. *Fortschritte der projektiven Relativitätstheorie*, Braunschweig, 1951.

(49) MINKOWSKI, H. *Raum und Zeit*, Conferencia reproducida en varios idiomas y publicada en diferentes revistas, entre ellas Phys. Zeitschr. 10, 1909, 104-111 y el Jahrsbericht der Deutsch. Math. Vereinigund, 18, 1909, 75-88.

(50) MISNER, C. W., THORNE, K. S., WHEELER. J. A. *Gravitation*, Freeman, San Francisco, Calif. 1973.

(51) PENROSE, R. *Structure of Space-time*, Battelle Rencontres, 1967, págs. 235.

(52) PENROSE, R. *Twistor algebra*, J. Math. Phys. 8, 1967, 345-366.

(53) PENROSE, R. *The twistor program*, Reports on Math. Phys, 12, 1977, 65-76.

(54) RICCI, G., LEVI-CIVITA, T. *Méthodes de calcul Differentiel Absolu et leurs applications*, Math. Annalen, 54, 1901, 125 201.

(55) SACHS, R. K., WU, H. *General Relativity and Cohomology*, Bull. Amer. Math. Soc. 83, 1977, 1101-1164.

(56) SANTALÓ, L. A. *Sobre algunas teorías asimétricas del campo unificado*, Rev. Real Acad. Ciencias Madrid, 66, 1972, 395-425.

(57) SCHAFFHAUSER-GRAF, E. *Versuch einer 4-limensionalen einheitliches Feldtheorie*, J. Rat. Mech. and Analysis, 1953, 2.

(58) SCHRÖDINGER, E. *Space-time structure*, Cambridge Univ. Pres, 1950.

(59) THIRY, Y. *Etude mathématique des equations d'une theorie unitaire a 15 variables de champ*, J. Math. Pures et Appl. (9), 30, 1951, 275.

(60) TONNELAT, M. A. *Les theorie unitaires de l'electromagnetisme et de la gravitation*, Gauthier-Villars, Paris, 1965.

(61) VEBLEN, O. *Projektive Relativitätstheorie*, Springer, Berlin, 1933.

(62) WEINBERG, S. *Gravitation and Cosmology*, Wiley, New York, 1972.

(63) WELLS, R. O., jr. *Complex manifolds and mathematical physics*, Bull. Amer. Math. Soc. (New Series), 1, 1979, 296-336.

(64) WEYL, H. *Reine infinitesimalgeometrie*, Math. Zeitschr. 2, 1918, 384-411.

(65) WEYL, H. *Raum, Zeit und Materie*, Berlin, 1921.

(66) WHEELER, J. A. *Geometrodinamica*, Societa Italiana de Fisica, Academic Press, New York, 1962.

(67) WRONA, W. *Conditions necessaire et suffisantes qui determinent les espaces einsteinniens conformement euclidiens et de courbure constante*, Ann. Soc. Math. Polonaise, 1947, 20.