ISAAC NEWTON Y EL BINOMIO

La primera vez que los estudiantes de matemáticas se encuentran con el nombre de Newton es cuando, en los cursos de enseñanza secundaria, aprenden la famosa *fórmula del binomio*. Se trata de la fórmula que permite expresar la potencia de una suma $(a+b)^m$ como suma de productos de potencias de los sumandos.

En los cursos elementales se supone el exponente m entero y positivo y el desarrollo consta entonces de un número finito de términos: es un polinomio. Pero los estudiantes que han llegado ya al cálculo infinitesimal saben que la fórmula del binomio sigue valiendo para exponentes cualesquiera, con la sola diferencia de que el desarrollo adquiere entonces infinitos términos: es una serie, de la cual hay que considerar, además, las condiciones de convergencia.

Con el simbolismo actual, la fórmula del binomio de Newton se escribe

$$(a+b)^m =$$
$$a^m + \binom{m}{1} a^{m-1} b + \binom{m}{2} a^{m-2} b^2 + \ldots + \binom{m}{n} a^{m-n} b^n + \ldots \quad (1)$$

siendo

$$\binom{m}{n} = \frac{m}{1} \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3} \times \ldots \times \frac{m-(n-1)}{n}. \qquad (2)$$

La expresión (1), teniendo en cuenta los valores (2) de los coeficientes, vale para un exponente real cualquiera; sólo hay que observar que para m entero y positivo los coeficientes $\binom{m}{n}$ son todos nulos a partir de $n > m$, mientras que en los demás casos no hay ningún coeficiente que sea cero y por tanto el número de términos del segundo miembro de (1) es infinito.

Para el caso de ser el exponente m entero y positivo, la fórmula (1) era ciertamente conocida mucho antes de Newton, por lo menos como regla práctica para calcular los coeficientes de las potencias sucesivas ($m = 1, 2, 3, 4, \ldots$), las cuales, por otra parte, podían obtenerse también mediante cálculos algebráicos elementales.

La *Encyclopaedie der mathematischen Wissenschaften*, I A 2, *Kombinatorik* (Netto), cita BRIGS (*Arithmetica logarithmica*, London, 1624) como la primera publicación donde se encuentra la regla del binomio para exponente entero y positivo, pero reconoce que MIGUEL STIFEL (en su obra *Arithmética integra*, Nuremberg, 1544) debió haber conocido la regla práctica para el cálculo de los coeficientes de las potencias sucesivas. Más tarde, B. PASCAL en el *Traité du triangle arithmetique*, redactado en 1654 y publicado en 1665, estudia los coeficientes binomiales por su significado combinatório y recuerda que ellos son los mismos números que van apareciendo en las bases sucesivas de sus triángulos aritméticos. La edición francesa de la misma Enciclopedia (*Encyclopédie des Sciences Mathematiques*, t. II, vol. 2, fasc. 1, pág. 34) recuerda, más precisamente, que Stifel en la obra citada, indica sin demostración un teorema equivalente a la fórmula recurrente

$$\binom{m}{n} = \binom{m-1}{n} + \binom{m-1}{n-1}$$

y BRIGGS, en la obra *Trigonometria Britannica* redactada alrededor del año 1600 y publicada por H. Gellibrand en 1633, trae una fórmula equivalente a

$$\binom{m}{n+1} = \frac{m-n}{n+1}\binom{m}{n}, \qquad (3)$$

de cuyas fórmulas se deduce inmediatamente la expresión (2) para los coeficientes de los términos del binomio.

UGO CASSINA en «*Storia del triangolo Aritmetico*» (Bolletino di Matematica, Año 1923) después de admitir la posibilidad de que algunas propiedades del triángulo aritmético

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

....

fueran ya conocidas por Euclides, cita que, con ligeras variantes, dicho triángulo se encuentra ya en la obra «*El valioso espejo de los cuatro elementos*» del autor chino TSCHU-SCHI-KIH (año 1303) y más tarde en una aritmética del alemán PETRUS APIANUS, editada en 1527. Pero el propio triángulo aritmético en la forma antedicha, que se atribuye generalmente a Pascal, se encuentra en el *General trattato dei numeri e delle misure* (Venezia, 1556) de NICOLÓ TARTAGLIA y precisamente en una forma tal que no puede caber duda de que dicho triángulo servía de regla para obtener los coeficientes del desarrollo del binomio, pues al lado de cada línea horizontal figura el nombre que en aquel tiempo se daba a las sucesivas potencias (1), (2).

---

(1) Estos nombres eran sucesivamente: *censo, cubo, censo censo, primer relato, censo cubo, segundo relato, censo censo censo, cubo cubo, censo primer relato, tercer relato, cubo censo censo*, etcétera.

(2) Una sugestión para juzgar sobre el grado de estos conocimientos en aquellos tiempos podemos encontrarla en el siguiente particular que tiene por sí mismo un interés histórico. En los *Cartelli di Matematica Disfida* de Ludovico Ferrari y Nicolò Tartaglia (*I sei Cartelli di Matematica Disfida primamente intorno alla generale risolusione delle equasioni cubiche di Ludovico Ferrari coi sei contro-cartelli in risposta di Nicolò Tartaglia, comprendenti le solusioni de' quesiti dall'una e dall'altra parte proposti.* Raccolti, Autografati e Pubblicati da Enrico Giordani, Milano 1871) este último propone a su competidor de dar reglas para extraer las raíces 5, 6, 7, 11, de un número (II Cartello, Risposta. Quesiti 22, 23, 24, 25). En su contestación (V° Cartello, pág. 47) Ludovico Ferrari cita a Miguel Stifel como el autor de haber enseñado a extraer esta suerte de raíces, pero en modo obscuro, por lo cual él considera conveniente extenderse en particulares, principalmente para los dos últimos casos. El método usado por Ferrari se basa precisamente sobre los desarrollos de las correspondientes potencias del binomio y los coeficientes de los términos sucesivos se dan para cada caso sin mayor explicación; únicamente para el caso del exponente 11 observa que ''questa estratione de radici, ha alcuni numeri peculiari, come ciascuna dell'altri'' y estos números peculiares son, precisamente (salvo un cierto número de ceros que Ferrari añade por comodidad de operar en su caso particular) los coeficientes binoniales de la potencia 11. Si se considera que el cono-

Todo lo dicho prueba, por tanto, que no pertenece a Newton la prioridad de la fórmula del binomio para m entero y positivo, prioridad que probablemente tampoco se atribuyó nunca él mismo ([3]). En cambio, para el caso general de ser el exponente m un número fraccionario y aún real cualquiera, el mérito parece corresponderle íntegramente.

El objeto perseguido por Newton en los trabajos que, accidentalmente, le llevaron a la fórmula del binomio, era el de obtener reglas que le permitieran la cuadratura de curvas de cualquier tipo. La idea básica consistía en *desarrollar en serie* la ecuación de la curva, para poder obtener entonces la expresión de la integral (cuadratura) como suma de las integrales de los términos sucesivos.

Parece ser que los métodos empleados por Newton para obtener el desarrollo en serie de tipos muy generales de expresiones algebráicas llegaron, por intermedio de H. Oldemburg ([4]) a oídos de Leibniz, el cual, en carta fechada el día 30 de marzo de 1675 escribía al mismo Oldemburg preguntándole por más detalles acerca de ellos ([5]).

---

cimiento tan solo del primer coeficiente (siempre igual al exponente de la potencia) habría conducido, imitando la regla de extracción de la raíz cuadrada, a operaciones probablemente más simples, se puede argumentar que en la época de Ferrari (la fecha del Cartello es de octubre de 1547) no era conocida la regla de hallar los sucesivos coeficientes a partir cada uno del anterior. Puede, por tanto, atribuirse a Briggs, no el primer conocimiento de la fórmula del binomio, pero sí la regla expresada por (3).

([3]) Es curiosa la observación hecha por Newton, la cual muestra en cierta manera el interés del tiempo por los juegos de números, de que las filas sucesivas del triángulo aritmético, o sea los coeficientes del desarrollo del binomio, forman en conjunto las cifras de las potencias sucesivas de 11. Así: $11^0 = 1$, $11^1 = 11$, $11^2 = 121$, $11^3 = 1331$, $11^4 = 14641$. Naturalmente que para exponentes superiores a 4, al aparecer números de más de dos cifras, la regla debe modificarse.

Ver *Isaaci Newtoni Opuscula*, Collegit partimque Latiné vertit ac recensuit Joh. Castillioneus. Tomus Primus. Lausannae & Genevae, Apud Marcum-Michaelem Bousquet & Socios. MDCCXLIV. Pág. 329.

([4]) H. Oldemburg, que servía de intermediario entre Newton y Leibniz, nació en Bremen en 1626 y murió en Charlton, cerca de Greenwich, en 1678. Fué cónsul de Alemania en Londres y miembro de la Sociedad real de Ciencias de Inglaterra, teniendo a su cargo durante varios años la publicación de los *Philosophical Transactions* de dicha Sociedad.

([5]) Dice la carta: "Scribis clarissimum Newtonum vestrum habere Methodum exhibendi Quadraturas omnes, omninoque curvarum superficierum et Soli-

Enterado Newton de estos deseos de Leibniz, no tiene inconveniente en escribir a Oldemburg una carta célebre, de fecha 13 de junio de 1676 (6), en la cual aparece, por primera vez, la fórmula del binomio para exponente racional cualquiera.

El enunciado del teorema que expresa la fórmula del binomio está expuesto al comienzo de la carta con las siguientes palabras:

«Las fracciones se reducen a series infinitas por división «y las cantidades radicales por extracción de raíces, instituyendo estas operaciones sobre las expresiones algebraicas como «suele hacerse para los números decimales. Estos son los fun«damentos de tales reducciones.

«Pero las extracciones de raíces se abrevian mucho por «el siguiente teorema:

$$(P+PQ)^{\frac{m}{n}}=P^{\frac{m}{n}}+\frac{m}{n}AQ+\frac{m-n}{2n}BQ+\frac{m-2n}{3n}CQ+$$
$$+\frac{m-3n}{4n}DQ+\ldots \tag{4}$$

«donde $\frac{m}{n}$ puede ser entero o fraccionario, positivo o nega«tivo» (7).

Las letras A, B, C,... representan, cada una, el término que precede a aquél en que ella figura. Así $A=P^{\frac{m}{n}}$, $B=\frac{m}{n}AQ$, $C=\frac{m-n}{2n}BQ$, etc. Esta fórmula (4) es la fórmula del binomio en la forma dada por Newton por primera vez.

---

dorum ex revolutione genitorum Dimensionis, et Centrorum gravitatis inventionis, per appropinquationes scilicet, ita enim interpretor. Quae Methodus si est universalis et commoda, meretur aestimari; nec dubito fore ingeniosissimo Auctore dignam''. *Loc. cit.*, p. 300.

(6) *Loc. cit.*, p. 307.

(7) ''Fractiones in infinitas Series reducuntur per Divisionem; et Quantitates Radicales per Extractionem Radicum: perinde instituendo Operationes istas in Speciebus, ac institui solent in Decimalibus Numeris. Haec sunt Fundamenta harum Reductionum.

Sed Extractiones Radicum multum abbreviantur per hoc Theorema...''.

En esta primera carta, Newton no da, ni demostración, ni justificación alguna de como ha llegado a establecer su fórmula. Se limita a añadir, a continuación del enunciado, que «Por lo demás el uso de la regla se pone de manifiesto con ejemplos» ([8]) y expone 9 ejemplos, algunos de los cuales reproducimos literalmente por curiosidad histórica:

I. $\sqrt{c^2+x^2}=(c^2+x^2)^{\frac{1}{2}}=c+\frac{x^2}{2c}-\frac{x^4}{8c^3}+\frac{x^6}{16c^5}-\frac{5x^8}{128c^7}+\ldots,$

pues, en este caso, es $P=c^2$, $Q=\frac{x^2}{c^2}$, $m=1$, $n=2$.

II. $$\sqrt[5]{c^5+c^4x-x^5}=(c^5+c^4x-x^5)^{\frac{1}{5}}=$$

$$=c+\frac{c^4x-x^5}{5c^4}-\frac{2c^8x^2+4c^4x^6-2x^{10}}{25c^9}+\ldots,$$

habiendo puesto en la fórmula general $m=1$, $n=5$, $P=c^5$, $Q=\frac{c^4x-x^5}{c^5}$. Poniendo, en cambio, $P=-x^5$, $Q=\frac{c^4x+c^5}{-x^5}$ vale $(c^5+c^4x-x^5)^{\frac{1}{5}}=-x+\frac{c^4x+x^5}{5x^4}+\frac{2c^8x^2+4c^9x+c^{10}}{25x^9}$ $+\ldots$. El primer caso se eligirá si x es muy pequeño; el segundo si es muy grande ([9]).

III. $\frac{N}{\sqrt[3]{y^3-a^2y}}=N(y^3-a^2y)^{-\frac{1}{3}}=N\left(\frac{1}{y}+\frac{a^2}{3y^3}+\frac{a^4}{9y^5}+\frac{7a^6}{81y^7}+\ldots\right)$, habiendo puesto $P=y^3$, $Q=-\frac{a^2}{y^2}$, $m=-1$, $n=3$.

IV. $(d+e)^{\frac{4}{3}}=d^{\frac{4}{3}}+\frac{4}{3}ed^{\frac{1}{3}}+\frac{2e^2}{9d^{\frac{2}{3}}}-\frac{4e^3}{81d^{\frac{5}{3}}}+\ldots.$

V. El método permite obtener las potencias enteras. Por ejem-

([8]) "Ceterum usus Regulae patebit Exemplis".

([9]) Es notable esta observación de Newton. Aunque no expone en ninguna parte condiciones de convergencia de sus desarrollos, vemos como se preocupa de elegir los términos P y Q de manera conveniente.

plo, si se desea $(d+e)^5$, basta tomar $P=d$, $Q=\frac{e}{d}$, $m=5$, $n=1$. Queda $(d+e)^5=d^5+5d^4e+10d^3e^2+10d^2e^3+5de^4+e^5$.

Esta primera carta mencionada de Newton contiene, además, ciertos métodos para el cálculo de soluciones numéricas de ecuaciones algebraicas y para el cálculo del área y otros elementos de determinadas curvas algebraicas. El método que utiliza para el cálculo aproximado de las raíces de una ecuación consiste en ir obteniendo su desarrollo en serie en función de los coeficientes, por un procedimiento que en el fondo equivale al de los coeficientes indeterminados. Por este mismo camino da también algunos ejemplos de inversión de series.

Enterado Leibniz de la carta anterior, contesta a Oldemburg (carta fechada el 27 agosto de 1676) agradeciendo el haber sido hecho partícipe de tan interesantes resultados de Newton «de cuyo ingenio son dignos». Sin embargo ruega de insistir sobre Newton por si tuviera a bien explicar con más detalle ciertos puntos de la carta mencionada, en particular «el origen del teorema enunciado al principio», refiriéndose al teorema del binomio.

Transmitidos a Newton, siempre por intermedio de Oldemburg, estos deseos de Leibniz, contesta en una segunda carta célebre, de fecha 24 octubre de 1676, en la cual expone en manera curiosa, y sin duda bien artificial, como ha llegado a la fórmula del binomio. Es la siguiente:

Desde hacía unos pocos años habían sido dadas por Wallis [10] las expresiones de las áreas limitadas por las curvas de ecuación $y=(1-x^2)^m$, siendo m entero y positivo, comprendidas entre las ordenadas x y 0. Estas expresiones, para los primeros valores de m son, como se sabe,

$$\begin{aligned}
&m=0,\ \text{área}=x\\
&m=1,\ \text{área}=x-\frac{1}{3}x^3\\
&m=2,\ \text{área}=x-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5\\
&m=3,\ \text{área}=x-\frac{3}{3}x^3+\frac{3}{5}x^5-\frac{1}{7}x^7
\end{aligned} \qquad (5)$$

....

(10) En su *Arithmetica Infinitorum*, publicada en 1656.

A partir de estas fórmulas, dice Newton: si en lugar de m entero, tomamos por ejemplo los números racionales de denominador 2, o sea $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2} \ldots$ bastará interpolar en las expresiones anteriores. El primer término es siempre x. Para los segundos términos se observa que están en progresión aritmética y por tanto deberá interpolarse por proporcionalidad. De esta manera los dos primeros términos de las expresiones de las áreas de $(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$, $(1-x^2)^{\frac{3}{2}}$, $(1-x^2)^{\frac{5}{2}}, \ldots$ serán, respectivamente $x - \frac{\frac{1}{2}x^3}{3}$, $x - \frac{\frac{3}{2}x^3}{3}$, $x - \frac{\frac{5}{2}x^3}{3}, \ldots$

Los denominadores de los coeficientes de las expresiones (5) se observa que van siguiendo la progresión 1, 3, 5, 7, ... y en cuanto a los numeradores se van obteniendo por los productos sucesivos de la expresión

$$\frac{m-0}{1} \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3} \times \frac{m-3}{4} \times \ldots$$

Cuando m es entero esta sucesión de productos se termina y las expresiones (5) tienen un número finito de términos. Sin otras consideraciones, añade Newton: la regla se aplicará también para las series interpoladas, y así, por ejemplo, para el caso del círculo $(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$, siendo el segundo término $\frac{\frac{1}{2}x^3}{3}$, habrá que poner $m = \frac{1}{2}$ y los sucesivos numeradores irán siendo $\frac{1}{2} \times \frac{\frac{1}{2}-1}{2} = -\frac{1}{8}, -\frac{1}{8} \cdot \frac{\frac{1}{2}-2}{3} = \frac{1}{16}, \ldots$

Por tanto, el área limitada por $(1-x^2)^{1/2}$ será

$$x - \frac{\frac{1}{2}x^3}{3} - \frac{\frac{1}{8}x^5}{5} - \frac{\frac{1}{16}x^7}{7} \ldots$$

Sigue Newton observando que si en lugar de considerar las áreas limitadas por las curvas de ecuación $y=(1-x^2)^m$ se consideran los desarrollos

$$(1-x^2)^0=1$$

$$(1-x^2)^1=1-x^2$$

$$(1-x^2)^2=1-2x^2+x^4$$

$$(1-x^2)^3=1-3x^2+3x^4-x^6$$

....

se observa que los coeficientes de estos desarrollos son los numeradores de los coeficientes de los desarrollos (5) de las áreas correspondientes. Análogamente, los coeficientes de los desarrollos de las expresiones interpoladas $(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$, $(1-x^2)^{\frac{3}{2}}$, en general de $(1-x^2)^m$, serán los numeradores de los coeficientes de los desarrollos de las áreas correspondientes, o sea, los productos sucesivos de la sucesión $m\times\frac{m-1}{2}\times\frac{m-2}{3}\times\frac{m-3}{4}\times\ldots$ Como ejemplos cita Newton los siguientes:

$$(1-x^2)^{\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4-\frac{1}{16}x^6-\ldots.$$

$$(1-x^2)^{\frac{3}{2}}=1-\frac{3}{2}x^2+\frac{3}{8}x^4+\frac{1}{16}x^6\ldots$$

$$(1-x^2)^{\frac{1}{3}}=1-\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{9}x^4-\frac{5}{81}x^6\ldots$$

Para comprobar estas reglas da, siempre en la segunda carta citada, únicamente dos razones. La primera consiste en observar que multiplicando la expresión $1-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4-$ $-\frac{1}{16}x^6\ldots$ por sí misma, según la regla de multiplicación de polinomios, se obtiene efectivamente $1-x^2$; también multiplicando tres veces la expresión $1-\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{9}x^4-\frac{5}{81}x^6\ldots$ se obtiene $1-x^2$.

La segunda justificación se aplica nada más al caso de exponente $\frac{1}{2}$ y consiste en observar que, efectivamente, los coeficientes dados para dicho desarrollo son los mismos que se obtienen al extraer la raíz cuadrada de $1 - x^2$ por el método aritmético representado en el siguiente esquema (que reproducimos exactamente de la carta de Newton):

$$
\begin{array}{l}
1 - x^2 \quad \left(1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{16}x^6 - \ldots\right. \\
\underline{1} \\
\underline{0 - x^2} \\
\quad \underline{-x^2 + \frac{1}{4}x^4} \\
\qquad -\frac{1}{4}x^4 \\
\qquad \underline{-\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{8}x^6 + \frac{1}{64}x^8} \\
\qquad\qquad -\frac{1}{8}x^6 - \frac{1}{64}x^8
\end{array}
$$

Una vez obtenido el desarrollo de $(1 - x^2)^m$, menciona Newton como puede obtenerse el desarrollo de expresiones análogas. Por ejemplo, para el desarrollo de la expresión general $(a \pm b)^m$ bastará escribir $(a \pm b)^m = a^m \left(1 \pm \frac{b}{a}\right)^m$ y poner $\pm \frac{b}{a} = x^2$.

También observa Newton ([11]) que la regla del binomio sirve para desarrollar potencias de polinomios y pone el siguiente ejemplo: para desarrollar $\sqrt{a^2 - a x + \frac{x^3}{a}}$ se pondrá $a^2 - a x = z^2$ y queda $\left(z^2 + \frac{x^3}{a}\right)^{\frac{1}{2}} = z + \frac{x^3}{2 a z} - \frac{x^6}{8 a^2 z^3} - \ldots$; basta entonces substituir las potencias (positivas o negativas) de z por sus desarrollos a partir de $z = (a^2 - a x)^{\frac{1}{2}}$.

Al final de la segunda carta Newton observa también, sin justificación alguna, que su fórmula es aplicable incluso para exponentes irracionales, y pone el ejemplo de $(x^{\sqrt{2}} + x^{\sqrt{7}})^{\sqrt[3]{2/3}}$.

([11]) En la segunda carta, *loc. cit.*, pág. 340.

Aun cuando, evidentemente, el rigor formal que se exigía a las demostraciones algebraicas de aquel tiempo no puede compararse con el actual, hay que pensar sin embargo que Newton, al proporcionar únicamente razones que hoy diríamos ser a lo sumo de un valor heurístico, tuviera el propósito de ocultar el verdadero camino por el cual habría llegado a convencerse de la seguridad matemática de la fórmula del binomio, la cual es posible que hubiera efectivamente entrevisto a través del método señalado de interpolación. Hay que recordar la costumbre común en el siglo anterior de mantener semejantes secretos científicos, que posiblemente no había desaparecido completamente, y el mismo Newton, en la citada segunda carta a Oldemberg oculta lo esencial de sus propios procedimientos por medio de un anagrama [12].

Puede ser por tanto interesante buscar, en la misma obra de Newton, alguna sugestión para establecer una hipótesis razonable acerca de los fundamentos ciertos de la fórmula en la mente de Newton. El Prof. B. Levi me indica en este sentido que una dirección posible sería la basada en las siguientes consideraciones.

Se observa que Newton conocía la fórmula de derivación $\dot{x^m} = m\, x^{m-1} \dot{x}$; para m entero la demostración, que nosotros damos a menudo independientemente de la fórmula del binomio, para Newton se obtenía aplicando dicha fórmula o tan solo el segundo término de ella, que era bien conocido [13].

---

(12) l. c. pág. 335. — "Fundamentum harum Operationum, satis obvium quidem, (quoniam jam non possum explicationem ejus prosequi), sic potius celavi *6a co d æ 13e ff 7i 8l 9n 4o 4q rr 4s 9t 12v x*". es decir: "El fundamento de estas operaciones, bastante obvio ciertamente, (por cuanto yo no puedo continuar en su explicación) encubrí pues así...". El anagrama está formado indicando para cada letra el número de veces que se encuentra en la frase que quiere significar; ésta era precisamente: Data æquatione quotcumque fluentes quantitates involvente, fluxiones invenire; et vice versa (Dada una ecuación incluyendo de cualquier modo cantidades fluentes, encontrar las fluxiones; y vice versa).

(13) Ver, en la obra citada, el Opusculum II, Problema I "Data relatione, quam invicem habent fluentes Quantitas, determinare Rationem, quae inter earum Fluxiones intercedit". Si bien este opúsculo no se imprimió por primera vez hasta el año 1736, el manuscrito existía ya desde mucho antes y en particular el problema a que nos referimos era ya conocido de Newton en la época de la segunda carta a Leibniz, pues en ella (loc. cit., pág. 335) se hace refe-

Para m número racional cualquiera, la fórmula era consecuencia de la fórmula conocida para m entero y de su método general de determinar la derivada de funciones implícitas definidas por ecuaciones algebraicas (14). Poniendo $x = 1 + z$, Newton podía escribir según esto, una fórmula equivalente a

$$\frac{d}{dz}(1+z)^m = m\,(1+z)^{m-1}$$

$$m\,(1+z)^m = (1+z)\frac{d}{dz}(1+z)^m.$$

Por otro lado, escribiendo

$$(1+z)^m = 1 + m\,z + c_2\,z^2 + c_3\,z^3 + \dots$$

y admitiendo la derivabilidad de la serie término a término, lo que desde luego Newton admitía, se obtiene

$$m + m^2 z + c_2\,m\,z^2 + c_3\,m\,z^3 + \dots$$
$$= m + (2\,c_2 + m)\,z + (3\,c_3 + 2\,c_2)\,z^2 + (4\,c_4 + 3\,c_3)\,z^3 + \dots$$

e igualando los coeficientes homólogos resulta

$$m\,c_k = (k+1)\,c_{k+1} + k\,c_k, \qquad c_{k+1} = \frac{m-k}{k+1}\,c_k$$

que da la manera recurrente de obtener los coeficientes.

Puede notarse que esta demostración no pide que m sea racional, con sólo conocer la regla de derivación para un m cualquiera.

Durante más de un siglo la fórmula de Newton fué aceptada y aplicada por los analistas sin dar una demostración sólida. Unicamente después que Lagrange (1813) y Cauchy (1826) hubieron demostrado rigurosamente la fórmula de Taylor con la evaluación del resto, se tuvo el modo de darle demostraciones completamente satisfactorias, que son esencialmente aquellas corrientes todavía en los tratados de Análisis.

Luis A. Santaló

---

rencia a dicho problema, precisamente mediante el anagrama citado en la nota (13)

(14) Por ejemplo, para hallar la derivada de $x^{\frac{m}{n}}$, Newton ponía $x^m = y^n$ y derivando obtenía $m\,x^{m-1}\,\dot{x} = n\,y^{n-1}\,\dot{y}$, de donde $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{m}{n}\,x^{\frac{m}{n}-1}$.