TIRADA APARTE DE *MATEMATICÆ NOTÆ* - AÑO VII - FASC. 4

CURVAS D SOBRE CONOS

por

L. A. SANTALÓ

1. - *Introducción.* — Recordemos que se llaman curvas-D, o curvas de Darboux, de una superficie, aquellas cuya esfera osculatriz en cada punto es tangente a la superficie (¹).

En este trabajo nos proponemos estudiar las curvas-D sobre las superficies cónicas. Veremos que en este caso la ecuación diferencial de las mismas se puede integrar por cuadraturas, dando un resultado relativamente simple que permite la discusión completa.

2. - *Ecuación diferencial de las curvas-D.* — La ecuación diferencial de las curvas-D fué dada por primera vez por Darboux (²). Vamos a obtenerla rápidamente en la forma que nos será útil para el objeto perseguido.

Sea

$$X = X(u, v) \tag{2.1}$$

la ecuación vectorial de la superficie; es decir, con (2.1) se indican abreviadamente las tres ecuaciones paramétricas $X_i = X_i(u,v)$ $(i = 1, 2, 3)$ de la superficie.

Una curva sobre la superficie estará dada por dos funciones $u = u(t)$, $v = v(t)$ de un parámetro t. Si el punto $Z(t)$ es el centro de la esfera osculatriz a la curva $X = X(u(t), v(t))$ y r el radio de la misma, se cumplirá la relación vectorial

(¹) Bibliografía sobre estas curvas se puede ver en la *Encyclopädie der Mathematischen Wissenschaften* III₃, D 3, págs. 181-182. Ver también: G. LORIA, *Curve sghembe speciali*, vol. 2, pág. 225.

(²) *Comptes Rendus de l'Academie des Sciences*, Paris 1871, p. 733.

$$(X-Z)^2 = r^2. \tag{2.2}$$

Por definición de esfera osculatriz se deben cumplir también las relaciones que se obtienen derivando tres veces la ecuación anterior suponiendo Z y r constantes. Es decir,

$$\begin{aligned} (X-Z)\,X' &= 0 \\ (X-Z)\,X'' + X'^2 &= 0 \\ 3\,X'\,X'' + (X-Z)\,X''' &= 0 \end{aligned} \tag{2.3}$$

donde los productos son productos escalares de vectores y los acentos indican derivadas respecto el parámetro t.

Si la curva $X = X(u(t), v(t))$ es una curva-D, el centro Z debe ser el punto de la normal a la superficie que dista r del punto X, o sea llamando ξ al vector unitario normal a la superficie debe ser

$$X - Z = r\xi.$$

Sustituyendo esta expresión en (2.3), la primera ecuación se satisface idénticamente, por ser $\xi X' = 0$ (por ser X' tangente a la superficie) y las dos restantes dan

$$\begin{aligned} X'^2 + r\,\xi\,X'' &= 0 \\ 3\,X'\,X'' + r\,\xi\,X''' &= 0. \end{aligned} \tag{2.4}$$

La ecuación diferencial de las curvas-D se obtendrá eliminando r entre estas dos ecuaciones. Parecería que la ecuación resultante es de tercer orden, pero derivando $\xi X' = 0$ dos veces, se obtiene

$$\begin{aligned} \xi'\,X' + \xi\,X'' &= 0 \\ \xi''\,X' + 2\,\xi'\,X'' + \xi\,X''' &= 0 \end{aligned} \tag{2.5}$$

y de esta última ecuación se puede obtener $\xi\,X'''$, valor que sustituído en la segunda ecuación (2.4) y, eliminando r con la primera, permite llegar al resultado final

$$\frac{3X'X''}{X'^2}=\frac{2\xi'X''+\xi''X'}{\xi'X'} \tag{2.6}$$

que es la ecuación diferencial de las curvas-D en forma vectorial.

3. - *Curvas-D sobre conos.* — Para definir un cono consideremos como curva directriz de las generatrices la curva de intersección del cono con una esfera de radio unidad cuyo centro sea el vértice del cono. Esta curva será una curva esférica cuya ecuación vectorial será de la forma

$$E=E(s) \tag{3.1}$$

siendo s el arco de la curva y cumpliéndose la relación

$$E^2=1. \tag{3.2}$$

La ecuación del cono puede escribirse, entonces, en la forma

$$X=\lambda E(s) \tag{3.3}$$

siendo λ el parámetro que fija los puntos sobre cada generatriz. Es decir, los parámetros u, v del nº. 1 son ahora s, λ; el primero fija el punto sobre la directriz y por tanto la generatriz del cono, y el segundo el punto sobre esta generatriz. Una curva sobre el cono estará dada por dos funciones $\lambda=\lambda(t)$, $s=s(t)$. Para simplificar los cálculos tomaremos $t=s$, con lo cual toda curva del cono estará determinada por la sola función $\lambda=\lambda(s)$.

Para aplicar la ecuación (2.6) necesitamos las dos primeras derivadas de $E(s)$; recordemos para ello que $E'(s)=T(s)$, indicando por T el vector tangente de módulo unidad a la curva (3.1) y que, además, valen las fórmulas de Frenet

$$T'=\varkappa N, \quad N'=-\varkappa T+\tau B, \quad B'=-\tau N \tag{3.4}$$

siendo N y B los vectores unitarios normal principal y binormal respectivamente, y $\varkappa, \tau$ la curvatura y torsión de $E(s)$.

Se tiene con esto derivando (3.3),

$$X' = \lambda' E + \lambda T$$
$$X'' = \lambda'' E + 2\lambda' T + \lambda \varkappa N. \tag{3.5}$$

Además, el vector normal ξ se expresa por

$$\xi = E \wedge T \tag{3.6}$$

indicando $\wedge$ el producto vectorial, de donde,

$$\xi' = \varkappa (E \wedge N)$$
$$\xi'' = \varkappa' (E \wedge N) + \varkappa B - \varkappa^2 (E \wedge T) + \varkappa \tau (E \wedge B) \tag{3.7}$$

por ser $B = T \wedge N$.

De las fórmulas anteriores se deduce

$$X'^2 = \lambda^2 + \lambda'^2$$
$$X' X'' = \lambda' \lambda'' + 2 \lambda \lambda' + \lambda \lambda' \varkappa (EN)$$
$$\xi' X' = \lambda \varkappa T (E \wedge N) = - \lambda \varkappa (T \wedge N) E = - \lambda \varkappa (EB) \tag{3.8}$$
$$\xi' X'' = 2 \varkappa \lambda' (E \wedge N) T = 2 \varkappa \lambda' E (N \wedge T) = - 2 \varkappa \lambda' (EB)$$
$$\xi'' X' = \varkappa \lambda' (EB) - \lambda \varkappa' (EB) + \lambda \varkappa \tau (EN).$$

Sea α el ángulo que forma la normal principal N con el radio de la esfera que contiene $E(s)$ que va al punto de contacto. Puesto que el vector E tiene la dirección del radio y el sentido hacia el exterior de la esfera, es $EN = \cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$. Además, por el teorema de Meusnier aplicado a la esfera (de radio 1) que contiene $E(s)$ es $\cos \alpha = \rho$, siendo ρ el radio de curvatura de la curva $E(s)$, o sea $\rho = 1/\varkappa$. Por tanto

$$E N = -\frac{1}{\varkappa}. \tag{3.9}$$

Siendo E, N, B perpendiculares a T, están en un mismo plano y, por tanto,

$$E B = \operatorname{sen} \alpha = \sqrt{1 - \rho^2} = \frac{\sqrt{\varkappa^2 - 1}}{\varkappa}. \tag{3.10}$$

Sustituyendo estos valores en (3. 8) y reemplazando los valores obtenidos en la ecuación (2. 6) de las curvas D, después de simples transformaciones queda

$$\frac{3(\lambda'\lambda''+\lambda\lambda')}{\lambda^2+\lambda'^2}-2\frac{\lambda'}{\lambda}=\frac{\varkappa'}{\varkappa}+\frac{\tau}{\sqrt{\varkappa^2-1}}. \qquad (3.11)$$

Todavía esta ecuación se puede simplificar. En efecto, la curva $E(s)$ es una curva situada sobre una esfera de radio unidad; por tanto, el radio de su esfera osculatriz en todo punto vale 1 y, por tanto, se cumple la relación [3]

$$\frac{1}{\varkappa^2}+\frac{\varkappa'^2}{\varkappa^4\tau^2}=1$$

de la cual se deduce

$$\tau=\frac{\varkappa'}{\varkappa\sqrt{\varkappa^2-1}}$$

y, por tanto,

$$\frac{\varkappa'}{\varkappa}+\frac{\tau}{\sqrt{\varkappa^2-1}}=\frac{\varkappa\varkappa'}{\varkappa^2-1}. \qquad (3.12)$$

Sustituyendo en (3. 11), resulta que la ecuación definitiva de las curvas-D sobre la superficie cónica (3. 3) es

$$\frac{3(\lambda'\lambda''+\lambda\lambda')}{\lambda^2+\lambda'^2}-3\frac{\lambda'}{\lambda}=\frac{\varkappa\varkappa'}{\varkappa^2-1}. \qquad (3.13)$$

Una primera integración da

$$\frac{3}{2}\log(\lambda^2+\lambda'^2)-3\log\lambda=\frac{1}{2}\log(\varkappa^2-1)+a,$$

siendo a una constante de integración.

---

[3] Ver por ejemplo, W. BLASCHKE, *Differentialgeometrie* I, pág. 34; o bien W. GRAUSTEIN, *Differential Geometry*, pág. 73.

De aquí

$$(\lambda^2+\lambda'^2)^{3/2}=b\,\lambda^3\sqrt{\varkappa^2-1}$$

siendo b la constante e^{γ}. De esta ecuación se deduce

$$\frac{\lambda'}{\lambda}=\pm\sqrt{C\,(\varkappa^2-1)^{1/3}-1}$$

siendo C la nueva constante $b^{2/3}$.

Una última integración nos da finalmente como *ecuación de las curvas-D sobre las superficies cónicas*

$$\lambda=A\exp\left(\pm\int_0^s\sqrt{C\,(\varkappa^2-1)^{1/3}-1}\,ds\right) \qquad (3.14)$$

siendo A una nueva constante de integración e indicando por $\exp x$ la función e^x.

4. - *Discusión.* — En la ecuación (3.14) aparecen dos constantes arbitrarias A y C. La constante A queda determinada dando el punto inicial de la curva-D, pues haciendo $s=0$ resulsulta $A=\lambda(0)$. La constante C queda determinada por el ángulo que forma la curva-D con la generatriz del cono correspondiente al punto inicial. En efecto, llamando ω a este ángulo, es

$$\operatorname{tang}\omega=\frac{\lambda}{\lambda'}=\frac{1}{\pm\sqrt{C\,(\varkappa^2-1)^{1/3}-1}}. \qquad (4.1)$$

de donde se despeja C, teniendo en cuenta que $\varkappa$ tiene el valor correspondiente a la generatriz que pasa por el punto inicial. Al elevar al cuadrado para despejar C, el doble signo del radical desaparece; es decir, dado ω, queda determinado un valor único para C.

En cambio, a cada par de valores A y C corresponden dos curvas-D, correspondientes al doble signo que aparece en (3.14). Según (4.1) estas dos curvas se cortan en el punto inicial, según direcciones simétricas respecto la generatriz.

De (4.1) se deduce una consecuencia notable, a saber:

una curva-D cualquiera de una superficie cónica corta a todas las generatrices que corresponden a un valor dado de $\varkappa$ *de la curva directriz bajo ángulo constante.*

En consecuencia: 1°. *Si una curva-D corta varias veces a una misma generatriz del cono, lo hace siempre bajo el mismo ángulo.* 2°. *La condición necesaria y suficiente para que una superficie cónica tenga una curva-D que corta a todas las generatrices bajo un mismo ángulo (o sea, es una loxodrómica), es que sea de revolución (o sea,* $\varkappa =$ *constante). En este caso, todas las curvas-D gozan de la misma propiedad.*

Según los valores de C, las curvas-D de un cono pueden presentar dos formas diferentes. Cabe, en efecto, distinguir dos casos:

1. *La curva-D da la vuelta completa al cono.* Sea $\varkappa_m$ el valor mínimo de la curvatura de la curva directriz $E(s)$. Por estar esta curva situada sobre la esfera de radio unidad es $\varkappa_m \geqq 1$.

Para que una curva-D de la vuelta completa al cono, o sea, corte a todas las generatrices, el radical que figura en (3.14) debe ser siempre real y, por tanto, debe cumplirse la condición

$$C \geqq \frac{1}{(\varkappa_m^2-1)^{1/3}}. \tag{4.2}$$

En este caso, suponiendo que se trata de una superficie cónica cerrada, la curva-D dará infinitas vueltas, alejándose por un lado infinitamente del vértice del cono y acercándose asintóticamente al mismo por el otro. Llamemos $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots$ a los valores de λ correspondientes a los puntos en que una curva-D corta a una misma generatriz. Consideremos, por ejemplo, la curva-D correspondiente al signo $+$ en (3.14) y pongamos

$$K = \exp \int_0^L \sqrt{C(\varkappa^2-1)^{1/3}-1}\, ds \tag{4.3}$$

siendo L la longitud total de la curva cerrada $E(s)$. Según la ecuación (3.14) de la curva-D, será

$$\lambda_0 = A, \quad \lambda_1 = A\,K, \quad \lambda_2 = A\,K^2, \quad \ldots$$

y, por tanto,

$$\lambda_n = \lambda_0 K^n \tag{4.4}$$

y, análogamente, hacia el lado del vértice,

$$\lambda_{-n} = \lambda_0 K^{-n}. \tag{4.5}$$

Estas expresiones nos dicen que *los puntos en que una curva-D corta a una misma generatriz van alejándose o acercándose al vértice del cono, según la ley potencial* (4. 4) *o* (4. 5), *respectivamente.*

Además, por verificarse $\lambda_{i+1}/\lambda_i = K =$ constante, igualdad válida para cualquier generatriz, se tiene: *los arcos de una misma curva-D comprendidos entre pares de puntos de intersección consecutivos de una misma generatriz, son homotéticos respecto el vértice del cono.*

Si en lugar de considerar la curva-D correspondiente al signo $+$ en (3. 14) consideramos la correspondiente al signo $-$ con los mismos valores de A y C y al mismo tiempo invertimos el signo de la variable s de integración, todo lo anterior vale igualmente. Además, después del punto inicial, las dos curvas volverán a cortarse en un punto de la generatriz correspondiente al valor de s, para el cual es

$$\int_0^s = \frac{1}{2} \int_0^L \tag{4.6}$$

donde debe entenderse que bajo el signo de integración está la misma función que figura bajo el signo integral en (3. 14).

Además, si a partir de un punto de intersección se consideran las dos curvas, sean λ y $\bar{\lambda}$, correspondientes a los dos signos dee (3. 14), es $\lambda\bar{\lambda} = A^2$, siendo la constante A el valor de λ correspondiente al punto de intersección considerado. Esto nos dice que las dos curvas son inversas respecto de la esfera de centro el vértice del cono que pasa por el punto de intersección.

Se puede, por tanto, enunciar:

Las dos curvas-D que corresponden a los dos signos de (3. 14) *prolongadas cada una en los dos sentidos del arco s, se cortan infinitas veces, estando los puntos de intersección sobre dos generatrices: la correspondiente al punto inicial y la correspon-*

diente al valor de s definido por la ecuación (4. 6). *Ambas curvas son inversas respecto de cualquier esfera de centro el vértice del cono que pase por uno de los puntos de intersección.*

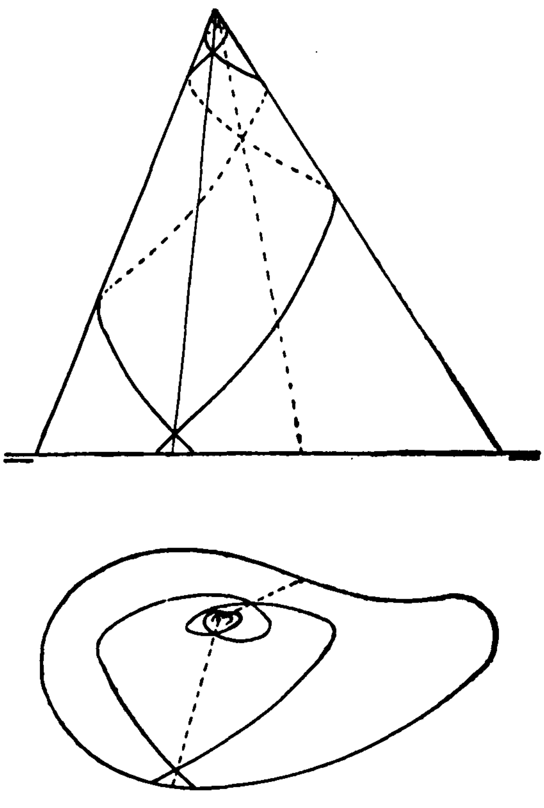

Fig. 1

En la fig. 1 se han representado dos curvas-D correspondientes a este caso.

2. *La curva-D no da la vuelta completa al cono.* Si no se cumple la condición (4. 2), o sea, es

$$C < \frac{1}{(\varkappa_m^2 - 1)^{1/3}} \tag{4.7}$$

la curva-D no corta a todas las generatrices y queda interrumpida en la generatriz correspondiente al valor de $x\,(x > x_m)$ tal que

$$C = \frac{1}{(x^2 - 1)^{1/3}} \tag{4.8}$$

y según (4.1) la curva-*D* incide ortogonalmente sobre esta generatriz de detención.

A partir de este punto de detención puede retrocederse. cambiando el signo en (3.14) y al mismo tiempo el sentido de recorrido de la variable s de integración. Se obtiene así la prolongación de la curva-*D* según una nueva rama que es inversa de la anterior respecto de la esfera de centro el vértice del cono y que pasa por el punto de retroceso. Se obtiene así una sucesión de ramas comprendidas entre las dos primeras generatrices para las cuales vale (4.8) y comprenden al punto inicial, las cuales, alternativamente, son homotéticas respecto del vértice del cono. Es decir:

Considerando todas las ramas como una sola curva-D, ella resulta inversa de sí misma respecto cualquier esfera de centro el vértice del cono que pasa por uno de los puntos de retroceso. Además, tomadas alternativamente, las ramas son homotéticas respecto el vértice del cono.

Si a partir del punto inicial se hubiera tomado el signo opuesto en (3.14), se tendría otra sucesión de arcos análoga a la anterior, siendo cada arco de esta sucesión homotético del correspondiente en la sucesión anterior, respecto el vértice del cono como centro de homotecia. Estas ramas se cortan alternativamente en puntos de la generatriz que pasa por el punto inicial y de otra generatriz.

Si s_1 y $-s_2$ son los valores de s correspondientes a las generatrices para las cuales vale (4.8), el valor de s correspondiente a la segunda generatriz que contiene los puntos de intersección está dado por la condición

$$\int_s^{s_1} = \int_{-s_2}^{0}$$

donde, como antes, la función subintegral, que se omite por brevedad, es la que figura en (3.14).

A partir de este punto s las curvas volverán a encontrarse sobre la generatriz correspondiente al punto inicial, y así sucesivamente.

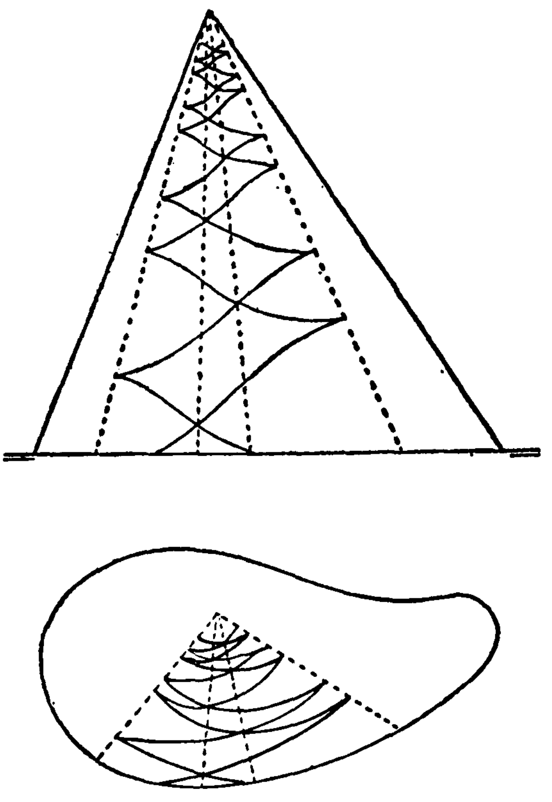

Fig. 2

Ambas curvas presentan, por tanto, las formas de la fig. 2.

5. *Caso del cono de revolución.* — Obsérvese que la función $\lambda(s)$ es precisamente la ecuación en coordenadas polares de la curva plana en que se transforma la curva-D del cono al desarrollar el mismo sobre el plano. El arco s pasa a ser el ángulo polar φ.

Para el caso de un cono de revolución la directriz esférica $E(s)$ es un círculo menor y, por tanto, $\varkappa =$ constante. En este caso la ecuación (3.14) nos da $\lambda = A \exp(Bs)$ ($B =$ constante), o sea: *el desarrollo de las curvas-D de los conos de revolución son espirales logarítmicas.*

Hay que observar que, puesto que el desarrollo del cono llena solamente un ánguo del plano, para tener la espiral logarítmica completa hay que suponer el cono formado por infinitas hojas superpuestas, que se desarrollan una a continuación de otra.

En vez de considerar el desarrollo se puede considerar la proyección de la curva-D sobre el plano de la base del cono de revolución. Como el radio vector R de la proyección está relacionado con λ por $R = \lambda \operatorname{sen} \vartheta$, siendo ϑ el ángulo que forman las generatrices con el eje del cono, resulta que también esta proyección es una espiral logarítmica y recíprocamente. o sea:

La proyección ortogonal de las curvas-D de un cono de revolución sobre el plano de la base son espirales logarítmicas y, recíprocamente, cualquier espiral logarítmica del plano de la base de un cono de revolución cuyo punto asintótico sea el centro de la base, se proyecta sobre el cono según una curva-D.

ROSARIO, INSTITUTO DE MATEMATICA.