SOBRE UN COMPLEJO LINEAL LIGADO A UNA CURVA CERRADA DEL ESPACIO

por

L. A. Santaló

Supongamos en el espacio ordinario un triedro trirrectángulo R de vértice el punto X. Consideremos que este triedro se somete a un movimiento cualquiera M y vuelve a su posición inicial. Toda recta g invariablemente unida al triedro R habrá descrito, por este movimiento M, una superficie reglada S_g.

En estas condiciones, es fácil ver que si una trayectoria ortogonal de las generatrices g de S_g es cerrada, también lo son las demás trayectoria ortogonales, y, además, Blaschke ha demostrado que las rectas g para las cuales esto ocurre forman un complejo lineal (1).

El objeto de esta nota es estudiar con más detalle este complejo lineal de Blaschke en los casos particulares siguientes:

1º. Movimiento general alrededor de un punto fijo.

2º. Caso en que el triedro móvil coincide con el triedro fundamental de una curva del espacio.

3º. Dentro del caso particular anterior consideraremos las rectas g para las cuales las trayectorias ortogonales de la superficie S_g correspondiente no son cerradas, sino que cortan a una misma generatriz en puntos cuya distancia tiene un valor constante D. Veremos que estas rectas forman un complejo cuadrático de rectas, el cual se reduce al complejo lineal anterior en el caso de ser $D = 0$.

(1) W. Blaschke, *Consideraciones sobre cinemática*, Publicaciones del Instituto de Matemática, Vol. VI (Homenaje a Julio Rey Pastor, T. II, págs. 179 - 182). Rosario, 1946.

En un principio seguiremos la misma demostración de Blaschke, alterándola ligeramente en vistas a los casos particulares que deseamos tratar.

1. - Caso general. — Sea un triedro trirrectángulo móvil del espacio, definido por el vértice X y los tres vectores ortogonales entre sí U, V, W. Supongamos que X, U, V, W sean funciones periódicas de un parámetro s, de manera que si L es el período, al recorrer s el intervalo $0,L$ el triedro vuelva a su posición primitiva.

Consideremos un punto Y invariablemente ligado al triedro móvil; si y_1, y_2, y_3 son sus coordenadas respecto el mismo triedro será

$$Y = X + y_1 U + y_2 V + y_3 W. \tag{1.1}$$

Sea A un vector de módulo unidad y de origen Y, que sea también inmóvil respecto el triedro U, V, W; si a_1, a_2, a_3 son las componentes de A respecto el mismo triedro, un punto cualquiera Z de la recta g que contiene al vector A será de la forma

$$Z = Y + \lambda A = Y + \lambda (a_1 U + a_2 V + a_3 W), \tag{1.2}$$

siendo λ la distancia del punto Z al punto Y.

Al variar s, la recta g describirá una superficie reglada y el punto Z describirá una curva sobre la misma. Para que esta curva sea ortogonal a todas las generatrices de la superficie, debe ser

$$A \, . \, \mathrm{d} Z = 0. \tag{1.3}$$

De (1.2) se deduce

$$\mathrm{d} Z = \mathrm{d} Y + A \, \mathrm{d} \lambda + \lambda \, \mathrm{d} A, \tag{1.4}$$

y como $A \, . \, \mathrm{d} A = 0$ (por ser $A^2 = 1$), la condición (1.3) se escribirá

$$A \, . \, \mathrm{d} Y + \mathrm{d} \lambda = 0. \tag{1.5}$$

Por tanto, cuando s haya descrito todo el intervalo $0,L$, o sea, al volver la recta g a su posición inicial, el punto Z habrá pasado a otro punto Z^* y la distancia entre ambos puntos valdrá

$$D = \int_0^L \mathrm{d}\lambda = -\int_0^L A \cdot \mathrm{d}\, Y. \tag{1.6}$$

Teniendo en cuenta (1.1) y siendo $A = a_1 U + a_2 V + a_3 W$, se tiene

$$A \cdot \mathrm{d}\, Y = [a_1 U \cdot X' + a_2 V \cdot X' + a_3 W \cdot X' + (a_2 y_1 - a_1 y_2) V \cdot U' + (a_1 y_3 - a_3 y_1) U \cdot W' + (a_3 y_2 - a_2 y_3) W \cdot V'] \, \mathrm{d}s. \tag{1.7}$$

Conviene ahora introducir para la recta g las coordenadas g_{ik} de Grassmann y Plücker. Para ello, siendo y_i, $y_i + a_i$ ($i = 1, 2, 3$) las coordenadas de dos puntos de la misma, se sabe que es, por definición [2],

$$\begin{gathered} g_{01} = a_1, \quad g_{02} = a_2, \quad g_{03} = a_3 \\ g_{23} = a_3 y_2 - a_2 y_3, \quad g_{31} = a_1 y_3 - a_3 y_1, \quad g_{12} = a_2 y_1 - a_1 y_2 \end{gathered} \tag{1.8}$$

donde las g_{ik} cumplen la relación

$$g_{01} g_{23} + g_{02} g_{31} + g_{03} g_{12} = 0 \tag{1.9}$$

y además, siendo A de módulo unidad,

$$g_{01}^2 + g_{02}^2 + g_{03}^2 = 1. \tag{1.10}$$

Con estas coordenadas y según la expresión (1.7), la integral (1.6) se escribe (recordando que las a_i, y_i son constantes,

---

(2) Recordemos que las coordenadas g_{ik} de la recta determinada por dos puntos (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) son

$$\begin{gathered} g_{01} = y_1 - x_1, \qquad g_{02} = y_2 - x_2, \qquad g_{03} = y_3 - x_3 \\ g_{23} = y_2 x_3 - y_3 x_2, \quad g_{31} = y_3 x_1 - y_1 x_3, \quad g_{12} = y_1 x_2 - y_2 x_1, \end{gathered}$$

las cuales cumplen la condición (1.9).

$$-D = g_{01}\int U\,.\,X'\,ds + g_{02}\int V\,.\,X'\,ds + g_{03}\int W\,.\,X'\,ds$$
$$+ g_{12}\int V\,.\,U'\,ds + g_{31}\int U\,.\,W'\,ds + g_{23}\int W\,.\,V'\,ds, \tag{1.11}$$

donde las integraciones están todas extendidas al intervalo $0,L$ y los acentos indican derivadas respecto el parámetro s. Como estas integrales, dado el movimiento, tienen valores determinados, las rectas para las cuales es $D=0$ tienen sus coordenadas g_{ik} ligadas por una relación lineal y homogénea; forman, por tanto, un complejo lineal, lo cual constituye el teorema de Blaschke enunciado en la introducción.

2. - Algunas definiciones. — Antes de entrar en el estudio de los casos particulares enunciados, vamos a resumir brevemente algunas definiciones referentes a complejos lineales de rectas.

Si para definir una recta g se toman las coordenadas g_{ik} de Grassmann y Plücker definidas anteriormente, las cuales satisfacen la condición (1. 9), un *complejo lineal* es el conjunto de rectas cuyas coordenadas satisfacen a una ecuación lineal y homogénea entre las g_{ik}, o sea,

$$h_{01}\,g_{01} + h_{02}\,g_{02} + h_{03}\,g_{03} + h_{23}\,g_{23} + h_{31}\,g_{31} + h_{12}\,g_{12} = 0, \tag{2.1}$$

donde las h_{ik} son coeficientes constantes.

El complejo se llama *especial* o *singular* cuando los coeficientes h_{ik} pueden considerarse también como las coordenadas de una recta, es decir, cuando satisfacen la relación (1. 9),

$$h_{01}\,h_{23} + h_{02}\,h_{31} + h_{03}\,h_{12} = 0. \tag{2.2}$$

Cuando un complejo es singular, se demuestra que está formado por todas las rectas que cortan a una recta fija (aquella cuyas coordenadas plückerianas son las h_{ik}). En el caso general, las rectas de un complejo lineal están distribuídas de tal manera que por cualquier punto del espacio pasan todas las de un haz contenido en un plano llamado *plano polar* del punto. Recíprocamente, las rectas del complejo contenidas en un plano cualquiera pasan todas por un punto que se llama *polo* del mismo. Todos los planos polares de los puntos de una recta pasan por otra recta, que se llama *conjugada* de la primera.

En particular, el polo del plano del infinito es un punto del mismo que determina una dirección del espacio; las rectas paralelas a esta dirección se llaman *diámetros* del complejo. Cada diámetro tiene por recta conjugada una recta del infinito y por tanto, los planos polares de los puntos de un diámetro son planos paralelos entre sí. En particular, hay un diámetro tal que los planos polares de todos sus puntos son planos perpendiculares al mismo: este diámetro se llama *eje* del complejo.

3. - Caso del movimiento alrededor de un punto fijo. —Se puede suponer que el punto fijo es el origen X del sistema de coordenadas móvil. Entonces es $X'=0$ y el complejo lineal de las rectas para las cuales es $D=0$, según (1.11) se reduce a

$$g_{12}\int V \cdot U' \, ds + g_{31}\int U \cdot W' \, ds + g_{23}\int W \cdot V' \, ds = 0. \tag{3.1}$$

Como antes, las integrales están todas, lo mismo que en lo sucesivo, extendidas de 0 a L, no poniéndolo para abreviar.

Se sabe que el movimiento de un triedro trirrectángulo U, V, W alrededor de su vértice X, queda determinado dando las funciones $p(s)$, $q(s)$, $r(s)$ que definen para cada valor de s el eje de rotación instantánea y cumplen las condiciones

$$U' = rV - qW, \quad V' = pW - rU, \quad W' = qU - pV. \tag{3.2}$$

Según estas relaciones será

$$\int V \cdot U' \, ds = \int r \, ds, \int U \cdot W' \, ds = \int q \, ds, \int W \cdot V' \, ds = \int p \, ds, \tag{3.3}$$

con lo cual los coeficientes del complejo lineal (3.1) pueden expresarse mediante las funciones p, q, r que definen el movimiento.

El complejo (3.1) es siempre singular. Las rectas que lo componen son todas aquellas que cortan a la recta fija que pasa por el punto X y tiene los cosenos directores α, β, γ dados por

$$\frac{\alpha}{\int p \, ds} = \frac{\beta}{\int q \, ds} = \frac{\gamma}{\int r \, ds}. \tag{3.4}$$

Si, por ejemplo, el movimiento es una rotación alrededor de un eje, p, q, r son constantes y proporcionales a los cosenos directores del eje de rotación; por tanto, el complejo (3. 1) está formado por todas las rectas que cortan al eje de rotación. Lo cual, por otra parte, es fácil de comprobar directamente.

Para que el complejo (3. 1) se reduzca a una identidad, según (3. 3) debe ser

$$\int p\, ds = \int q\, ds = \int r\, ds = 0. \qquad (3.5)$$

Por tanto, resumiendo todo lo obtenido, se tiene: *Si un triedro trirrectángulo U, V, W describe un movimiento alrededor de su vértice X y vuelve a su posición inicial, las rectas invariablemente unidas a él que describen superficies regladas cuyas trayectorias ortogonales de las generatrices son curvas cerradas, forman un complejo lineal singular definido por* (3. 1). *Si el movimiento está definido por las ecuaciones diferenciales* (3. 2), *las rectas del complejo son las que cortan a la recta que pasa por el punto fijo y cuyos cosenos directores, respecto el triedro U, V, W, están dados por* (3. 4). *Para que el complejo* (3. 1) *se reduzca a una identidad, o sea, para que todas las rectas describan superficies cuyas trayectorias ortogonales de las generatrices sean curvas cerradas, es necesario y suficiente que se cumplan las condiciones* (3. 5).

4. - Caso del movimiento del triedro fundamental de una curva del espacio. — Supongamos ahora que el punto X describe una curva del espacio cerrada C, y consideremos el movimiento particular en que el triedro móvil U, V, W coincide, en cada punto, con el triedro fundamental de la curva C. Sea U el vector tangente, V el normal principal y W el binormal. Tomando como parámetro s el arco de la curva C, tienen lugar las fórmulas de Frenet,

$$U' = \varkappa V, \quad V' = -\varkappa U + \tau W, \quad W' = -\tau V, \qquad (4.1)$$

siendo $\varkappa$ la curvatura y τ la torsión de C, ambas funciones de s.

Pondremos

$$K = \int_0^L \varkappa \, ds, \qquad T = \int_0^L \tau \, ds \tag{4.2}$$

y llamaremos a K la *curvatura total* y a T la *torsión total* de la curva cerrada C. Obsérvese que L es ahora la longitud de C.

Siendo X' el vector tangente, o sea, $X' = U$, la fórmula (1.11) se escribirá entonces

$$-D = g_{01} L + g_{12} K + g_{23} T. \tag{4.3}$$

Por consiguiente, en el caso particular considerado, el complejo lineal de rectas que describen superficies regladas tales que las trayectorias ortogonales de sus generatrices sean curvas cerradas, está definido por la ecuación

$$g_{01} L + g_{12} K + g_{23} T = 0. \tag{4.4}$$

Vamos a estudiar este complejo lineal.

Comparando (4.4) con (2.1) es $h_{01} = L$, $h_{02} = h_{03} = h_{31} = 0$, $h_{23} = T$, $h_{12} = K$, y por tanto, la condición (2.2) para que sea singular es

$$LT = 0. \tag{4.5}$$

Puesto que $L \neq 0$, resulta: *la condición necesaria y suficiente para que el complejo* (4.4) *sea singular, es que la curva C tenga torsión total nula.*

Como ejemplos de curvas alabeadas C cuya torsión total es nula, se tienen todas las curvas esféricas, o sea, aquellas contenidas en la superficie de una esfera.

En este caso, la ecuación del complejo lineal se reduce a

$$g_{01} L + g_{12} K = 0. \tag{4.6}$$

Para hallar la recta a la cual cortan todas las del complejo procederemos de la manera siguiente. Dado un punto Y de coordenadas y_1, y_2, y_3 y otro punto X de coordenadas $x_1, x_2 x_3$, según la definición recordada en la nota (2), se tiene

$$g_{01} = x_1 - y_1, \quad g_{12} = x_2 y_1 - x_1 y_2.$$

Por tanto la ecuación (4. 6) se puede escribir

$$(x_1 - y_1) L + (x_1 y_2 - x_2 y_1) K = 0 \tag{4. 7}$$

o sea

$$\frac{x_1}{Kx_2+L} = \frac{y_1}{Ky_2+L} = \lambda$$

que nos dice que las rectas del complejo son todas las que pertenecen a los planos del haz

$$x_1 - \lambda (K x_2 + L) = 0$$

o, lo que es lo mismo, todas las que cortan a la recta

$$x_1 = 0, \qquad x_2 = -\frac{L}{K}. \tag{4. 8}$$

Por consiguiente: *el complejo singular de las rectas que, al moverse rígidamente ligadas con el triedro fundamental de una curva cerrada de torsión total nula engendran superficies regladas cuyas trayectorias ortogonales son curvas cerradas, tiene por eje la paralela a la binormal a la curva en el punto posición instantánea del vértice del triedro, trazada por el punto de la normal principal que dista de dicho punto* $-L/K$.

Pasemos ahora a estudiar el caso en que el complejo no es singular, o sea, el caso $T \neq 0$.

En este caso, siendo (4. 4) la ecuación del complejo y según la nota ([2]), la ecuación del plano polar de un punto general y de coordenadas y_1, y_2, y_3 es

$$(x_1 - y_1) L + (x_1 y_2 - x_2 y_1) K + (x_2 y_3 - x_3 y_2) T = 0. \tag{4. 9}$$

Veamos algunos casos particulares:

a) *Planos polares de los puntos de la tangente.* Un punto de la tangente tiene las coordenadas $y_1, 0, 0$. Por tanto, según (4. 9), su plano polar será

$$(x_1 - y_1) L - x_2 y_1 K = 0.$$

Para cualquier valor de y_1, este plano contiene la recta

$$x_1 = 0, \quad x_2 = -\frac{L}{K}. \tag{4.10}$$

Por tanto: *el plano polar de un punto de la tangente, es el determinado por dicho punto y la recta fija* (4.10). Esta recta será la conjugada de la tangente.

En particular, el plano polar del punto X de la curva, es el plano normal, o sea: *el polo del plano normal es el punto X de la curva.*

b) *Planos polares de los puntos de la normal principal.* Consideremos el punto general $(0, y_2, 0)$; según (4.9) su plano polar será

$$x_1 (L + K y_2) - x_3 y_2 T = 0,$$

el cual forma con el plano osculador un ángulo ϑ tal que

$$\tang \vartheta = \frac{x_1}{x_3} = \frac{L + K y_2}{y_2 T}. \tag{4.11}$$

Por tanto: *el plano polar de un punto $0, y_2, 0$ de la normal principal, es el que contiene la misma normal principal y forma con el plano osculador un ángulo ϑ dado por* (4.11).

En particular, para que sea $\vartheta = 0$, debe ser $y_2 = -L/K$. Por tanto: *el polo del plano osculador es el punto $0, -L/K, 0$.*

c) *Planos polares de los puntos de la binormal.* Considerando el punto general $(0, 0, y_3)$; según (4.9) su plano polar será

$$x_1 L + x_2 y_3 T = 0.$$

El ángulo φ que forma este plano con el plano normal está dado por

$$\tang \varphi = -\frac{y_3 T}{L}. \tag{4.12}$$

Por tanto: *el plano polar de un punto $(0, 0, y_3)$ de la binormal es el que contiene a la binormal y forma con el plano normal un ángulo φ dado por* (4.12).

En particular, para $y_3 = \infty$, es $\varphi = \pi/2$; por tanto, *el polo del plano rectificante es el punto del infinito de la binormal.*

d) *Diámetro y ejes del complejo.* Para hallar la dirección de los diámetros y el eje del complejo (4. 4), es cómodo utilizar coordenadas homogéneas. Entonces, si y_1, y_2, y_3, y_4 son las coordenadas homogéneas de un punto Y y x_1, x_2, x_3, x_4 son las de un punto variable, la ecuación del plano polar del punto Y, según (4. 9), se escribirá

$$(x_1 y_4 - y_1 x_4) L + (x_1 y_2 - x_2 y_1) K + (x_2 y_3 - x_3 y_2) T = 0,$$

o sea,

$$(y_4 L + y_2 K) x_1 + (y_3 T - y_1 K) x_2 - y_2 T x_3 - y_1 L x_4 = 0.$$

Para que este plano sea el del infinito, $x_4 = 0$, debe ser

$$\frac{y_1}{y_3} = \frac{T}{K}, \quad y_2 = y_4 = 0.$$

Luego: *los diámetros son las rectas paralelas a la dirección*

$$\frac{y_1}{y_3} = \frac{T}{K}, \quad y_2 = 0.$$

En particular, el diámetro que pasa por el punto general (y_1^0, y_2^0, y_3^0) (otra vez en coordenadas no homogéneas), tiene por ecuaciones paramétricas (con el parámetro λ)

$$y_1 = y_1^0 + \lambda T, \quad y_2 = y_2^0, \quad y_3 = y_3^0 + \lambda K \qquad (4.13)$$

y por tanto el plano polar de un punto (y_1, y_2, y_3) de este diámetro es

$$(L + K y_2^0) x_1 + (y_3^0 T - y_1^0 K) x_2 - y_2^0 T x_3 - (y_1^0 + \lambda T) L = 0.$$

Para que este plano sea perpendicular al diámetro (4. 13) debe ser

$$\frac{L + K y_2^0}{T} = \frac{-y_2^0 T}{K}, \quad y_3^0 T - y_1^0 K = 0.$$

De aquí, según la definición de eje de un complejo (nº. 2), se tiene: *el eje del complejo lineal de rectas unido a cada punto de la curva cerrada C definido por* (4. 4), *es la recta*

$$y_2 = -\frac{KL}{K^2+T^2}, \quad \frac{y_1}{y_3} = \frac{T}{K} \tag{4. 14}$$

donde las coordenadas y_1, y_2, y_3 *se refieren al sistema formado por la tangente, normal principal y binormal correspondientes al punto considerado de C.*

5. - Complejo cuadrático de las rectas para las cuales es D = cte. — Observemos que según (1. 10), la ecuación (4. 3) puede escribirse en la forma homogénea

$$(g_{01} L + g_{12} K + g_{23} T)^2 = D^2 (g_{01}{}^2 + g_{02}{}^2 + g_{03}{}^2). \tag{5. 1}$$

Como L, K, T son constantes, esta ecuación (5. 1) nos dice que las rectas para las cuales D tiene un mismo valor constante forman un complejo cuadrático. Es decir: *Las rectas invariablemente unidas al triedro fundamental de una curva cerrada C, tales que las trayectorias ortogonales de las generatrices de la superficie reglada que ellas engendran al variar dicho triedro a lo largo de C, cortan a cada generatriz en puntos equidistantes a distancia D, forman un complejo cuadrático dado por la ecuación* (5. 1).

Pasemos a estudiar este complejo cuadrático.

Las rectas del complejo que pasan por un punto Y del espacio, según (5. 1) y lo dicho en la nota (²) forman un cono cuadrático de ecuación

$$\begin{aligned}[(x_1 - y_1) L + (x_1 y_2 - x_2 y_1) K + (x_2 y_3 - x_3 y_2) T]^2 \\ = D^2 [(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2]\end{aligned} \tag{5. 2}$$

donde y_1, y_2, y_3 son, como siempre, las coordenadas del punto Y.

Para ver la disposición de estos conos, consideremos su intersección con la esfera $(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2 = 1$. Esta intersección coincide con la de la misma esfera con los planos paralelos

$$(x_1 - y_1) L + (x_1 y_2 - x_2 y_1) K + (x_2 y_3 - x_3 y_2) T = \pm D. \tag{5. 3}$$

La distancia de estos planos al punto Y es

$$\delta=\frac{D}{\sqrt{(L+y_2K)^2+(y_3T-y_1K)^2+y_2{}^2T^2}}. \tag{5.4}$$

Para que el cono sea real, esta distancia debe ser igual o menor que 1, o sea,

$$D^2 \leqq (L+y_2 K)^2+(y_3 T-y_1 K)^2+y_2{}^2 T^2. \tag{5.5}$$

De todo esto se deducen inmediatamente las siguientes propiedades del complejo cuadrático (5. 1):

a) Las rectas del complejo cuadrático (5. 1) están distribuídas de tal manera que cada punto del espacio es vértice de un cono de revolución formado por rectas del complejo.

b) Para cada punto, el eje de este cono es la recta que pasa por el punto considerado y es perpendicular al plano polar del mismo respecto el complejo lineal (4. 4) estudiado en el nº. 4.

c) El cono es real si se cumple la desigualdad (5. 5) e imaginario en el caso contrario.

d) Por cada punto Y, la recta que describe la superficie reglada cuyas trayectorias ortogonales de las generatrices cortan a las mismas según puntos cuya distancia D es máxima, es la recta normal al plano polar de Y respecto el complejo lineal (4. 4).

e) El máximo valor de D para el cual el cono cuadrático mencionado es real para todos los puntos del espacio, viene dado buscando el valor mínimo del segundo miembro de (5. 5); un cálculo fácil demuestra que se obtiene para los puntos del eje del complejo lineal (4. 4), o sea, para los puntos de la recta (4. 14), y su valor es

$$D_{max}=\frac{LT}{\sqrt{K^2+T^2}}.$$

ROSARIO, INSTITUTO DE MATEMÁTICA.