SOBRE EL TEOREMA DE HOLDITCH Y ANALOGOS EN GEOMETRIA NO EUCLIDIANA

POR

L. A. SANTALÓ

Introducción

El llamado teorema de Holditch dice (¹):

Sea C una curva plana y cerrada que limita un área F_0. Si AB es una cuerda de longitud constante que desliza sobre C y P es un punto de la misma tal que $PA = a$, $PB = b$, el área F_1 interior a la curva descrita por P es tal que $|F_0 - F_1| = \pi a b$.

Es decir, se tiene el resultado curioso de que el área comprendida entre la curva dada y la descrita por P no depende de la primera, sino únicamente de las longitudes a, b de los segmentos en que P divide a la cuerda.

Recientemente se han dado dos generalizaciones de este teorema en direcciones distintas. Por una parte, E. Vidal Abascal y E. G. Rodeja lo han generalizado al caso de sustituir el plano que contiene C por una superficie de curvatura constante [5] (²). Por otra parte M. Kurita [4] lo ha generalizado al espacio euclidiano de n dimensiones, afirmando además que una generalización análoga puede hacerse para el espacio esférico n-dimensional, pero sin realizar los cálculos que, por otra parte, no son inmediatos.

Vidal Abascal y Rodeja utilizan los métodos de la geometría diferencial de superficies de curvatura constante. Aunque la geometría sobre estas superficies equivale a la geometría no euclidiana del plano, creemos que puede ser de interés llegar al

(¹) Ver por ejemplo, CH. J. DE LA VALLÉE POUSSIN, *Cours d'Analyse Infinitesimale*, vol. I, 3ª ed., pág. 366.

(²) Los paréntesis cuadrados se refieren a la bibliografía al final.

mismo resultado utilizando precisamente los métodos de cálculo apropiados a esta geometría. Ello tiene la ventaja, aparte del interés propio del método, de permitir llegar a la generalización que Kurita solo menciona, no solo para el espacio esférico, sino también para el hiperbólico o de curvatura negativa.

Además, el mismo método de cálculo permite obtener la generalización de un bonito teorema de Kampe (§ 4) y considerar el caso de movimientos en el plano dependientes de dos parámetros (§ 5).

En § 1 y § 2 exponemos someramente las fórmulas fundamentales de la geometría no euclidiana n-dimensional. En §§, 3, 4, 5 hacemos aplicación al caso del plano y en § 6 damos la generalización del teorema de Holditch a espacios no euclidianos de n dimensiones.

Fórmulas fundamentales de la geometría no-euclidiana (*)

Supongamos el espacio proyectivo n-dimensional cuyas coordenadas homogéneas sean $x_i\,(i=0,1,\ldots,n)$ y consideremos una hipercuádrica no reglada cuya ecuación escribiremos

$$(1.1)\qquad \Phi(x_0\, x_1 \ldots x_n) = \Sigma\, a_{ij}\, x_i\, x_j = 0$$

suponiendo siempre los coeficientes a_{ij} números reales. Puede ser que no tenga puntos reales, en cuyo caso supondremos elegidos los signos de los coeficientes de modo que la forma cuadrática $\Phi(x_i)$ sea positiva para todos los puntos reales del espacio. La hipercuádrica se dirá *imaginaria*. Si, por opuesto, la hipercuádrica tiene puntos reales, queda el espacio dividido en dos regiones cuyos puntos están caracterizados por el signo positivo o negativo que para ellos toma la forma $\Phi(x_i)$ y, la condición de que la hipercuádrica no sea reglada implica que todas las rectas reales que pasan por puntos de una de estas regiones cortan a la hipercuádrica en puntos reales, mientras que por cada punto de la otra región pasan rectas reales que no cortan en puntos reales a la hipercuádrica. Supondremos elegidos los signos de

(*) Para un tratamiento más detallado puede verse, por ejemplo, E. CARTAN, *Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann*, Cap. VI, § 6, París, 1946; J. L. COOLIDGE, *The elements of non-euclidean geometry*, Oxford, 1909.

los coeficientes a_{ij} de modo que la forma $\phi(x_i x_j)$ resulte negativa para los puntos de la primera región; la hipercuádrica se dirá *real*.

Con estas convenciones llamaremos *espacio mètrico n-dimensional no-euclidiano de hipercuádrica absoluta* o *fundamental* (1. 1) respectivamente en el primer caso a la totalidad del espacio de puntos reales, en el segundo caso a la totalidad de los puntos reales para los cuales $\phi(x_i) < 0$. Con más precisión el espacio métrico se dirá *elíptico* en el primer caso y estará caracterizado por ser, para todos sus puntos, $\phi(x_i) > 0$, y, como podrá verse a continuación, por no tener puntos reales en el infinito (métrico); se dirá *hiperbólico* en el segundo caso y serán métricamente puntos de infinito los de la hipercuádrica absoluta. En ambos casos la geometría métrica no-euclidiana coincide con la teoría del grupo de las transformaciones reales proyectivas que transforman el absoluto en sí mismo. Con más precisión, descomponiéndose este grupo en un subgrupo continuo y uno ampliado por la adjunción de las polaridades respecto de la hipercuádrica absoluta, constituye el subgrupo continuo el grupo de los movimientos, mientras las polaridades representan las simetrías. Sin embargo, para que esta coincidencia sea completamente justificada en su sentido métrico ordinario, conviene todavía *normalizar* las coordenadas, que con respecto a la definición proyectiva de los puntos del espacio, siendo por definición homogéneas, quedan indeterminadas por un factor común, con la condición de que el valor absoluto de la forma $\phi(x_i)$ quede constante para todos los puntos del espacio. Esta constante, o mejor su inversa que indicaremos con K, se llama la *curvatura del espacio*. Por tanto las coordenadas del espacio métrico estarán caracterizadas por la condición

$$\phi(x_0 x_1 \ldots x_n) = \frac{1}{K} \tag{1.2}$$

donde K será un número positivo en el caso elíptico (*espacio no-euclidiano de curvatura positiva*) y negativo en el caso hiperbólico (*espacio no-euclidiano de curvatura negativa*). Comparando con lo dicho en el aparte precedente, se notará que los puntos proyectivamente reales que en el caso hiperbólico constituyen la segunda región (externa a la hipercuádrica absoluta) quedan ahora caracterizados por tener sus coordenadas métricas formadas por números imaginarios puros.

Dados dos puntos $A(x_0, x_1, x_2, \ldots x_n)$, $B(y_0, y_1, \ldots, y_n)$ se define y representa el «producto escalar» de los mismos, por la expresión

$$(1.3) \qquad (A\,B) = (B\,A) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n} y_i \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n} x_i \frac{\partial \phi}{\partial y_i}.$$

Con esta notación, la condición de normalización (1.2), válida para cualquier punto, se escribe

$$(1.4) \qquad (A\,A) = \frac{1}{K}.$$

Además, la condición $(A\,B) = 0$ expresa que A y B son puntos conjugados respecto de ϕ.

La distancia s entre dos puntos A, B se define por la relación

$$(1.5) \qquad (A\,B) = \frac{\cos \sqrt{K} s}{K}.$$

Para hallar la expresión del elemento de arco ds procedemos de la manera siguiente. Sean A_0, A_i dos puntos conjugados, o sea,

$$(1.6) \qquad (A_0\,A_i) = 0.$$

Un punto B de la recta $A_0\,A_i$ será de la forma

$$(1.7) \qquad B = \lambda\,A_0 + \mu\,A_i.$$

Para hallar λ multipliquemos escalarmente ambos miembros por A_0, con lo cual queda

$$\lambda = K(B\,A_0) = \cos \sqrt{K}\, s_i$$

poniendo s_i (distancia de A a A_0) para indicar que consideramos el arco sobre la recta $A_0\,A_i$. Puesto que debe ser

$(BB) = \lambda^2/K + \mu^2/K = 1/K$ resulta $\mu = \pm \operatorname{sen} K s_i$ El doble signo depende de la orientación que demos a s_i; tomándolo positivo de A_0 a A_i y sustituyendo en (1.7) resulta

$$B = \cos \sqrt{K} s_i A_0 + \operatorname{sen} \sqrt{K} s_i A_i. \tag{1.8}$$

De aquí, manteniendo fijos A_0, A_i y variando B sobre la recta que los une

$$dB = \sqrt{K} (-\operatorname{sen} \sqrt{K} s_i A_0 + \cos \sqrt{K} s_i A_i) \, ds_i$$

de donde, multiplicando por A_i

$$(A_i dB) = \frac{\cos \sqrt{K} s_i}{\sqrt{K}} ds_i.$$

En particular, si B coincide con A_0 ($s_i = 0$), resulta que *el elemento de arco sobre* $A_0 A_i$ *a partir de* A_0 *vale*

$$ds_i = \sqrt{K} (A_i dA_0). \tag{1.9}$$

Queremos definir ahora el ángulo entre dos rectas que pasan por A_0. Sean A_i, B_i los puntos conjugados de A_0 situados respectivamente sobre estas rectas (en el caso hiperbólico, siendo A_0 interior a ϕ, A_i y B_i serán exteriores y por tanto sus coordenadas serán imaginarias). El ángulo φ entre las dos rectas se define por la relación

$$(A_i B_i) = \frac{\cos \varphi}{K}. \tag{1.10}$$

Para hallar una expresión de $d\varphi$ cómoda para lo sucesivo, procedemos igual que antes. Sea A_j el punto conjugado de A_i sobre la recta $A_i B_i$. Entonces B_i es de la forma $B_i = \lambda A_i + \mu A_j$ y procediendo exactamente igual que antes se obtiene

$$d\varphi_{ij} = K(A_j dA_i) \tag{1.11}$$

que es *la expresión del elemento de ángulo sobre el plano* $A_0 A_i A_j$ *a partir de la recta* $A_0 A_i$.

El *elemento de volumen* del espacio correspondiente al punto A_0 será el producto de las ds_i correspondientes a n direcciones $A_0 A_i$ $(i=1,2,\dots,n)$ ortogonales entre sí, o sea $(A_i A_j = 0$ y por tanto ,según (1. 9) será

$$(1.12) \qquad dV = K^{n/2} [\prod_{i=1}^{n} (A_i dA_0)]$$

donde los paréntesis cuadrados indican que la multiplicación es exterior, es decir, tal como debe procederse con las formas diferenciales que figuran bajo los signos de integración ([3]).

Análogamente, el *elemento de ángulo sólido* correspondiente a la dirección $A_0 A_i$, según (1. 11), será

$$(1.13) \qquad d\Omega_i = K^{n-1} [\prod_{j \neq i} (A_j dA_i)].$$

§ 2. *La fórmula de Gauss-Bonnet*

Sea A_0 un punto del espacio no euclidiano (por tanto interior a Φ en el caso hiperbólico) y A_i $(i=1,2,\dots,n)$ n puntos tales que con A_0 formen un conjunto autoconjugado, o sea realicen las condiciones

$$(2.1) \qquad (A_i A_i) = 1/K, \quad (A_i A_j) = 0 \quad (i, j = 1, 2, \dots, n).$$

Formando las diferenciales totales se deduce

$$(2.2) \qquad (A_i dA_i) = 0, \quad (A_i dA_j) + (A_j dA_i) = 0.$$

Consideremos un movimiento elemental que lleve estos puntos a los $A_i + dA_i$. Los desplazamientos elementales dA_i pueden expresarse en la forma

$$(2.3) \qquad dA_i = \sum_{h=0}^{n} \omega_i^h A_h$$

siendo ω_i^h formas diferenciales (componentes relativas del mo-

([3]) Para el concepto de multiplicación exterior y aplicaciones, ver [1].

vimiento) cuyo valor se obtiene multiplicando escalarmente (2. 3) por el A_h correspondiente, resultando

(2. 4) $$\omega_i^h = K\,(A_h\,dA_i)$$

de donde, en particular, según (2. 2) es

(2. 5) $$\omega_i^i = 0, \quad \omega_i^h + \omega_h^i = 0.$$

Estas componentes relativas no son independientes. Escribiendo las condiciones de integrabilidad de (2. 3), o sea, anulando la diferencial exterior del segundo miembro, resultan las condiciones

(2. 6) $$d\omega_i^h = \sum_{j=0}^{n} [\omega_i^j\,\omega_j^h].$$

Consideremos el caso $n=2$. Teniendo en cuenta (2. 5) resulta

(2. 7) $$d\omega_1^2 = [\omega_1^0\,\omega_0^2] = -[\omega_0^1\,\omega_0^2].$$

Llamando dF_0 al elemento de área correspondiente al punto A_0, según (1. 12) y (2. 4) es

(2. 8) $$[\omega_0^1\,\omega_0^2] = K^2\,[(A_1\,dA_0)\,(A_2\,dA_0)] = K\,dF_0$$

y según (1. 13)

(2. 9) $$\omega_1^2 = K\,(A_2\,dA_1) = d\varphi_{21}.$$

Supongamos que A_0 describa una curva cerrada C que limita un área F_0, llevando consigo todo el triángulo $A_0\,A_1\,A_2$. Para aplicar la fórmula de Stokes a (2. 7) (fórmula que expresa que la integral curvilinea de ω_1^2 sobre el contorno C es igual a la integral de $d\omega_1^2$ sobre el interior de C; ver [1]), debemos suponer que la familia de triángulos $A_0\,A_1\,A_2$ se puede extender de manera continua a todo el interior de C. Esta extensión es posible o no según el movimiento de que se trate. Si la recta $A_0\,A_1$ vuelve a su posición inicial sin haber dado ninguna vuelta, entonces es posible. En cambio si ha dado un cierto número m de vueltas, la extensión no es posible; en este caso hay que excluir un punto interior mediante un circulito cuyo radio tienda a cero y considerar el contorno C más el de este circulito contado m veces.

Según el teorema de Stokes aplicado a (2.7), la integral de la forma diferencial $\omega_1{}^2$ sobre el contorno total así obtenido es igual a la integral del segundo miembro extendida al área que este limita. La integral sobre el circulito interior cuyo radio tiende a cero, equivale a la integral de (2.9) manteniendo fijo A_0 y girando m vueltas la recta $A_0 A_1$, o sea, es igual a $2\pi m$, con signo negativo, pues el sentido de recorrido sobre el circulito es opuesto al de recorrido sobre C. Resulta así, teniendo en cuenta (2.8) y cambiando el signo de ambos miembros

$$KF_0 = 2\pi m - \int_C \omega_1{}^2, \tag{2.10}$$

que es la clásica fórmula de Gauss-Bonnet de la teoría de superficies, aplicada a las de curvatura constante K.

Para el caso n dimensional existe una fórmula análoga *en el caso de n par.* En efecto, S. S. Chern ha demostrado [2] que en este caso existe una fórmula análoga a la (2.7), a saber

$$d\psi = [\omega_0{}^1 \omega_0{}^2 \ldots \omega_0{}^n] \tag{2.11}$$

donde ψ es una forma diferencial de grado $n-1$ formada por la suma desde $k=0$ a $k=n/2-1$, con ciertos coeficientes constantes, de expresiones de la forma

$$\psi_k = [\omega_0{}^{i_1} \omega_0{}^{i_2} \ldots \omega_0{}^{i_{2k}} \omega^1{}_{i_{2k+1}} \ldots \omega^1{}_{i_{n-1}}] \tag{2.12}$$

donde los índices i toman los valores $2, 3, \ldots, n$.

El segundo miembro de (2.11), según (1.12) y (2.4) es igual a $K^{n/2} dV$. Procediendo igual que antes, si A_0 describe una hipersuperficie cerrada S y al recorrer la misma la dirección de la recta $A_0 A_1$ describe J veces la hiperesfera unidad, teniendo en cuenta la forma de ψ, resulta

$$K^{n/2} V = 1/2\, J O_n - \int_S \psi \tag{2.13}$$

donde O_n es el área de la esfera euclidiana de radio unidad del espacio de $n+1$ dimensiones, o sea $O_n = 2\pi^{n+1}/\Gamma((n+1)/2)$, y V es el volumen limitado por S.

Esta fórmula (2.13) constituye la generalización de la de Gauss-Bonnet al espacio n-dimensional de curvatura constante K (n par).

§ 3. *El teorema de Holditch en el plano no euclidiano*

Sea, como antes, $A_0 A_1 A_2$ un triángulo autopolar respecto la cónica fundamental, con el vértice A_0 interior a ella en el caso hiperbólico. Sea B_0 un punto de la recta $A_0 A_1$ cuya distancia a A_0 sea s_1. Según (1.8) será

$$B_0 = \cos\sqrt{K}\, s_1 A_0 + \operatorname{sen}\sqrt{K}\, s_1 A_1. \tag{3.1}$$

El punto B_1 conjugado del B_0 sobre la recta $A_0 A_1$ será de la forma $B_1 = \alpha A_0 + \beta A_1$ y siendo $(B_1 B_1) = 1/K$, $(B_0 B_1) = 0$, los coeficientes α, β deben satisfacer a las ecuaciones

$$\alpha^2 + \beta^2 = 1, \quad \alpha \cos\sqrt{K}\, s_1 + \beta \operatorname{sen}\sqrt{K}\, s_1 = 0.$$

Resolviendo este sistema respecto α, β y tomando el signo de manera que para $s_1 = 0$ sea $B_1 = A_1$, resulta

$$B_1 = -\operatorname{sen}\sqrt{K}\, s_1 A_0 + \cos\sqrt{K}\, s_1 A_1. \tag{3.2}$$

Consideremos el triángulo autopolar $B_0 B_1 A_2$ y supongamos un movimiento elemental del plano sobre sí mismo. La componente relativa $\omega_1{}^2(B_0)$ referente al punto B_0, según (2.4) y (3.2) será

$$\omega_1{}^2(B_0) = K\,(A_2\, dB_1) = -\operatorname{sen}\sqrt{K}\, s_1\, \omega_0{}^2 + \cos\sqrt{K}\, s_1\, \omega_1{}^2. \tag{3.3}$$

Supongamos un movimiento tal que el punto A_0 describa una curva cerrada C que limita un área F_0 y la recta $A_0 A_1$ vuelva a su posición inicial. Vale entonces la fórmula de Gauss-Bonnet (2.10), en la cual m es el número de vueltas que da la recta $A_0 A_1$ mientras A_0 describe C.

Por el mismo movimiento B_0 describirá otra curva cerrada, cuya área F_1, según (2.10) y (3.3) estará dada por

$$(3.4) \qquad K F_1 = 2\pi m + \operatorname{sen} \sqrt{K}\, s_1 \int_c \omega_0{}^2 - \cos \sqrt{K}\, s_1 \int_c \omega_1{}^2$$

donde las integrales *no dependen* de B_0, sino únicamente del movimiento considerado.

Sea C_0 otro punto de la recta $A_0 A_1$ distante s_2 de A_0. Si F_2 es el área limitada por la curva cerrada que este punto describe, análogamente a (3.4) se tiene ahora

$$(3.5) \qquad K F_2 = 2\pi m + \operatorname{sen} \sqrt{K}\, s_2 \int_c \omega_0{}^2 - \cos \sqrt{K}\, s_2 \int_c \omega_1{}^2.$$

De (2.10), (3,4) y (3.5) se deduce

$$(3.6) \qquad \begin{vmatrix} 2\pi m - K F_0 & 0 & 1 \\ 2\pi m - K F_1 & \operatorname{sen} \sqrt{K}\, s_1 & \cos \sqrt{K}\, s_1 \\ 2\pi m - K F_2 & \operatorname{sen} \sqrt{K}\, s_2 & \cos \sqrt{K}\, s_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Este es el resultado que generaliza el teorema de Holditch.

En efecto, si A_0 y C_0 describen la misma curva o curvas de igual área ($F_0 = F_2$), la relación anterior, desarrollando y ordenando, se puede escribir

$$\frac{2\pi m - K F_1}{2\pi m - K F_0} = \frac{\cos \sqrt{K}(s_2/2 - s_1)}{\cos \sqrt{K}\, s_2/2}$$

o bien, restando la unidad de ambos miembros,

$$(3.7) \qquad \frac{F_0 - F_1}{2\pi m - K F_0} = \frac{2 \operatorname{sen} \sqrt{K}(s_2 - s_1)/2 \,.\, \operatorname{sen} \sqrt{K}\, s_2/2}{K \cos \sqrt{K}\, s_1/2}$$

que es la forma dada por Vidal Abascal y Rodeja al teorema de Holditch sobre superficies de curvatura constante K [5].

En el caso en que A_0 y C_0 describen una misma curva de Jordan, que es el caso propiamente considerado por Holditch, la recta $A_0 A_1$ que contiene a la cuerda $A_0 C_0$ describe una sola vuelta, o sea, es $m = 1$.

Una consecuencia de (3. 6) es que *en un movimiento del plano no euclidiano sobre sí mismo en que vuelva a su posición inicial (movimiento dependiente de un parámetro, o sea, en que todos los puntos describen curvas), no puede haber más de dos puntos alineados que describan contornos de igual área, a no ser que esta área valga* $2\pi m$ *(*$m =$ *entero positivo, incluído el cero), en cuyo caso si hay tres puntos con dicha propiedad, todos los de la recta que los contiene la cumplen.*

Para el caso hiperbólico, puesto que el área siempre se puede considerar positiva (pues bastaría cambiar el sentido del movimiento), la única posibilidad es $m = 0$, o sea, que todos los puntos describan contornos de área nula.

Para el caso elíptico, en cambio, es muy fácil dar ejemplos de movimientos en que todos los puntos describen contornos de área $2\pi m$. Consideramos el caso $K = 1$ y como modelo la superficie de la esfera de radio unidad. Sean P, Q dos puntos distantes $\pi/2$. Consideremos el movimiento que consiste en girar la esfera sobre sí misma un ángulo $\pi/2$ alrededor de Q. Luego se gira $2\pi m$ alrededor de P; finalmente se gira nuevamente $-\pi/2$ alrededor de Q para volver a la posición inicial. Es inmediato ver que con este movimiento cualquier punto describe una trayectoria que encierra un área igual a $2\pi m$.

§ 4. *El teorema de Kampe en geometría no-euclidiana*

Consideremos el triángulo autopolar $A_0 A_1 A_2$ de antes y un punto B_0 cualquiera del plano. Siempre se podrá escribir

$$B_0 = x A_0 + y A_1 + z A_2 \tag{4.1}$$

con la condición

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \tag{4.2}$$

deducida de la condición de normalización (1. 2) que vale para B_0 y para los A_i. Los x, y, z son las *coordenadas* de B_0 respecto el sistema $A_0 A_1 A_2$ y su interpretación geométrica, según (4. 1) y (1. 5) (multiplicando por A_0) es

$$x = K(A_0 B_0) = \cos\sqrt{K}\, s_1$$

siendo s_1 la distancia $A_0 B_0$. Análogamente para y, z.

Sea B_1 el punto conjugado de B_0 respecto la cónica fundamental sobre la recta $A_0 B_0$. Poniendo $B_1 = \alpha A_0 + \beta B_0$ y determinando α, β por las condiciones $(B_1 B_1) = 1/K$, $(B_0 B_1) = 0$, y eligiendo el signo por la condición de que para $x = 0$ sea $B_1 = A_0$, resulta

$$(4.3) \qquad B_1 = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}[(1-x^2)A_0 - xyA_1 - xzA_2].$$

Sea B_2 el polo de la recta $B_0 B_1$, que estará situado sobre la recta $A_1 A_2$. Poniendo $B_2 = \alpha_2 A_1 + \beta_1 A_2$ y determinando α_1, β_1 por las condiciones $(B_2 B_2) = 1/K$, $(B_i B_2) = 0$, resulta

$$(4.4) \qquad B_2 = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}(zA_1 - yA_2).$$

Tenemos así definido un triángulo autopolar $B_0 B_1 B_2$, a partir del $A_0 A_1 A_2$. Supongamos un movimiento del plano sobre sí mismo (movimiento no euclidiano), que vuelva a su posición inicial. Para aplicar la fórmula de Gauss-Bonnet a la curva descrita por B_0 nos falta calcular $\omega_1{}^2(B_0) = K(B_2 dB_1)$. Según (4. 3) y (4. 4) es

$$(B_2 dB_1) = x(A_2 dA_1) + y(A_0 dA_2) + z(A_1 dA_0)$$

y por tanto, según (2. 4)

$$\omega_1{}^2(B_0) = x\,\omega_1{}^2 + y\,\omega_2{}^0 + z\,\omega_0{}^1$$

donde las $\omega_i{}^j$ del segundo miembro se refieren al punto A_0 y al movimiento considerado, *siendo independientes de* B_0.

Con esto, llamando F_1 al área limitada por la curva descrita por B_0 durante el movimiento, será

$$(4.5) \qquad KF_1 = 2\pi m - x\int_c \omega_1{}^2 - y\int_c \omega_2{}^0 - z\int_c \omega_0{}^1.$$

Llamando P el punto cuyas coordenadas en el sistema $A_0 A_1 A_2$ sean respectivamente las integrales que figuran en (4. 5) divididas por la raíz cuadrada ρ de la suma de los cuadrados de las mismas, para que se cumpla la condición de normalización (1. 4), la ecuación (4. 5) puede escribirse

$$(B_0 P) = \frac{2\pi m - KF_1}{\rho K}. \tag{4.6}$$

El punto P depende del movimiento considerado, pero no de B_0. Por tanto (4. 6), según (1. 5), nos dice que si F_1 es constante, la distancia de B_0 a P también lo será, es decir:

En un movimiento del plano no euclidiano sobre sí mismo de manera que vuelva a la posición inicial, el lugar geométrico de los puntos que describen curvas que encierran igual área está formado por circunferencias concéntricas.

El centro de estas circunferencias es el punto P, cuyas coordenadas ya hemos visto lo que valen en función del movimiento.

Esta es la generalización a la geometría no euclidiana (o sea, sobre las superficies de curvatura constante) de un clásico teorema de Kampe [3]. Una consecuencia del mismo es que: *no puede haber más de tres puntos no concíclicos que describan curvas de igual área, a no ser que sea* $2\pi m - KF_1 = 0$, *en cuyo caso, si hay 4 puntos con dicha propiedad, la misma es común a todos los puntos del plano.*

De (4. 5) se deduce también:

Entre las coordenadas x_i, y_i, z_i $(i = 0, 1, 2, 3)$ *de 4 puntos del plano no euclidiano y las áreas* F_i *limitadas por las curvas que ellos describen por un movimiento que vuelva a la posición inicial, existe la relación*

$$\begin{vmatrix} 2\pi m - KF_0 & x_0 & y_0 & z_0 \\ 2\pi m - KF_1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 2\pi m - KF_2 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 2\pi m - KF_3 & x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0. \tag{4.7}$$

§ 5. *Movimientos dependientes de dos parámetros*

Hasta ahora hemos considerado movimientos dependientes de un solo parámetro, es decir, los puntos describían curvas que cerraban al volver a la posición inicial.

Si consideramos movimientos de dos parámetros, en que los puntos describen áreas, las cosas son un poco distintas y en general más fáciles de tratar.

Según (2. 8) el área F_1 del dominio D_1 descrito por el punto B_0 será

$$F_1 = \frac{1}{K} \int_{D_1} [\omega_0^1(B_0)\, \omega_0^2(B_0)]. \tag{5.1}$$

Según (4. 3), (4. 4) y (2. 4) es

$$\omega_0^1(B_0) = K(B_1\, dB_0) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} (y\, \omega_1^0 + z\, \omega_2^0)$$

$$\omega_0^2(B_0) = K(B_2\, dB_0) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} (x\, z\, \omega_0^1 - x\, y\, \omega_0^2 + (1-x^2)\, \omega_2^1)$$

de donde, por multiplicación exterior,

$$[\omega_0^1(B_0)\, \omega_0^2(B_0)] = x\, [\omega_0^1\, \omega_0^2] + y\, [\omega_1^0\, \omega_2^1] + z\, [\omega_2^0\, \omega_2^1].$$

Por tanto, sustituyendo en (5. 1) y llamando D_0 al dominio descrito por A_0,

$$K\, F_1 = x \int_{D_0} [\omega_0^1\, \omega_0^2] + y \int_{D_0} [\omega_1^0\, \omega_2^1] + z \int_{D_0} [\omega_2^0\, \omega_2^1], \tag{5.2}$$

que nos da el área F_1 en función de las coordenadas de B_0 y de ciertas integrales que solo dependen del movimiento considerado, pero que *son independientes del punto* B_0.

Análogamente al caso del número anterior, si P es ahora el punto de coordenadas proporcionales a las integrales del segundo miembro de (5. 2) y ρ es la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de las mismas (5. 2) puede escribirse

$$(B_0 P) = \frac{F_1}{\rho}. \tag{5.3}$$

Si F_1 es constante, el lugar geométrico de los puntos B_0 que cumplen (5. 3) es una circunferencia de centro P. Por tanto, análogamente al caso de los movimientos dependientes de un solo parámetro, se tiene ahora:

El lugar geométrico de los puntos que por un movimiento dependiente de dos parámetros describen dominios de igual área, está formado por circunferencias concéntricas.

Obsérvese que este resultado coincide con el del número anterior en el caso que estamos considerando de la geometría no euclidiana. En el caso euclidiano, un razonamiento elemental conduce a que en este caso de un movimiento de dos parámetros, el lugar geométrico anterior está formado por rectas paralelas, resultado que queda incluido en el enunciado anterior si se consideran las rectas como circunferencias de radio infinito.

De (5. 2) se deduce que *dada el área descrita por tres puntos, se conocerá el área descrita por cualquier otro punto.* En efecto, escribiendo (5. 2) para los tres puntos, se tendrán tres ecuaciones para determinar las integrales que figuran en el segundo miembro, con lo cual la misma fórmula podrá aplicarse a cualquier otro punto.

Otra consecuencia de (5. 2) es que entre las áreas F_i descritas por 4 puntos y sus coordenadas existe la identidad:

$$\begin{vmatrix} F_1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ F_2 & x_2 & y_2 & z_2 \\ F_3 & x_3 & y_3 & z_3 \\ F_4 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} = 0 \cdot$$

que generaliza a la geometría no euclidiana un resultado elemental de Kurita [4].

§ 6. *El teorema de Holditch para el caso n-dimensional*

Para generalizar el teorema de Holditch al espacio no euclidiano de n dimensiones, deberemos aplicar la fórmula de Gauss-Bonnet generalizada (2. 12). Ello exige que *el número de dimensiones n sea par.*

Consideremos el sistema $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n$ de puntos autoconjugados de § 1 y el punto B_0 definido por (3. 1) sobre la recta $A_0 A_1$; sea B_1 su conjugado sobre la misma recta $A_0 A_1$, dado por (3. 2). Consideremos el nuevo sistema de puntos autoconjugados $B_0 B_1 A_2 A_3 \ldots A_n$. De las formas diferenciales definidas por (2. 4), aquellas con $i, j \neq 0, 1$ son las mismas que antes. Las únicas que cambian son

$$\begin{aligned} &\omega_0{}^i(B_0) = K(A_i\, dB_0) = \cos\sqrt{K}\, s_1\, \omega_0{}^i + \operatorname{sen}\sqrt{K}\, s_1\, \omega_1{}^i \\ (6.1)\quad &\omega_1{}^i(B_0) = K(A_i\, dB_1) = -\operatorname{sen}\sqrt{K}\, s_1\, \omega_0{}^i + \cos\sqrt{K}\, s_1\, \omega_1{}^i \\ &\omega_0{}^1(B_0) = K(B_1\, dB_0) = -\omega_0{}^1. \end{aligned}$$

Supongamos ahora un movimiento del espacio dependiente de $n-1$ parámetros, de manera que cada punto describa una hipersuperficie cerrada, volviendo luego a su posición inicial. Para expresar el volumen V_1 limitado por la superficie descrita por B_0, según (2. 13) solo necesitamos conocer ψ. Pero ya vimos que esta forma diferencial es una suma, con ciertos coeficientes constantes, de expresiones de la forma (2. 12). Por tanto, al escribir la forma ψ para el sistema $B_0 B_1 A_2 A_3 \ldots A_n$ teniendo en cuenta (6. 1), resultará una expresión de la forma

$$(6.2)\qquad \psi(B_0) = \cos^{n-1}\sqrt{K}\, s_1\, \vartheta_0 + \cos^{n-2}\sqrt{K}\, s_1 \operatorname{sen}\sqrt{K}\, s_1\, \vartheta_1 + \ldots + \operatorname{sen}^{n-1}\sqrt{K}\, s_1\, \vartheta_{n-1}$$

donde las ϑ_i son formas diferenciales que *no dependen de B_0*, sino únicamente de A_0 y del movimiento.

Por tanto, según (2. 12)

$$K^{n/2} V_1 = \frac{1}{2} J\, O_n - \cos^{n-1}\sqrt{K}\, s_1 \int_S \vartheta_0 - \cos^{n-2}\sqrt{K}\, s_1 \operatorname{sen}\sqrt{K}\, s_1 \int_S \vartheta_1 - \ldots - \operatorname{sen}^{n-1}\sqrt{K}\, s_1 \int_S \vartheta_{n-1},$$

siendo S la superficie descrita por A_0.

De aquí, análogamente al caso del plano, se deduce la siguiente generalización del teorema de Holditch:

Supuesto un movimiento sobre sí mismo del espacio no euclidiano de n dimensiones (n par) (o del espacio n-dimensional de curvatura constante K), tal que los $n+1$ *puntos alineados* $A_0, B_0, C_0, \ldots, L_0$ *describan hipersuperficies cerradas que limiten respectivamente los volúmenes* $V_0, V_1, \ldots, V_n$, *se cumple la relación*

$$(6.2)\qquad \left\| \frac{1}{2} J\, O_n - K^{n/2} V_i, \quad \cos^{n-1}\sqrt{K}\, s_i, \quad \cos^{n-2}\sqrt{K}\, s_i \operatorname{sen}\sqrt{K}\, s_i, \ldots, \operatorname{sen}^{n-1}\sqrt{K}\, s_i \right\| = 0$$

donde s_i *es la distancia de* A_0 *al punto i-ésimo y el primer miembro indica el determinante formado para los valores* $i = 0, 1, 2, 3, \ldots, n$.

Se puede dar otra forma a este resultado (como hace Kurita para el caso euclidiano), observando que al desarrollar por la primera columna, los coeficientes resultan determinantes del tipo Vandermonde (después de sacar $\operatorname{sen}^{n-1}\sqrt{K}\, s_i$ factor común) y en la expresión del desarrollo aparecen las expresiones $\operatorname{sen}\sqrt{K}\,(s_i - s_j)$. Resulta así fácilmente que (6.2) es equivalente a

$$(6.3)\qquad \sum_{i=0}^{n} \frac{\frac{1}{2} J O_n - K^{n/2} V_i}{\prod_j' \operatorname{sen}\sqrt{K}(s_i - s_j)} = 0,$$

donde en el denominador el acento indica que en el producto, extendido de 0 a n, hay que excluir el factor $j = i$.

La generalización del teorema de Kampe es más complicada y el lugar de los puntos que describen hipersuperficies que encierran igual volumen ya no resulta hiperesferas concéntricas, sino ciertas hipersuperficies de grado n.

BIBLIOGRAFIA

[1] E. CARTAN, *Les système différentiels extérieurs et leurs applications géométriques*, Hermann et Cie., París, 1945.
[2] S. S. CHERN, *On the curvatura integra in a riemannian manifold*, Annals of Mathematics, vol. 46, págs. 674 - 684, 1945.
[3] *Messengers of Mathematics*, 1878.
[4] M. KURITA, *On some formulas about volume and surface area*, Nagoya Mathematical Journal, vol. 6, págs. 109 - 117, 1953.
[5] E. VIDAL ABASCAL y E. G. RODEJA, *Nota sobre curvas en superficies de curvatura constante*, Collectanea Mathematica, vol. 5, págs. 331 - 337, 1952.

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO-MATEMÁTICAS.
UNIVERSIDAD NACIONAL DE EVA PERÓN.