SOBRE LA UNICIDAD DE LOS OPERADORES VECTORIALES ELEMENTALES

POR

L. A. SANTALÓ

1. *Introducción.* - En los tratados corrientes de Cálculo Vectorial se suelen introducir los operadores gradiente, divergencia y rotor, demostrando su carácter vectorial, pero dejando de lado la posible existencia de otros operadores lineales formados de manera análoga.

Por ejemplo, con las derivadas parciales $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$ de un escalar φ se forma el vector gradiente, pero no se menciona la posibilidad o no de formar otros vectores de componentes, por ejemplo, de la forma

$$\varphi_x - \varphi_z, \quad \varphi_y + 2\varphi_x - \varphi_z, \quad \varphi_x + \varphi_y. \tag{1.1}$$

cuyos coeficientes tengan valores *constantes*, significando con ello que tienen el mismo valor en cualquier sistema ortogonal de coordenadas.

En otras palabras, las tres componentes $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$, cualquiera que sea el escalar $\varphi(x, y, z)$ se transforman por un cambio ortogonal de coordenadas como las componentes de un vector (ver n. 3), lo cual no ocurre con las tres componentes (1.1).

Igualmente, con las nueve derivadas parciales $a_{ij} = \partial a_i / \partial x_j$ de las componentes a_1, a_2, a_3 de un vector función de punto se forma el rotor, de componentes

$$a_{23} - a_{32}, \quad a_{31} - a_{13}, \quad a_{12} - a_{21} \tag{1.2}$$

pero se deja sin aclarar la posible existencia de otros vectores cuyas componentes pudieran formarse como combinación lineal con coeficientes constantes de las a_{ij}, como sería, por ejemplo,

$$a_{23} + a_{32}, \quad a_{31} + a_{13} - a_{12}, \quad a_{21} + a_{12} - a_{13}. \tag{1.3}$$

También en este caso las tres componentes (1. 2) se transforman por un cambio de coordenadas ortogonales como las componentes de un vector (o, mas exactamente, de un pseudovector o densidad vectorial), mientras que ello no ocurre con las componentes (1. 3).

Aunque suponemos que debe ser bien conocido el hecho de que los operadores usualmente considerados son efectivamente los únicos posibles, por no haberlo encontrado en la literatura corriente, creemos podrá ser útil dar una demostración elemental de estos teoremas de unicidad.

Nos referiremos exclusivamente al espacio ordinario de tres dimensiones. Aprovecharemos, además, la oportunidad para puntualizar la diferencia entre *vectores* y *densidades vectoriales,* diferenciación cada vez más necesaria sobre todo en las aplicaciones a la física moderna.

2. *Matrices ortogonales.* - Suponemos conocidas las nociones usuales sobre matrices y sus operaciones.

Representaremos por O^t a la *transpuesta* de la matriz O, es decir, a la que resulta permutando el papel de las filas y columnas. Por E indicaremos la *matriz unidad,* o sea, la matriz cuadrada que tiene los elementos de la diagonal principal iguales a la unidad y los demás iguales a cero.

Una matriz cuadrada se llama *ortogonal* si cumple la condición

(2. 1) $$O\,O^t = E,$$

relación equivalente a

(2. 2) $$O^t = O^{-1}$$

indicando por O^{-1} a la *matriz inversa* de O.

El determinante de las matrices ortogonales vale ± 1. Cuando haga falta especificar este signo, pondremos O^+ para las matrices de determinante $+1$ y O^- para las de determinante -1. Por ejemplo, las matrices ortogonales de orden 2 son

(2, 3) $$O^+ = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & \operatorname{sen}\vartheta \\ -\operatorname{sen}\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix}, \quad O^- = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & \operatorname{sen}\vartheta \\ \operatorname{sen}\vartheta & -\cos\vartheta \end{pmatrix}$$

donde ϑ es cualquier ángulo entre 0 y 2π.

3. *Invariantes, vectores y densidades.* - Consideraremos únicamente sistemas de coordenadas cartesianos ortogonales en el espacio euclidiano de tres dimensiones.

Sea x un punto de coordenadas x_1, x_2, x_3 que representaremos por la matriz (*)

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Un cambio de coordenadas del sistema x_1, x_2, x_3 al x_1', x_2', x_3', ambos con el mismo origen, estará representado por una ecuación matricial

$$x' = O\,x \tag{3.1}$$

donde O es una matriz ortogonal cualquiera de orden 3. Si O es de determinante $+1$ se trata de una rotación; si es de determinante -1 se trata de una rotación seguida de una simetría, en cuyo caso la orientación del triedro coordenado cambia de signo.

Una función $F(x)$ se dice que es un *invariante* o un *escalar* cuando por cualquier transformación (3.1) se verifica

$$F(x') = F(x), \quad \text{o sea,} \quad F(Ox) = F(x). \tag{3.2}$$

Una función $F(x)$ se dice que es una *densidad escalar,* si por una transformación ortogonal de coordenadas se transforma según las fórmulas

$$F(O^+ x) = F(x), \quad F(O^- x) = -F(x). \tag{3.3}$$

(*) En lo que sigue la misma letra x puede representar: *a*) el *punto* de coordenadas x_1, x_2, x_3; *b*) el *vector* de componentes x_1, x_2, x_3; *c*) la *matriz* de una sola columna cuyos elementos son x_1, x_2, x_3. Esperamos que esta ambigüedad, casi obligada para no complicar demasiado la tipografía, no habrá de ocasionar confusión, pues cada vez que haga falta antepondremos el nombre correspondiente.

Análogamente la letra A, por ejemplo, se utiliza tanto para indicar el *vector* de componentes a_1, a_2, a_3 como la *matriz* (3.4).

Un conjunto de tres funciones a_1, a_2, a_3, se dice que son componentes de un *vector* A, que representaremos por la matriz

$$(3.4) \qquad A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

cuando por cualquier transformación de coordenadas de la forma (3.1) las nuevas componentes a_1', a_2', a_3' del vector transformado A' están dadas por la ecuación matricial

$$(3.5) \qquad A' = O\,A$$

de la cual se deduce, según (2.2),

$$(3.6) \qquad A = O^{-1} A' = O^t A'.$$

Un conjunto de tres funciones a_1, a_2, a_3 se dice que son las componentes de una *densidad vectorial* A, que representaremos por la misma matriz (3.4), cuando por una transformación ortogonal de coordenadas se transforma según la ley

$$(3.7) \qquad A' = O^+ A \quad \text{o bien} \quad A' = -O^- A$$

según el caso.

4. *Lema.* - Para nuestro objeto va a ser fundamental el lema siguiente:

La única matriz L que conmuta con toda matriz ortogonal, o sea

$$(4.1) \qquad L\,O = O\,L$$

para cualquier O, es la matriz

$$(4.2) \qquad L = \rho\,E$$

siendo ρ un escalar y E la matriz unidad.

Este lema se puede considerar como un caso particular del lema de Schur de la teoría de representación de grupos y por tanto se puede demostrar de manera análoga (*).

En efecto, consideremos la transformación lineal $x' = L x$ y busquemos los vectores x que se transforman en otros de la misma dirección. Deberá ser $\rho x = L x$, o sea $(L - \rho E) x = 0$. Como suponemos estar en el espacio de tres dimensiones, la ecuación $|L - \rho E| = 0$ tiene siempre por lo menos una raíz real ρ_0; a ella corresponderá un vector x_0 tal que

$$\rho_0 x_0 = L x_0$$

de donde

$$O L x_0 = \rho_0 O x_0.$$

Si L conmuta con toda O, se podrá escribir

$$L(O x_0) = \rho_0 O x_0,$$

pero eligiendo convenientemente O, el vector $O x_0$ puede lograrse que tenga la dirección de cualquier vector y por tanto L transforma a todo vector en otro de la misma dirección. De aquí el enunciado (4. 2).

Obsérvese que la misma demostración vale para probar que el lema sigue siendo válido si se consideran únicamente las matrices O^+ o las O^-. Es decir, de la condición $O^+ L = L O^+$ para toda O^+, se deduce $L = \rho E$ y lo mismo para O^- (**). De aquí se deduce:

Corolario: *No existe ninguna matriz L (excepto la matriz nula) que conmute con todas las matrices O^+ y anticonmute con todas las matrices O^-.*

(*) Ver H. Weyl, *The Classical Groups*, Princeton, 1946, pág. 81-83.

(**) Obsérvese que esto ya no es cierto para el plano $n = 2$, pues en este caso las matrices de la forma

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

conmutan con toda $O+$. Si se consideran todas las matrices ortogonales el lema vale para cualquier dimensión, aunque para dimensión par hay que modificar un poco la demostración dada.

5. *Vectores cuyas componentes son combinación lineal de las de otro vector.* - Dado un vector A se trata de ver si como combinación lineal (con coeficientes constantes) de sus componentes, se pueden obtener las componentes de otro vector B.

Es decir, se trata de ver si existe una matriz constante $L=(\lambda_{ij})$ tal que $B=LA$ sea siempre un nuevo vector, cualquiera que sea el vector A (*).

Por un cambio de coordenadas es $A'=OA$ y por tanto $LA'=LOA$. Por otra parte, si B debe ser un vector, será $B'=OB=OLA$. Por tanto $LOA=OLA$, relación que si debe cumplirse para cualquier A obliga a que sea

$$LO=OL \tag{5.1}$$

para toda matriz ortogonal O. Por tanto según el lema del número anterior se tiene:

Como combinación lineal con coeficientes constantes de las componentes a_1, a_2, a_3 *de un vector* A, *no se pueden formar más vectores que aquellos de componentes proporcionales* $\rho a_1, \rho a_2, \rho a_3$.

En particular:

Los únicos vectores cuyas componentes sean combinaciones lineales con coeficientes constantes de las derivadas parciales φ_x, φ_y, φ_z *de un escalar* φ, *son los proporcionales al gradiente.*

Para ver si se puede formar alguna densidad vectorial en las condiciones anteriores, el mismo razonamiento conduce, en lugar de (5.1), a las relaciones

$$LO^+=O^+L, \quad LO^-=-O^-L$$

y por tanto, según el corolario del n. 4, se tiene

No existen densidades vectoriales cuyas componentes sean combinación lineal con coeficientes constantes de las componentes de un vector.

6. *Invariantes formados con las derivadas parciales de las componentes de un vector.* - Sea $A(x)$ un campo vectorial, formado por los vectores A de componentes a_i $(i=1,2,3)$, funciones del punto x de coordenadas x_1, x_2, x_3.

(*) Al decir que las λ_{ij} son *constantes*, entendemos que *tienen el mismo valor para cualquier sistema de coordenadas.*

Pongamos, para abreviar la escritura

$$a_{ij} = \frac{\partial a_i}{\partial x_j}. \tag{6.1}$$

Si $O = (\alpha_{ij})$ es la matriz ortogonal de un cambio de coordenadas (3.1) y $O^{-1} = O^t = (\beta_{ij})$ es la matriz inversa, es

$$a_i' = \alpha_{ij}\, a_j \tag{6.2}$$

donde en el segundo miembro hemos suprimido el símbolo de sumación respecto el índice repetido j, de acuerdo a la costumbre establecida en cálculo tensorial. De aquí

$$a'_{ik} = \frac{\partial a_i'}{\partial x_k'} = \alpha_{ij} \frac{\partial a_j}{\partial x_l} \frac{\partial x_l}{\partial x_k'} = \alpha_{ij}\, \beta_{lk}\, a_{jl}. \tag{6.3}$$

Queremos ver si existen constantes λ_{ij} tales que la suma $\lambda_{ij}\, a_{ij}$ (los índices i, j sumados de 1 a 3) sea un invariante, es decir

$$\lambda_{ik}\, a'_{ik} = \lambda_{ik}\, a_{ik} \tag{6.4}$$

o sea, según (6.3),

$$\lambda_{ik}\, \alpha_{ij}\, \beta_{lk}\, a_{jl} = \lambda_{jl}\, a_{jl} \tag{6.5}$$

igualdad que si debe satisfacerse para cualquier vector A, exige que sea

$$\lambda_{ik}\, \alpha_{ij}\, \beta_{lk} = \lambda_{jl} \tag{6.6}$$

o sea, en forma de matrices

$$O^t L O^{tt} = L \tag{6.7}$$

y como $O^{tt} = O$ y $O\, O^t = E$, esta relación es equivalente a

$$L\, O = O\, L. \tag{6.8}$$

Según el lema del n. 4 esta relación nos prueba que

Como combinación lineal con coeficientes constantes de las derivadas parciales de las componentes de un vector, el único invariante que se puede formar, salvo un factor constante, es su divergencia.

Si A es el gradiente de un escalar φ, de este teorema se deduce, en particular,

Como combinación lineal con coeficientes constantes de las derivadas parciales segundas de un escalar φ, el único invariante que se puede formar, salvo un factor constante, es el laplaciano.

Para ver si en las mismas condiciones se puede formar alguna densidad escalar, la misma demostración anterior conduce, en vez de (6. 8) a las condiciones

$$(6.9) \qquad L\,O^{+} = O^{+}L, \qquad L\,O^{-} = -\,O^{-}L$$

y por tanto, según el corolario del n. 4,

Como combinación lineal de las derivadas parciales de las componentes de un vector no se puede formar ninguna densidad escalar.

7. *Vectores cuyas componentes son combinaciones lineales de las primeras derivadas parciales de las componentes de un vector.*

Con las mismas notaciones (6. 1) del número anterior, queremos ver ahora si existen constantes $\lambda_{ik}{}^{m}$ tales que

$$(7.1) \qquad b_m = \lambda_{ik}{}^{m}\, a_{ik} \qquad (i, k \text{ sumados de } 1 \text{ a } 3)$$

sean las componentes de un vector ($m = 1, 2, 3$) Insistimos en que al decir que las $\lambda_{ik}{}^{m}$ son *constantes*, queremos decir que tienen el mismo valor en cualquier sistema de coordenadas.

Según (6. 3) por un cambio de coordenadas será

$$(7.2) \qquad \lambda_{ik}{}^{m}\, a_{ik}' = \lambda_{ik}{}^{m}\, \alpha_{ij}\, \beta_{lk}\, a_{jl}$$

y por otra parte, si las b_m deben ser componentes de un vector, debe ser

$$(7.3) \qquad b'_m = \alpha_{mh}\, b_h = \alpha_{mh}\, \lambda_{jl}{}^{h}\, a_{jl}.$$

Igualando (7. 2) y (7. 3) y si la igualdad resultante debe valer para valores a_{jl} deducidos de cualquier vector A, resulta

$$\lambda_{ik}{}^m\, \alpha_{ij}\, \beta_{lk} = \alpha_{mh}\, \lambda_{jl}{}^h \tag{7.4}$$

o sea, en forma de matrices

$$O^t L^m O = \alpha_{mh} L^h \tag{7.5}$$

donde se ha puesto

$$L^m = \begin{pmatrix} \lambda_{11}{}^m & \lambda_{12}{}^m & \lambda_{13}{}^m \\ \lambda_{21}{}^m & \lambda_{22}{}^m & \lambda_{23}{}^m \\ \lambda_{31}{}^m & \lambda_{32}{}^m & \lambda_{33}{}^m \end{pmatrix}, \quad (m = 1, 2, 3).$$

Toda matriz O^+ representa una *rotación* alrededor del origen de coordenadas y por tanto puede descomponerse en el producto de rotaciones alrededor de los ejes x_1, x_2, x_3 sucesivamente, expresadas por las matrices

$$O_3 = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & \operatorname{sen}\vartheta & 0 \\ -\operatorname{sen}\vartheta & \cos\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad O_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\vartheta & \operatorname{sen}\vartheta \\ 0 & -\operatorname{sen}\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix},$$

$$O_2 = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & 0 & -\operatorname{sen}\vartheta \\ 0 & 1 & 0 \\ \operatorname{sen}\vartheta & 0 & \cos\vartheta \end{pmatrix}.$$

Consideremos primero la matriz O_3, o sea las rotaciones alrededor del eje x_3. La condición (7.5) para $m = 1$ conduce al sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} &\lambda_{11}{}^1 \cos^2\vartheta - \lambda_{12}{}^1 \operatorname{sen}\vartheta\cos\vartheta - \\ &\qquad - \lambda_{21}{}^1 \operatorname{sen}\vartheta\cos\vartheta + \lambda_{22}{}^1 \operatorname{sen}^2\vartheta = \lambda_{11}{}^1 \cos\vartheta + \lambda_{11}{}^2 \operatorname{sen}\vartheta \\ &(\lambda_{11}{}^1 - \lambda_{22}{}^1) \operatorname{sen}\vartheta\cos\vartheta + \\ &\qquad + \lambda_{12}{}^1 \cos^2\vartheta - \lambda_{21}{}^1 \operatorname{sen}^2\vartheta = \lambda_{12}{}^1 \cos\vartheta + \lambda_{12}{}^2 \operatorname{sen}\vartheta \\ &\qquad \lambda_{13}{}^1 \cos\vartheta - \lambda_{23}{}^1 \operatorname{sen}\vartheta = \lambda_{13}{}^1 \cos\vartheta + \lambda_{13}{}^2 \operatorname{sen}\vartheta \end{aligned}$$

$$(\lambda_{11}{}^1 - \lambda_{22}{}^1) \operatorname{sen} \vartheta \cos \vartheta -$$
$$- \lambda_{12}{}^1 \operatorname{sen}^2 \vartheta + \lambda_{21}{}^1 \cos^2 \vartheta = \lambda_{21}{}^1 \cos \vartheta + \lambda_{21}{}^2 \operatorname{sen} \vartheta$$

$$\lambda_{11}{}^1 \operatorname{sen}^2 \vartheta +$$
$$+ (\lambda_{12}{}^1 + \lambda_{21}{}^1) \operatorname{sen} \vartheta \cos \vartheta + \lambda_{22}{}^1 \cos^2 \vartheta = \lambda_{22}{}^1 \cos \vartheta + \lambda_{22}{}^2 \operatorname{sen} \vartheta$$

$$\lambda_{13}{}^1 \operatorname{sen} \vartheta + \lambda_{23}{}^1 \cos \vartheta = \lambda_{23}{}^1 \cos \vartheta + \lambda_{23}{}^2 \operatorname{sen} \vartheta$$

$$\lambda_{31}{}^1 \cos \vartheta - \lambda_{32}{}^1 \operatorname{sen} \vartheta = \lambda_{31}{}^1 \cos \vartheta + \lambda_{31}{}^2 \operatorname{sen} \vartheta$$

$$\lambda_{31}{}^1 \operatorname{sen} \vartheta + \lambda_{32}{}^1 \cos \vartheta = \lambda_{32}{}^1 \cos \vartheta + \lambda_{32}{}^2 \operatorname{sen} \vartheta$$

$$\lambda_{33}{}^1 = \lambda_{33}{}^1 \cos \vartheta + \lambda_{33}{}^2 \operatorname{sen} \vartheta.$$

Si estas ecuaciones deben satisfacerse para todo valor de ϑ debe ser

$$\begin{gathered}
\lambda_{11}{}^1 = \lambda_{12}{}^1 = \lambda_{21}{}^1 = \lambda_{22}{}^1 = \lambda_{33}{}^1 = 0 \\
\lambda_{11}{}^2 = \lambda_{12}{}^2 = \lambda_{21}{}^2 = \lambda_{22}{}^2 = \lambda_{33}{}^2 = 0 \\
\lambda_{23}{}^1 + \lambda_{13}{}^2 = 0, \lambda_{23}{}^2 - \lambda_{13}{}^1 = 0, \lambda_{31}{}^2 + \lambda_{32}{}^1 = 0, \lambda_{32}{}^2 - \lambda_{31}{}^1 = 0.
\end{gathered} \tag{7.6}$$

Para $m = 3$, la ecuación matricial (7.5) equivale al sistema

$$\lambda_{11}{}^3 \cos^2 \vartheta - (\lambda_{12}{}^3 + \lambda_{21}{}^3) \operatorname{sen} \vartheta \cos \vartheta + \lambda_{22}{}^3 \operatorname{sen}^2 \vartheta = \lambda_{11}{}^3$$

$$(\lambda_{11}{}^3 - \lambda_{22}{}^3) \operatorname{sen} \vartheta \cos \vartheta + \lambda_{12}{}^3 \cos^2 \vartheta - \lambda_{21}{}^3 \operatorname{sen}^2 \vartheta = \lambda_{12}{}^3$$

$$\lambda_{13}{}^3 \cos \vartheta - \lambda_{23}{}^3 \operatorname{sen} \vartheta = \lambda_{13}{}^3$$

$$(\lambda_{11}{}^3 - \lambda_{22}{}^3) \operatorname{sen} \vartheta \cos \vartheta + \lambda_{21}{}^3 \cos^2 \vartheta - \lambda_{12}{}^3 \operatorname{sen}^2 \vartheta = \lambda_{21}{}^3$$

$$\lambda_{11}{}^3 \operatorname{sen}^2 \vartheta + (\lambda_{12}{}^3 + \lambda_{21}{}^3) \operatorname{sen} \vartheta \cos \vartheta + \lambda_{22}{}^3 \cos^2 \vartheta = \lambda_{22}{}^3$$

$$\lambda_{13}{}^3 \operatorname{sen} \vartheta + \lambda_{23}{}^3 \cos \vartheta = \lambda_{23}{}^3$$

$$\lambda_{31}{}^3 \cos \vartheta - \lambda_{32}{}^3 \operatorname{sen} \vartheta = \lambda_{31}{}^3$$

$$\lambda_{31}{}^3 \operatorname{sen} \vartheta + \lambda_{32}{}^3 \cos \vartheta = \lambda_{32}{}^3$$

$$\lambda_{33}{}^3 = \lambda_{33}{}^3$$

de donde

$$(7.7)\qquad \begin{aligned} &\lambda_{13}{}^3=\lambda_{31}{}^3=\lambda_{23}{}^3=\lambda_{32}{}^3=0 \\ &\lambda_{12}{}^3+\lambda_{21}{}^3=0,\ \lambda_{11}{}^3-\lambda_{22}{}^3=0. \end{aligned}$$

Para $m=2$, las ecuaciones (7.5) no dan ninguna relación nueva entre los coeficientes $\lambda_{ij}{}^m$.

Falta considerar las rotaciones O_1, O_2 pero se observa que los elementos de estas matrices se obtienen de los de O_3 por permutación circular de los índices, es decir,

$$\alpha_{ij}{}^{(3)}=\alpha_{i+1,j+1}{}^{(1)}=\alpha_{i+2,j+2}{}^{(2)}$$

donde los subíndices deben tomarse mod. 3.

Por tanto las relaciones a que dan lugar las ecuaciones (7.5) al tomar las matrices O_1, O_2 son las que se deducen de (7.6) y (7.7) por permutación circular de los índices.

Resultan de esta manera las nuevas condiciones:

$$(7.8)\qquad \begin{array}{ll} \lambda_{11}{}^1=\lambda_{22}{}^2=\lambda_{33}{}^3=0 & \lambda_{12}{}^1=\lambda_{23}{}^2=\lambda_{31}{}^3=0 \\ \lambda_{21}{}^1=\lambda_{32}{}^2=\lambda_{13}{}^3=0 & \lambda_{11}{}^2=\lambda_{22}{}^3=\lambda_{33}{}^1=0 \\ \lambda_{12}{}^2=\lambda_{23}{}^3=\lambda_{31}{}^1=0 & \lambda_{21}{}^2=\lambda_{32}{}^3=\lambda_{13}{}^1=0 \\ \lambda_{33}{}^2=\lambda_{11}{}^3=\lambda_{22}{}^1=0 & \lambda_{13}{}^3=\lambda_{21}{}^1=\lambda_{32}{}^2=0 \\ \lambda_{23}{}^3=\lambda_{31}{}^1=\lambda_{12}{}^2=0 & \lambda_{13}{}^3=\lambda_{12}{}^1=\lambda_{23}{}^2=0 \\ \lambda_{32}{}^3=\lambda_{13}{}^1=\lambda_{21}{}^2=0 & \end{array}$$

y también, de (7.6),

$$(7.9)\qquad \begin{array}{lll} \lambda_{23}{}^1+\lambda_{13}{}^2=0, & \lambda_{31}{}^2+\lambda_{21}{}^3=0, & \lambda_{12}{}^3+\lambda_{32}{}^1=0 \\ \lambda_{23}{}^2=\lambda_{13}{}^1\ , & \lambda_{31}{}^3=\lambda_{21}{}^2\ , & \lambda_{12}{}^1=\lambda_{32}{}^3 \\ \lambda_{32}{}^1+\lambda_{31}{}^2=0, & \lambda_{13}{}^2+\lambda_{12}{}^3=0; & \lambda_{21}{}^3+\lambda_{23}{}^1=0 \\ \lambda_{32}{}^2=\lambda_{31}{}^1\ , & \lambda_{13}{}^3=\lambda_{12}{}^2\ , & \lambda_{21}{}^1=\lambda_{23}{}^3 \end{array}$$

y de (7.7)

$$
(7.10)\qquad
\begin{aligned}
&\lambda_{12}{}^3+\lambda_{21}{}^3=0, \quad \lambda_{23}{}^1+\lambda_{32}{}^1=0, \quad \lambda_{31}{}^2+\lambda_{13}{}^2=0\\
&\lambda_{11}{}^3=\lambda_{22}{}^3 \quad , \quad \lambda_{22}{}^1=\lambda_{33}{}^1 \quad , \quad \lambda_{33}{}^2=\lambda_{11}{}^2.
\end{aligned}
$$

Como consecuencia de (7.6), (7.7), (7.8), (7.9) y (7.10), queda como solución

$$
(7.11)\qquad L^1=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\lambda\\ 0 & \lambda & 0\end{pmatrix},\quad L^2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda\\ 0 & 0 & 0\\ -\lambda & 0 & 0\end{pmatrix},\quad L^3=\begin{pmatrix} 0 & -\lambda & 0\\ \lambda & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.
$$

Falta ver todavía si la relación (7.5) se cumple al considerar matrices ortogonales O^-, o sea, de determinante -1.

Tomemos, por ejemplo,

$$
O_3^-=\begin{pmatrix} \cos\vartheta & \operatorname{sen}\vartheta & 0\\ \operatorname{sen}\vartheta & -\cos\vartheta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.
$$

La ecuación (7.5), para los valores (7.11), y para $m=3$, da

$$
\begin{pmatrix} \cos\vartheta & \operatorname{sen}\vartheta & 0\\ \operatorname{sen}\vartheta & -\cos\vartheta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 0 & -\lambda & 0\\ \lambda & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} \cos\vartheta & \operatorname{sen}\vartheta & 0\\ \operatorname{sen}\vartheta & -\cos\vartheta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=
$$

$$
=\begin{pmatrix} 0 & -\lambda & 0\\ \lambda & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}
$$

y como el producto de las tres matrices del primer miembro es

$$
\begin{pmatrix} 0 & \lambda & 0\\ -\lambda & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}
$$

resulta $\lambda=-\lambda$, es decir, $\lambda=0$.

Por tanto:

No existe ningún vector cuyas componentes estén formadas *por combinaciones lineales con coeficientes constantes de las primeras derivadas parciales de las componentes de un vector.*

En cambio, si en vez de un vector buscamos una densidad vectorial, en lugar de las ecuaciones (7. 5) tendremos las ecuaciones (para $m=1, 2, 3$)

$$O^{+t} L^m O^+ = \alpha_{mh} L^h, \qquad O^{-t} L^m O^- = -\alpha_{mh} L^h.$$

El primer grupo de estas ecuaciones tiene la solución única (7. 11) y es inmediato comprobar que esta solución satisface también al segundo grupo.

Por tanto:

Como combinación lineal con coeficientes constantes de las derivadas parciales primeras de las componentes de un vector. A, se puede formar una sola densidad vectorial (salvo un factor constante) de componentes

$$a_{23} - a_{32}, \quad a_{31} - a_{13}, \quad a_{12} - a_{21}$$

que es la llamada el rotor de A.

DIRECCIÓN NACIONAL DE LA ENERGÍA ATÓMICA
BUENOS AIRES