UNAS DESIGUALDADES ENTRE LOS ELEMENTOS DE UN TETRAEDRO EN GEOMETRIA NO-EUCLIDIANA

POR

L. A. SANTALÓ

1. *Enunciado de los resultados.* — Sean l_i las longitudes de las aristas de un tetraedro del espacio euclidiano y α_i los ángulos diedros correspondientes $(i=1,2,\ldots,6)$. Es sabido que entre estos elementos valen las siguientes desigualdades (*)

$$2\sum \alpha_i l_i < \pi \sum l_i < 3\sum \alpha_i l_i \tag{1.1}$$

donde la suma, aquí y en todo lo que sigue se entiende extendida de 1 a 6.

El objeto de esta nota es generalizar estas desigualdades al caso de las geometrías no-euclidianas o bien, lo que es equivalente, a tetraedros de un espacio de curvatura constante K.

El resultado a que se llega es el siguiente:

Teorema 1.- *Para todo tetraedro del espacio tridimensional de curvatura constante K, cuyas aristas tengan longitudes l_i y cuyos ángulos correspondientes sean α_i $(i=1,2,\ldots,6)$, tienen lugar las desigualdades*

$$2\sum \alpha_i l_i < \pi \sum l_i + 4KV < 3\sum \alpha_i l_i - 2KV \tag{1.2}$$

donde V es el volumen del tetraedro.

(*) G. POLYA - G. SZEGO, *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis*, Berlin, 1925, Vol. II, pág. 166.

Para $K=0$ se tienen las desigualdades (1.1) del caso euclidiano; para $K>0$ las correspondientes al caso no euclidiano elíptico, y para $K<0$ las del caso hiperbólico. Supondremos por simplicidad $|K|=1$, lo que evidentemente no constituye restricción.

Las desigualdades, lo mismo que en el caso euclidiano, sólo pueden convertirse en igualdades cuando el tetraedro degenera en un segmento, sea por confundirse en una sola tres aristas concurrentes (en cuyo caso es la segunda desigualdad de (1.2) la que degenera en igualdad), sea por reducirse a puntos dos aristas opuestas (en cuyo caso es la primera desigualdad (1.2) la que se reduce a igualdad).

Ordenando convenientemente los términos de las desigualdades (1.2) el teorema se puede enunciar:

Entre las longitudes l_i, *los ángulos diedros correspondientes* α_i *y el volumen* V *de un tetraedro del espacio no euclidiano, valen las desigualdades*

$$\frac{1}{4}\Sigma\,(2\alpha_i-\pi)\,l_i<V<\frac{1}{6}\Sigma\,(3\alpha_i-\pi)\,l_i \tag{1.3}$$

para el espacio elíptico, y las

$$\frac{1}{6}\Sigma\,(\pi-3\alpha_i)\,l_i<V<\frac{1}{4}\Sigma\,(\pi-2\alpha_i)\,l_i \tag{1.4}$$

para el espacio hiperbólico.

Estas acotaciones para V tienen interés por el hecho de que el volumen de un tetraedro del espacio no euclidiano se sabe que no se puede expresar mediante funciones elementales de las longitudes de las aristas y de los ángulos diedros. (Expresiones mediante integrales no expresables por funciones elementales pueden verse, por ejemplo, en J. L. Coolidge, *The elements of non-euclidean geometry*, Londres, 1909, págs. 183-185; H. W. Richmond, *The volume of a tetrahedron in elliptic space*, Quarterly Journal of Mathematics, Vol. XXXIV, 1903). Las desigualdades anteriores dan acotaciones para estas integrales, acotaciones que no se pueden mejorar, puesto que se convierten en igualdades para los casos de degeneración mencionados.

2. *Demostración.* — La demostración que vamos a dar sigue el mismo camino que la dada por Pólya en el caso euclidiano. Sólo necesitamos ciertas fórmulas integrales de los espacios de curvatura constante que hemos dado en la Nota *Geometría Integral en los Espacios de Curvatura constante* de este mismo volumen (págs. 1-28).

Recordemos que la densidad para medir conjuntos de planos vale (loc. cit. fórmula (2.15)),

$$de = \cos^2 k\rho \, [d\Omega \, d\rho] \tag{2.1}$$

y que con esta densidad la medida de los planos que cortan a un cuerpo convexo Q de volumen V y curvatura media M vale (loc. cit. fórmula (10.4)),

$$m(Q \,.\, e \neq 0) = M + KV. \tag{2.2}$$

Si Q es un tetraedro, según la observación b) del n°. 7 del trabajo citado (fórmula (7.4)), la curvatura media vale

$$M = \frac{1}{2} \Sigma \, (\pi - \alpha_i) \, l_i = \frac{1}{2} \, \pi \, \Sigma \, l_i - \frac{1}{2} \, \Sigma \, \alpha_i l_i \tag{2.3}$$

con lo cual (2.2) queda

$$m\,(Q \,.\, e \neq 0) = \frac{1}{2} \, \pi \, \Sigma \, l_i - \frac{1}{2} \, \Sigma \, \alpha_i l_i + KV. \tag{2.4}$$

Por otra parte consideremos una curva C del espacio, rectificable y de longitud L. La densidad de puede expresarse también (fórmula (2.13) del loc. cit.) por

$$de = [d\Omega \, dt] \tag{2.5}$$

donde dt representa el elemento de longitud normal a e en un punto P del mismo y $d\Omega$ es el elemento de área sobre la esfera euclidiana unidad de centro P correspondiente a la dirección normal a e. Si e corta a C, tomemos por punto P un punto de la intersección. Llamando ϑ al ángulo entre la normal a e y la tangente a C en P y ds al elemento de arco de C, es $dt = |\cos \vartheta| \, ds$.

Sustituyendo en (2. 5) e integrando $d\Omega$ a la semiesfera unidad (para considerar todos los planos que pasan por P) y luego integrando s a toda la curva C (para tener en cuenta todos los planos que cortan a C), resulta el valor πL. De esta manera cada plano ha quedado contado tantas veces como puntos de intersección tiene con C; llamando n a este número es, pues,

$$\int n\, de = \pi L \qquad (2.6)$$

extendida la integración a todos los planos para los cuales es $n \neq 0$, fórmula bien conocida para el caso euclidiano y que vemos vale lo mismo para cualquier espacio de curvatura constante.

Aplicando (2. 6) al conjunto de las 6 aristas del tetraedro considerado al principio, será

$$\int n\, de = \pi \Sigma\, l_i. \qquad (2.7)$$

Observemos que para las aristas de un tetraedro sólo puede ser $n=3$ o $n=4$. Llamando m_3, m_4 a las medidas de los conjuntos de planos que cortan respectivamente a 3 o a 4 aristas (2. 4) y (2. 7) se pueden escribir, respectivamente,

$$m_3 + m_4 = \frac{1}{2}\pi \Sigma\, l_i - \frac{1}{2}\Sigma\, \alpha_i l_i + KV$$

$$3 m_3 + 4 m_4 = \pi \Sigma\, l_i\ .$$

de cuyo sistema se deduce

$$m_3 = \pi \Sigma\, l_i - 2 \Sigma\, \alpha_i l_i + 4 KV$$

$$m_4 = \frac{3}{2}\Sigma\, \alpha_i l_i - \frac{1}{2}\pi \Sigma\, l_i - 3KV.$$

Como las medidas m_3, m_4 no pueden ser negativas, resultan las desigualdades

$$\pi \Sigma\, l_i + 4KV \geqq 2 \Sigma\, \alpha_i l_i \qquad (2.8)$$

$$3 \Sigma\, \alpha_i l_i \geqq \pi \Sigma\, l_i + 6KV. \qquad (2.9)$$

La igualdad en (2.8) sólo valdrá cuando sea $m_3=0$, o sea cuando todos los planos que cortan al tetraedro corten a 4 aristas, lo cual sólo puede ocurrir en el caso en que el tetraedro degenere en un segmento por haberse reducido a puntos dos aristas opuestas. La igualdad en (2.9) sólo valdrá cuando $m_4=0$, o sea cuando todos los planos corten al tetraedro en 3 puntos, lo cual sólo ocurre cuando el tetraedro degenera en un segmento por haberse confundido tres aristas concurrentes.

Para tetraedros no degenerados valen en (2.8) y (2.9) los signos de desigualdad y ellas equivalen a las desigualdades (1.2) que queríamos demostrar.

Haciendo $K=1$ o $K=-1$ y ordenando convenientemente los términos se obtienen las desigualdades (1.3), (1.4).

FACULTAD DE CIENCIAS FISICOMATEMATICAS.
LA PLATA.