UN TEOREMA SOBRE REPRESENTACION CONFORME

Por

Luis A. Santaló

1. *Introducción.* — Supongamos una correspondencia entre los puntos del plano x,y y los del plano X,Y definida por las ecuaciones

$$X = X(x, y), \quad Y = Y(x, y) \tag{1.1}$$

donde las x,y y las X,Y son coordenadas cartesianas rectangulares.

Las ecuaciones (1.1) definen una transformación del plano x,y en el X,Y. Supondremos que las funciones $X(x,y)$, $Y(x,y)$, que definen la transformación, admiten las derivadas parciales de primero y segundo orden, siendo estas últimas continuas. De esta manera, a una curva del plano x,y que tenga radio de curvatura determinado en uno de sus puntos, le corresponderá otra curva también con radio de curvatura determinado en el punto homólogo.

Cuando el ángulo que forman entre sí dos direcciones cualesquiera del plano x,y es igual al que forman las direcciones transformadas en el plano X,Y se dice abreviadamente que la transformación «conserva los ángulos» o que es *conforme*.

Las condiciones necesarias y suficientes para que la transformación (1.1) sea conforme se sabe que son (¹)

$$X_x^2 + Y_x^2 = X_y^2 + Y_y^2, \qquad X_x X_y + Y_x Y_y = 0. \tag{1.2}$$

(¹) Ver por ej., E. Goursat, *Cours d' Analyse Mathématique*, tomo I, (5ª Ed.), pág. 642.

De estas ecuaciones se deduce que se verifica

$$X_x = Y_y, \quad X_y = -Y_x \qquad (1.3)$$

o bien

$$X_x = -Y_y \quad X_y = Y_x. \qquad (1.4)$$

Para que la correspondencia entre los puntos de los entornos de dos puntos homólogos P y P' sea biunívoca, el jacobiano de (1.1) para el punto P debe ser distinto de cero, lo cual, según (1.3) o (1.4) equivale a las condiciones

$$X_x^2 + X_y^2 \neq 0, \quad Y_x^2 + Y_y^2 \neq 0. \qquad (1.5)$$

Como las ecuaciones (1.4) se deducen de las (1.3) con solo cambiar Y en $-Y$, en todo lo que sigue vamos a suponer que se cumplen las condiciones (1.3). El caso en que las ecuaciones que tuvieran lugar entre las funciones (1.1) que definen la transformación conforme, fueran las (1.4), se reduciría al anterior por una simetría del plano X,Y respecto el eje X y todas las conclusiones que vamos a obtener subsistirían igualmente.

De (1.2) y (1.3) se deducen las siguientes relaciones que más adelante utilizaremos

$$X_{xx} + X_{yy} = 0, \quad Y_{xx} + Y_{yy} = 0. \qquad (1.6)$$

2. *Enunciado del teorema.* — Supongamos una transformación conforme definida por las ecuaciones (1.1) que cumplen las condiciones mencionadas en el nº. 1. Sea un punto P del plano x,y y sea P' el punto correspondiente del plano X,Y.

Consideremos una curva cualquiera γ del plano x,y que pase por P y tenga en este punto curvatura determinada; sea Q el centro de curvatura de γ en el punto P. La curva γ' transformada de γ por la transformación (1.1) tendrá un centro de curvatura Q'. El teorema principal que vamos a demostrar en esta nota es el siguiente:

La correspondencia entre los puntos Q, centros de curvatura correspondientes al punto P de las curvas γ del plano x,y y los puntos Q' centros de curvatura *de las curvas transformadas γ' del plano X,Y, correspondientes al punto P' transformado del P, es una proyectividad entre los planos x,y y X,Y.*

Una vez demostrado este teorema, deduciremos de él algunas consecuencias.

3. *Demostración.* — Sin restringir la generalidad podemos suponer que el punto P es el origen $(x=0, y=0)$ del plano x,y y que el punto transformado P' es el origen del plano X,Y.

Supongamos una curva γ definida por las ecuaciones paramétricas

$$x=x(t), \quad y=y(t) \tag{3.1}$$

que pase por el origen (es decir, para $t=0$, es $x=y=0$). Su curvatura en el origen vale

$$\frac{1}{r}=\frac{x'y''-x''y'}{(x'^2+y'^2)^{3/2}} \tag{3.2}$$

donde los acentos indican derivadas tomadas en el origen $t=0$.

Llamando ϑ al ángulo que forma la tangente a la curva en el origen con el eje x, se tiene

$$\tan\vartheta=\frac{y'}{x'} \tag{3.3}$$

y las coordenadas ξ, η del centro de curvatura de la curva (3.1) en el origen serán

$$\begin{aligned}\xi &= -r\operatorname{sen}\vartheta = -r\frac{y'}{(x'^2+y'^2)^{1/2}} = -\frac{y'(x'^2+y'^2)}{x'y''-x''y'}\\ \eta &= r\cos\vartheta = r\frac{x'}{(x'^2+y'^2)^{1/2}} = \frac{x'(x'^2+y'^2)}{x'y''-x''y'}.\end{aligned} \tag{3.4}$$

La curva transformada de la (3.1) tiene por ecuaciones paramétricas

$$X=X(x(t), y(t)), \quad Y=Y(x(t), y(t)) \tag{3.5}$$

siendo, por hipótesis $X=0$, $Y=0$ para $t=0$. Para hallar las coordenadas de su centro de curvatura correspondiente al origen $X=0$, $Y=0$, aplicaremos las fórmulas (3.4). Para ello se observa que

$$X' = X_x x' + X_y y'$$

$$X'' = X_{xx} x'^2 + 2 X_{xy} x' y' + X_{yy} y'^2 + X_x x'' + X_y y''$$

$$Y' = Y_x x' + Y_y y' \tag{3.6}$$

$$Y'' = Y_{xx} x'^2 + 2 Y_{xy} x' y' + Y_{yy} y'^2 + Y_x x'' + Y_y y''.$$

De aquí se deduce, teniendo en cuenta (1.2)

$$X'^2 + Y'^2 = H(x'^2 + y'^2) \tag{3.7}$$

habiendo puesto, para abreviar,

$$H = X_x^2 + Y_x^2 = X_y^2 + Y_y^2. \tag{3.8}$$

y siendo, por tanto, según (1.5) y (1.3), $H \neq 0$.

Además, verificando operaciones y teniendo en cuenta las relaciones (1.3), se tiene

$$\begin{aligned} X' Y'' - X'' Y' = {} & (X_{xx} X_y - X_x X_{xy})(x'^2 + y'^2) x' \\ & + (X_y X_{xy} - X_x X_{yy})(x'^2 + y'^2) y' \\ & + H(x' y'' - x'' y'). \end{aligned} \tag{3.9}$$

De (3.7) y (3.9) aplicando (3.4) se obtiene que las coordenadas del centro de curvatura de la curva transformada de (3.1) son

$$\begin{aligned} \xi_1 &= -\frac{Y'(X'^2+Y'^2)}{X'Y''-X''Y'} = \frac{m\xi - n\eta}{A\xi + B\eta + H} \\ \eta_1 &= \frac{X'(X'^2+Y'^2)}{X'Y''-X''Y'} = \frac{n\xi + m\eta}{A\xi + B\eta + H} \end{aligned} \tag{3.10}$$

habiendo puesto

$$m = HY_y = HX_x,\ n = HY_x = -HX_y$$

$$A = X_y X_{xy} - X_x X_{yy},\ B = X_y X_{xx} - X_x X_{xy} \tag{3.11}$$

Todos estos valores se refieren al punto $t=0$ $(x=0, y=0)$. Los coeficientes m, n, A, B, H son constantes que dependen de las funciones $X(x,y)$, $Y(x,y)$ que definen la transformación (1.1) pero no de la curva particular $x=x(t), y=y(t)$ que se transforma. Fijado el punto $x=0, y=0$ la correspondencia entre los centros de curvatura ξ, η de las curvas que pasan por él y los centros de curvatura $\xi_1 \eta_1$ de las curvas transformadas en el punto homólogo, está definida por las ecuaciones (3.10). Como estas ecuaciones son las de una proyectividad, el teorema queda demostrado ([2]).

La proyectividad (3.10) es de una forma particular. Para caracterizarla geométricamente supongamos por un momento superpuestos los planos ξ, η y ξ_1, η_1. Llamando φ al ángulo que forman los radios vectores que unen el origen O con dos puntos correspondientes $Q(\xi, \eta)$ y $Q'(\xi_1 \eta_1)$ se tiene

$$\tan\varphi = \frac{\dfrac{\eta_1}{\xi_1} - \dfrac{\eta}{\xi}}{1 + \dfrac{\eta_1}{\xi_1}\dfrac{\eta}{\xi}}$$

o bien, según (3.10),

$$\tan\varphi = \frac{n}{m} \tag{3.12}$$

([2]) La transformación conforme (1.1) se puede suponer representada por una función de variable compleja $w = f(z)$, siendo $z = x + iy$, $w = f(z) = X(x,y) + i\,Y(x,y)$. Las condiciones (1.3) son entonces las clásicas condiciones de monogeneidad de Cauchy-Riemann. Entre los coeficientes que figuran en (3.10) y los módulos de las derivadas de $f(z)$ hay las siguientes relaciones

$$H = |f'(z)|^2,\ A^2 + B^2 = |f''(z)|^2\,|f'(z)|^2$$

las cuales se obtienen inmediatamente teniendo en cuenta (3.11) y recordando que es

$$f'(z) = X_x + iY_x = X_x - iX_y\ ,\ f''(z) = -X_{yy} - iX_{xy}$$

que nos dice que este ángulo de giro es constante, como debía ser por tratarse de una transformación conforme, y además nos da una interpretación geométrica del cociente n/m.

En cuanto a la distancia del punto Q' al origen, se tiene

$$R^2 = \xi_1{}^2 + \eta_1{}^2 = \frac{(m^2+n^2)(\xi^2+\eta^2)}{(A\xi+B\eta+H)^2}.$$

Pero la distancia del punto Q a la recta $A\xi + B\eta + H = 0$ es

$$\delta = \frac{|A\xi+B\eta+H|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

por consiguiente

$$R = \sqrt{\frac{m^2+n^2}{A^2+B^2}} \frac{r}{\delta} \tag{3.13}$$

siendo $r^2 = \xi^2 + \eta^2$.

Es decir: *Para pasar del punto $Q(\xi, \eta)$ al correspondiente $Q'(\xi_1, \eta_1)$ definido por la proyectividad* (3.10), *hay que girar el radio vector OQ de un ángulo constante φ definido por* (3.12) *y multiplicar la longitud del radio vector $r = OQ$ por un factor dado en* (3.13) *que es inversamente proporcional a la distancia de Q a la recta fija $A\xi + B\eta + H = 0$.*

Según (3.11) y (3.8) se debe observar también la relación

$$m^2 + n^2 = H^3. \tag{3.14}$$

4. *Unos invariantes conformes para curvas tangentes.* — *a*) Supongamos tres curvas tangentes en un punto P. Sean Q_1, Q_2, Q_3 sus centros de curvatura corrrespondientes al punto P, que suponemos distintos, y que estarán sobre la normal a las curvas en P. Según el teorema demostrado, para cualquier transformación conforme, los centros de curvatura Q'_1, Q'_2 Q'_3 de las curvas transformadas formarán con P' (correspondiente a P) una cuaterna cuya razón doble tiene el mismo valor que $(PQ_1 Q_2 Q_3)$.

primitivas y $R'_i = P'Q'_i$ a los de las curvas transformadas, se tiene por tanto $(0, R_1, R_2, R_3) = (0, R'_1, R'_2, R'_3)$, o sea

$$\frac{R_2(R_3-R_1)}{R_3(R_2-R_1)} = \frac{R'_2(R'_3-R'_1)}{R'_3(R'_2-R'_1)}.$$

Introduciendo las curvaturas $\varkappa_i = 1/R_i$ en lugar de los radios de curvatura, se tiene, más simplemente,

$$\frac{\varkappa_1-\varkappa_3}{\varkappa_1-\varkappa_2} = \frac{\varkappa'_1-\varkappa'_3}{\varkappa'_1-\varkappa'_2}.$$

Por consiguiente:

Dadas tres curvas tangentes en un punto, y siendo $\varkappa_i$ los valores de sus curvaturas en el mismo, la expresión

$$\frac{\varkappa_1-\varkappa_3}{\varkappa_1-\varkappa_2} \tag{4.1}$$

es invariante por transformaciones conformes.

b) Si en lugar de tres curvas tangentes se consideran cuatro que sean también tangentes en el punto P y representamos por $\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3, \varkappa_4$ a sus curvaturas en este punto, según (4.1), también será invariante por transformaciones conformes la expresión

$$-\frac{\varkappa_1-\varkappa_2}{\varkappa_1-\varkappa_3}\,\frac{\varkappa_3-\varkappa_1}{\varkappa_3-\varkappa_4} = \frac{\varkappa_1-\varkappa_2}{\varkappa_3-\varkappa_4}. \tag{4.2}$$

Esto quiere decir que si las curvaturas de las curvas transformadas se representan respectivamente por $\varkappa'_i$ $(i=1,2,3,4)$, se verifica

$$\frac{\varkappa_1-\varkappa_2}{\varkappa_3-\varkappa_4} = \frac{\varkappa'_1-\varkappa'_2}{\varkappa'_3-\varkappa'_4}$$

o sea

$$\frac{\varkappa_1-\varkappa_2}{\varkappa'_1-\varkappa'_2} = \frac{\varkappa_3-\varkappa_4}{\varkappa'_3-\varkappa'_4}.$$

Por consiguiente: *Dada una transformación conforme cualquiera y un haz de curvas tangentes en un punto a una misma recta, la razón*

$$\frac{\varkappa_1-\varkappa_2}{\varkappa'_1-\varkappa'_2} \tag{4.3}$$

entre las diferencias de las curvaturas en el punto de contacto de dos curvas del haz, antes y después de la transformación, tiene el mismo valor cualquiera que sea el par de curvas del haz que se considere.

5. *Casos particulares.* — Como casos particulares del teorema general se pueden citar:

I. Considerando todas las rectas que pasan por un punto, sus centros de curvatura en el mismo están sobre la recta del infinito y como por una proyectividad las rectas se transforman en rectas, resulta:

Las curvas transformadas por una transformación conforme de todas las rectas que pasan por un punto, tienen sus centros de curvatura correspondientes al punto común sobre una recta.

II. Como la inversión es una transformación que conserva los ángulos y además transforma los círculos en círculos, se tiene

Dado un conjunto de círculos que pasan por un punto, al transformarlos por una inversión cuyo centro no sea el punto común, se obtiene otro conjunto de círculos cuyos centros resultan del conjunto de los centros primitivos por una proyectividad.

6. *Algunas consecuencias.* — Supongamos un conjunto de curvas que pasan por un punto que supondremos el origen de coordenadas del plano ξ, η. Siendo r el radio de curvatura de una curva general del conjunto, queremos hallar aquellas curvas para las cuales el radio de curvatura de la transformada por la transformación conforme (1. 1) vale λr, siendo λ una constante dada. (Los radios de curvatura se sobrentiende que se consideran tomados en el origen y en su punto transformado).

Según (3. 10) el cuadrado del radio de curvatura de la curva transformada vale

$$\xi_1{}^2 + \eta_1{}^2 = \frac{(m^2+n^2)\,(\xi^2+\eta^2)}{(A\xi+B\eta+H)^2}$$

y si debe ser $\xi_1{}^2 + \eta_1{}^2 = \lambda^2 r^2 = \lambda^2(\xi^2 + \eta^2)$ se deduce

$$\lambda(A\xi + B\eta + H) - \sqrt{m^2 + n^2} = 0 \qquad (6.\,1)$$

Es decir: *Las curvas del conjunto tales que, siendo r su radio de curvatura, el de la transformada vale λr, son aquellas cuyo centro de curvatura está sobre la recta* (6.1).

La recta (6.1) está determinada excepto en el caso de ser $A=B=0$. En este caso, según (3.14) y (6.1) si $\lambda=\sqrt{H}$, para cualquier curva del conjunto se cumple la condición de que la razón entre el radio de curvatura de su transformada y el suyo propio vale λ; en cambio, si $\lambda \neq \sqrt{H}$, no hay ninguna curva del conjunto para la cual se cumpla dicha propiedad.

En particular, para $\lambda=\infty$, se tiene: *Las curvas del conjunto tales que sus transformadas tienen radio de curvatura infinito, son aquellas cuyo centro de curvatura se encuentra sobre la recta* $A\xi+B\eta+H=0$.

Supongamos, en particular, un conjunto simplemente infinito de curvas que pasan por un punto, que suponemos el origen de coordenadas del plano ξ, η. El lugar geométrico de los centros de curvatura de estas curvas en el origen será una curva K. Por una transformación conforme cualquiera, la curva lugar geométrico de los centros de curvatura de las curvas transformadas, será una curva K', transformada proyectiva de K. El último teorema se puede enunciar entonces:

El número de puntos del infinito de la curva K', lugar geométrico de los centros de curvatura de las curvas transformadas, es igual al número de puntos de intersección de la curva K con la recta $A\xi+B\eta+H=0$. En consecuencia, dicho número nunca puede superar al número máximo de puntos en que la curva K puede ser cortada por una recta.

7. *Caso particular considerado por Ringleb.* — El teorema principal del nº. 2 contiene como caso particular el siguiente teorema demostrado por F. Ringleb [3]:

Supongamos un haz de curvas que pasan por un punto P y tienen en él la misma curvatura. Las curvas transformadas de este haz por una transformación conforme tienen sus centros de curvatura correspondientes al punto común P' sobre una cónica, la cual tiene P' como foco.

---

(3) F. Ringleb, *Ueber das Verhalten der Krümmung ebener Kurven bei konformer Abbildung*, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung

La primera parte de este teorema es una consecuencia inmediata del teorema del nº 2. En efecto, si las curvas tienen la misma curvatura en P, sus centros de curvatura en este punto estarán sobre una circunferencia K de centro P y, por tanto, los centros de curvatura de las curvas transformadas estarán sobre una curva K' transformada proyectiva de una circunferencia, o sea, sobre una cónica.

Para ver que esta cónica tiene por foco el punto P' transformado del P se puede proceder analíticamente del siguiente modo. Llamando, como en el nº 2, ϑ al ángulo que forma la tangente a una curva general del haz con el eje x y siendo r el radio de la circunferencia K, se tiene, siendo P y P' los orígenes de coordenadas de los planos respectivos,

$$\xi = -r \operatorname{sen} \vartheta, \quad \eta = r \cos \vartheta.$$

Según esto, poniendo $R^2 = \xi_1^2 + \eta_1^2$, de (3. 10) se deduce

$$R = \frac{\sqrt{m^2+n^2}\, r}{(-A \operatorname{sen} \vartheta + B \cos \vartheta) r + H} \tag{7. 1}$$

que será la ecuación en coordenadas polares de la curva K'. Introduciendo el ángulo auxiliar α tal que $A = -a \operatorname{sen} \alpha$, $B = a \cos \alpha$, $a^2 = A^2 + B^2$, la ecuación (7. 1) se puede escribir

$$R = \frac{\sqrt{m^2+n^2}\, r}{H} \; \frac{1}{1 + \frac{ar}{H} \cos(\vartheta - \alpha)} \tag{7. 2}$$

que pone de manifiesto que K' es una cónica con un foco en el origen, que es el punto P', y excentricidad ar/H.

Para demostrar que P' es un foco de la cónica K' se puede proceder también sintéticamente ([4]). En efecto, la proyectividad (3. 10) conserva los ángulos entre las direcciones de vértice P. Por tanto si la involución de rectas conjugadas de vértice P respecto de K es la involución rectangular, lo mismo ocurrirá con la involución de rectas conjugadas de vértice P' respecto de K'. Como los focos de las cónicas están caracterizados por ser los únicos puntos del plano cuya involución de rectas conjugadas es la rectangular, se deduce, de manera

———

más general que en el caso considerado por Ringleb, que si K es una cónica con un foco en P, la curva K' es otra cónica con un foco en el punto P'.

Para ver si la cónica K' es una elipse, hipérbola o parábola, bastará ver el número de sus puntos del infinito. Por tanto, según el último teorema del nº 6, habrá que ver el número de puntos de intersección del círculo $\xi^2+\eta^2=r^2$, que es la curva K, con la recta $A\xi+B\eta+H=0$. Estos serán ninguno, uno o dos según que la distancia de la recta al origen sea mayor, igual o menor que r, o sea, según que sea (5)

$$\frac{H}{\sqrt{A^2+B^2}} \gtreqless r. \tag{7.3}$$

Al mismo resultado se llega observando que la cónica de ecuación (7.2) es elipse, parábola o hipérbola, según que su excentricidad $\frac{ar}{H}$ sea menor, igual o mayor que uno.

8. *Una aplicación a la cartografía.* — Supongamos en el espacio unos ejes coordenados ortogonales x_1, x_2, x_3 y referida a ellos una superficie de revolución cuyo eje sea el x_3. Sus ecuaciones paramétricas serán de la forma

$$x_1=g(x_3)\cos\varphi,\quad x_2=g(x_3)\,\mathrm{sen}\,\varphi,\quad x_3=x_3. \tag{8.1}$$

El cuadrado del elemento de arco de la superficie vale $ds^2=dx_1{}^2+dx_2{}^2+dx_3{}^2$, o sea, según (8.1),

$$ds^2=g^2\left(\frac{1+g'^2}{g^2}dx_3{}^2+d\varphi^2\right) \tag{8.2}$$

indicando con un acento la derivada.

Consideremos la representación de la superficie sobre un plano x,y definida por las ecuaciones

(5) Según lo dicho en la nota (2), las condiciones para que la curva K' sea elipse, parábola o hipérbola, cuando la transformación conforme está dada por una función analítica de variable compleja $w=f(z)$, equivalen respectivamente a

$$|f'(z)|>r\,|f''(z)|,\ |f'(z)|=r\,|f''(z)|,\ |f'(z)|<r\,|f''(z)|$$

$$x = \varphi, \quad y = \int_0^{x_3} \frac{\sqrt{1+q^2}}{q}\, dx_3. \qquad (8.3)$$

Esta representación se sabe que es *conforme*, es decir, que conserva los ángulos. En efecto, el cociente entre los elementos de arco ds de la superficie y dS del plano ($dS^2 = dx^2 + dy^2$) es igual a $g(x_3)$, es decir, depende del punto, pero no de la dirección por él; por tanto, en el entorno del punto, los triángulos infinitesimales, por tener sus lados proporcionales, serán semejantes y por consiguiente tendrán los ángulos iguales. En el caso particular de ser la superficie una esfera ($g(x_3) = \sqrt{R^2 - x_3^2}$), la representación (8.3) es la conocida proyección de Mercator de la esfera sobre el plano.

La importancia de la representación (8.3) es que los meridianos de la superficie, $\varphi =$ cte., vienen representados por rectas paralelas al eje y y los paralelos, $x_3 =$ cte., por las rectas paralelas al eje x.

Se llaman curvas *loxodrómicas* de una superficie de revolución a las curvas que cortan a los meridianos bajo un ángulo constante. Siendo la representación (8.3) conforme y habiéndose los meridianos transformado en rectas paralelas, se deduce que en la representación (8.3) *las loxodrómicas se representan por rectas.*

Cualquier representación conforme de la superficie (8.1) sobre un plano, puede considerarse como obtenida mediante una nueva representación conforme de la primera representación (8.3) sobre otro plano. Por consiguiente, como las loxodrómicas que pasan por un punto, en la representación (8.3), son rectas y por tanto sus centros de curvatura están sobre una recta (la del infinito), aplicando el teorema fundamental del nº. 2, se tiene la propiedad:

En cualquier representación conforme de una superficic de revolución sobre el plano, las loxodrómicas que pasan por un punto están representadas por curvas cuyos centros de curvatura correspondientes al mismo punto están sobre una recta.

En particular, siendo la esfera una superficie de revolución, el teorema anterior es aplicable a cualquier mapa que represente la esfera sobre el plano conservando los ángulos.

ROSARIO, INSTITUTO DE MATEMÁTICA.