

(67)

AREA LIMITADA POR LA CURVA ENGENDRADA POR EL EXTREMO DE UN SEGMENTO CUYO OTRO EXTREMO RECORRE UNA CURVA FIJA Y APLICACION A LA OBTENCION DE ALGUNOS TEOREMAS SOBRE LOS OVALOS

1. Sea en el plano una curva cerrada C sin puntos dobles, definida por las ecuaciones paramétricas

$$x = x(s), \quad y = y(s) \quad (1.1)$$

donde el parámetro s es el arco de la curva. Supondremos que la curva tiene longitud finita y que además tiene en cada punto curvatura determinada, es decir, que las funciones (1.1) admiten las dos primeras derivadas en todo punto. Entonces, si τ es el ángulo que forma la tangente a la curva con el eje x y ρ es el radio de curvatura, se verifican las igualdades

$$ds = \rho \, d\tau, \quad dx = \cos \tau \, ds, \quad dy = \operatorname{sen} \tau \, ds. \quad (1.2)$$

Supongamos un segmento de longitud $h = h(s)$ que se mueve recorriendo uno de sus extremos la curva C . Si este segmento en el punto x, y de C forma un ángulo ϑ con la tangente, las coordenadas del extremo opuesto serán

$$X = x + h \cos (\vartheta + \tau), \quad Y = y + h \operatorname{sen} (\vartheta + \tau). \quad (1.3)$$

Para situarnos en las condiciones más generales, supondremos que el ángulo ϑ es también una función de s . Si después de recorrer el extremo x, y toda la curva C , el segmento vuelve a su posición inicial, el extremo X, Y habrá descrito una curva cerrada que limitará una cierta área Φ cuyo valor queremos calcular.

Para ello aplicaremos la fórmula que da el valor de un área plana por una integral curvilínea extendida a su contorno, o sea,

$$\Phi = \int X dY. \quad (1.4)$$

Según (1.3) es

$$X dY = (x + h \cos(\vartheta + \tau)) (y' + h' \operatorname{sen}(\vartheta + \tau) + h \cos(\vartheta + \tau) (\vartheta' + \tau')) ds. \quad (1.5)$$

Observemos que llamando L a la longitud de C y teniendo en cuenta que suponemos que el segmento vuelve a su posición inicial, o sea $h(s+L) = h(s)$, $\vartheta(s+L) = \vartheta(s)$, por una integración por partes se verifica

$$\int_0^L hh' \operatorname{sen}(\vartheta + \tau) \cos(\vartheta + \tau) ds = - \int_0^L h(h' \operatorname{sen}(\vartheta + \tau) \cos(\vartheta + \tau) + h \cos^2(\vartheta + \tau) (\vartheta' + \tau') - h \operatorname{sen}^2(\vartheta + \tau) (\vartheta' + \tau')) ds,$$

de donde

$$\int_0^L hh' \operatorname{sen}(\vartheta + \tau) \cos(\vartheta + \tau) ds = - \frac{1}{2} \int_0^L h^2 (\cos^2(\vartheta + \tau) - \operatorname{sen}^2(\vartheta + \tau)) (\vartheta' + \tau') ds.$$

Además, integrando también por partes,

$$\int_0^L xh' \operatorname{sen}(\vartheta + \tau) ds = - \int_0^L h(x' \operatorname{sen}(\vartheta + \tau) + x \cos(\vartheta + \tau) (\vartheta' + \tau')) ds.$$

Sustituyendo estas últimas expresiones en (1.5) resulta

$$\int X dY = \int_0^L x dy + \int_0^L h(y' \cos(\vartheta + \tau) - x' \operatorname{sen}(\vartheta + \tau)) ds + \frac{1}{2} \int_0^L h^2 \vartheta' ds + \frac{1}{2} \int_0^L h^2 \tau' ds. \quad (1.6)$$

Según (1.2) es $\cos(\vartheta + \tau)dy - \sin(\vartheta + \tau)dx = -\sin\vartheta ds$ y por tanto, sustituyendo en (1.6), integrando y llamando F al área limitada por la curva C , se tiene

$$\Phi = F - \int_0^L h \sin\vartheta ds + \frac{1}{2} \int_0^L h^2 \vartheta' ds + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} h^2 d\tau. \quad (1.7)$$

Esta es la fórmula fundamental de la que vamos a hacer algunas aplicaciones.

2. *Caso* $\vartheta = cte$. Si el ángulo ϑ que forma el segmento h con la tangente a la curva es constante, la fórmula (1.7) se reduce a

$$\Phi = F - \sin\vartheta \int_0^L h ds + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} h^2 d\tau. \quad (2.1)$$

En particular, si tomamos la longitud h igual a la cuerda de la curva C determinada por la recta inclinada un ángulo ϑ respecto la tangente en cada punto, los dos extremos del segmento h describen la misma curva C y por tanto en (2.1) debe ser $\Phi = F$, de donde

$$\sin\vartheta \int_0^L h ds = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} h^2 d\tau. \quad (2.2)$$

Tomemos, en particular, un óvalo, o sea *una curva cerrada convexa con radio de curvatura ρ continuo en cada punto*. Poniendo $ds = \rho d\tau$, la fórmula (2.2) se puede escribir

$$\int_0^{2\pi} h \left(\rho \sin\vartheta - \frac{1}{2} h \right) d\tau = 0. \quad (2.3)$$

De aquí se deduce que en el intervalo $0, 2\pi$ hay, por lo menos, dos puntos para los cuales $h = 2\rho \operatorname{sen} \vartheta$. Observando que $\rho \operatorname{sen} \vartheta$ es la proyección del radio de curvatura ρ , tomado sobre la normal, sobre la cuerda $AB = h$ inclinada un ángulo ϑ respecto la tangente, se deduce que, considerando todas las cuerdas AB inclinadas un ángulo constante ϑ respecto la tangente, existen por lo menos dos posiciones tales que la normal en el punto medio de la cuerda corta a la normal al óvalo

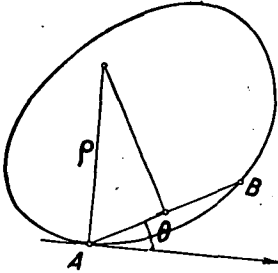


Fig. 1

en el punto A , en el centro de curvatura correspondiente al mismo punto.

Este resultado puede puntualizarse más, pudiéndose demostrar que no solamente hay dos, sino que existen por lo menos *cuatro* posiciones de la cuerda AB en las que tiene lugar la proposición enunciada. Para ello utilizaremos un conocido teorema debido a Bose⁽¹⁾ según el cual todo óvalo C contiene por lo menos dos de sus círculos de curvatura completamente en su interior y está contenido completamente en el interior de por lo menos dos de sus círculos de curvatura; los puntos de contacto de los círculos de curvatura contenidos en C separan a los de los círculos que contienen a C .

Admitido el teorema de Bose, supongamos que A_1, A_3 sean dos puntos de contacto de dos círculos osculadores contenidos en C y A_2, A_4 (separados por los anteriores) dos puntos de contacto de dos círculos osculadores que contienen a C . La cuerda $A_1B_1 = h_1$ que forma un ángulo ϑ con la tangente en A_1 corta primero al círculo osculador en A_1 que al óvalo, y por tanto si ρ_1 es el radio de curvatura en A_1 es

$$\rho_1 \leq \frac{h_1}{2 \operatorname{sen} \vartheta}. \quad (2.4)$$

En cambio, si ρ_2 es el radio del círculo osculador en A_2 , el

⁽¹⁾ R. C. BOSE, *On the number of circles of curvature perfectly enclosing or perfectly enclosed by a closed convex oval*, *Mathematische Zeitschrift*, vol. 35, 1932, pág. 23.

cual contiene a C ; la cuerda A_2B_2 del óvalo será menor que la cuerda correspondiente del círculo y por tanto

$$\rho_2 > \frac{h_2}{2 \operatorname{sen} \vartheta} \quad (2.5)$$

De (2.4) y (2.5) se deduce que entre A_1 y A_2 hay por lo menos un punto en el cual $h = 2\rho \operatorname{sen} \vartheta$. Análogamente hay por lo menos un punto con la misma propiedad entre A_2, A_3 , entre A_3, A_4 y entre A_4, A_5 . Se tiene por tanto el teorema:

Sobre cualquier óvalo, considerando todas las cuerdas AB inclinadas un ángulo constante ϑ respecto la tangente en su punto inicial A , existen por lo menos cuatro posiciones en las cuales la normal en el punto medio de la cuerda corta a la normal al óvalo en el punto A en el centro de curvatura correspondiente al mismo punto.

3. Si para $\vartheta = \text{const.}$ resulta también $h = \text{const.}$ (2.2) nos da

$$L = \pi \frac{h}{\operatorname{sen} \vartheta} \quad (3.1)$$

es decir: si una curva cerrada es tal que las cuerdas inclinadas de un determinado ángulo constante ϑ respecto de la tangente en su extremo inicial tienen la longitud constante h , la longitud de la curva está dada por (3.1).

Un caso particular muy conocido es el de las curvas convexas de anchura constante⁽²⁾. Ellas corresponden al caso de ser $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ y la longitud h es igual a la anchura de la curva; para ellas resulta entonces $L = \pi h$, como es bien sabido.

4. *Caso $h = \text{const.}$* Si a partir de cada punto de la curva cerrada C llevamos una cuerda de longitud constante h que sea menor que el mínimo de los máximos de las distancias de cada punto de la curva a otro cualquiera de la misma (condición para que cualquier punto A de C pueda ser origen de una

(²) Ver, por ej. T. BONNESEN, W. FENCHEL, *Theorie der konvexen Körper*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Berlin 1934, pág. 127.

cuern de longitud h), en la fórmula (1.7) deberá ser $\Phi = F$. Además, como el ángulo ϑ al describir s toda la curva vuelve a su valor inicial y no puede describir toda una circunferencia por ser siempre $< \pi$, será $\int_0^L \vartheta' ds = 0$. Por tanto se tiene

$$\int_0^L \text{sen } \vartheta ds = \pi h \quad (4.1)$$

que se puede escribir

$$\int_0^{2\pi} \left(\rho \text{sen } \vartheta - \frac{1}{2} h \right) d\tau = 0. \quad (4.2)$$

Si C es un óvalo, de esta igualdad se deduce que hay por lo menos dos cuerdas de longitud h para las cuales es $h = 2\rho \text{sen } \vartheta$, siendo ρ el radio de curvatura en un extremo de la cuerda y ϑ el ángulo que forma en este mismo extremo la cuerda con la tangente al óvalo.

Este resultado se puede mejorar. En efecto, de la misma manera como se procedió anteriormente, aplicando el teorema de Bose, se demuestra que no sólo hay *dos* cuerdas con la propiedad mencionada, sino que hay por lo menos *cuatro*. Se puede, por tanto, enunciar:

Sobre cualquier óvalo, considerando todas las cuerdas de longitud constante $AB = h$, existen por lo menos cuatro de ellas tales que la perpendicular en su punto medio corta a la normal al óvalo en su extremo A , en el centro de curvatura del óvalo correspondiente al mismo punto.

Sobre cada cuerda AB de longitud constante h tomemos un segmento $AX = \lambda h$, siendo λ un factor constante. Según (1.7) y (4.1) el área limitada por la curva descrita por el punto X valdrá

$$\Phi = F - \pi h^2 \lambda (1 - \lambda). \quad (4.3)$$

Si llamamos $AX = a$, $XB = b$ a los segmentos en que queda dividida la cuerda AB por el punto X , será $\lambda = a/h$, $h - a = b$ y por tanto, según (4.3),

$$|\Phi - F| = \pi ab. \quad (4.4)$$

Esta igualdad es la expresión del llamado teorema de Holditch⁽³⁾ que se enuncia: si todas las cuerdas de longitud constante $AB=h$ de una curva cerrada C se dividen por un punto X en dos partes tales que $AX=a$, $XB=b$, el área comprendida entre la curva C y la curva descrita por el punto X vale πab , cualquiera que sea la curva C .

5. *Curvas paralelas interiores de un óvalo.* Consideremos ahora el caso de ser C un óvalo, o sea, una curva convexa cerrada y con radio de curvatura continuo en cada punto. Si $\vartheta = \pi/2$ y $h = \text{cte.}$ el lugar geométrico descrito por el extremo del segmento h que no se apoya en C es la curva paralela interior a C a distancia h .

Para estudiar la forma de estas curvas paralelas interiores, busquemos su radio de curvatura R . Las ecuaciones (1.3), para $\vartheta = \pi/2$ se escriben

$$X = x - h \operatorname{sen} \tau, \quad Y = y + h \operatorname{cos} \tau \quad (5.1)$$

y aplicando la fórmula

$$R = \frac{(X'^2 + Y'^2)^{3/2}}{X'Y'' - Y'X''}$$

que da el radio de curvatura de una curva plana dada por sus ecuaciones paramétricas y teniendo en cuenta (1.2), resulta después de simples transformaciones

$$R = \rho - h. \quad (5.2)$$

Sean ρ_m y ρ_M los valores mínimo y máximo respectivamente de ρ . La expresión (5.2) nos dice que si h es menor que ρ_m o mayor que ρ_M , el radio de curvatura R tiene signo constante y por tanto la curva paralela, siendo una curva ce-

(3) Ver por ej. CH. J. DE LA VALLÉE POUSSIN, *Cours d'Analyse Infinimentimale*, Tomo I, 3ª ed., pág. 366.

El teorema fué publicado como cuestión propuesta por Holditch, utilizando el pseudónimo de *Petrarch*, en la publicación inglesa *Lady's and Gentleman's Diary* correspondiente al año 1858. La primera solución fué dada por Woolhouse y una generalización del problema al caso en que la longitud h fuera variable fué dada por E. B. ELLIOT en el *Messenger of Mathematics*, 1878.

rrada con radio de curvatura de signo constante y tal que el ángulo de la tangente con una dirección fija varía de 0 a 2π , es también una curva convexa.

En cambio si h está comprendido entre ρ_m y ρ_M , o sea $\rho_m \leq h \leq \rho_M$, la curva paralela tendrá puntos de retroceso ($R=0$) y además puede tener puntos dobles. La fig. 2 representa un

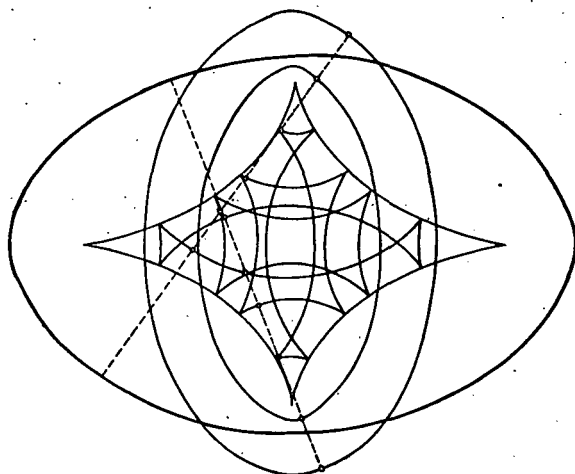


Fig 2

ejemplo de cómo van variando las curvas paralelas interiores de un óvalo C , al variar la distancia h .

Mientras $h < \rho_m$, la curva paralela interior a C es otro óvalo tal que en puntos correspondientes tiene la convexidad del mismo sentido que C , pues R y ρ son del mismo signo. En cambio, para $h > \rho_M$, los radios de curvatura R y ρ son de signos opuestos y por tanto el óvalo C y su paralelo interior a distancia h tienen, en puntos homólogos, las convexidades de sentidos opuestos. En todos los casos, según (5.2) es $\rho - R = h$; cuando $h > \rho_M$, como R es de signo opuesto a ρ , resulta que el óvalo C y su paralelo se corresponden de manera que la distancia entre puntos homólogos es igual a h y la suma de los radios de curvatura en los mismos es también igual a h .

6. *Desigualdades isoperimétricas.* Aún en los casos en que h está comprendido entre ρ_m y ρ_M y por tanto la curva para-

lela puede cruzarse a sí misma, el área limitada por la misma sigue definiéndose por la fórmula (1.7), que siendo $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ y $h = \text{cte.}$ se escribe

$$\Phi = F - Lh + \pi h^2. \quad (6.1)$$

Evidentemente, tanto para h suficientemente pequeño, como para h suficientemente grande es $\Phi > 0$. Ya no es tan inmediato y en cambio es muy interesante observar que para valores de h comprendidos entre ciertos límites, cualquiera que sea el óvalo C , es $\Phi \leq 0$.

Para verlo tomemos un sistema de ejes coordenados x, y tales que las dos tangentes al óvalo C paralelas al eje y corten al eje x en dos puntos simétricos de abscisas $\pm D$. La anchura de C en la dirección del eje y , o sea, la distancia entre las dos tangentes paralelas a la misma dirección, será $2D$. Con esto se ha logrado que en las ecuaciones (1.1) de C sea siempre

$$|x| \leq D. \quad (6.2)$$

Entonces según (1.6) y (1.2), tomando $h = D$, $\vartheta = \pi/2$, es

$$\Phi(D) = \int_0^L (x \operatorname{sen} \tau - D) ds + \pi D^2. \quad (6.3)$$

Siendo $|x| \leq D$, de la identidad

$$(D - x \operatorname{sen} \tau)^2 = (D^2 - x^2) \cos^2 \tau + (D \operatorname{sen} \tau - x)^2 \quad (6.4)$$

se deduce

$$D - x \operatorname{sen} \tau \geq \sqrt{D^2 - x^2} \cos \tau, \quad (6.5)$$

y por tanto, siendo $\cos \tau ds = dx$, y teniendo en cuenta que al recorrer s todo el óvalo C , la abscisa x recorre dos veces el intervalo $-D, +D$, de (6.5) y (6.3) se deduce

$$\Phi(D) \leq \pi D^2 - 2 \int_{-D}^{+D} \sqrt{D^2 - x^2} dx = 0. \quad (6.6)$$

Como la anchura $2D$, eligiendo convenientemente los ejes coordenados, es cualquier anchura de C , resulta: *siendo $2D$ una anchura cualquiera de C , según (6.1) y (6.6), se verifica*

$$F - LD + \pi D^2 \leq 0. \quad (6.7)$$

Esta es una desigualdad muy conocida y notable debida a T. BONNESEN⁽⁴⁾.

Observando la identidad

$$F - LD + \pi D^2 = \left(F - \frac{L^2}{4\pi}\right) + \pi \left(\frac{L}{2\pi} - D\right)^2$$

la desigualdad (6.7) nos dice

$$L^2 - 4\pi F \geq 4\pi^2 \left(\frac{L}{2\pi} - D\right)^2.$$

Escribiendo esta desigualdad para la semianchura máxima D_M de C y para su semianchura mínima D_m , se tiene

$$L^2 - 4\pi F \geq 4\pi^2 \left(D_M - \frac{L}{2\pi}\right)^2, \quad L^2 - 4\pi F \geq 4\pi^2 \left(\frac{L}{2\pi} - D_m\right)^2.$$

Sumando miembro a miembro estas desigualdades y observando que cualesquiera que sean los números m, n es siempre

$$\frac{m^2 + n^2}{2} \geq \left(\frac{m+n}{2}\right)^2 \quad (6.8)$$

resulta

$$L^2 - 4\pi F \geq \pi^2 (D_M - D_m)^2; \quad (6.9)$$

que es una clásica desigualdad isoperimétrica debida también a BONNESEN⁽⁵⁾.

Ella expresa que dada el área F de un óvalo, la mínima longitud es $L = 2\sqrt{\pi F}$. Además, para que sea $L = 2\sqrt{\pi F}$, debe

(4) Ver T. BONNESEN, *Les problèmes des isopérimètres et des isépiphanes*, Gauthier-Villars, París, 1929, pág. 61.

(5) Loc. cit. pág. 79.

valer el signo igual en (6.5) y por tanto, según (6.4) debe ser $x = D \operatorname{sen} \tau$. Los únicos óvalos para los cuales esta condición se cumple son las circunferencias. En efecto, siendo $\tau = \operatorname{arctg} y'$, la condición $x = D \operatorname{sen} \tau$ se escribe

$$x = \frac{Dy'}{\sqrt{1+y'^2}}, \text{ o sea, } y' = \frac{x}{\pm \sqrt{D^2 - x^2}}.$$

Integrando resulta $x^2 + (y - \beta)^2 = D^2$, que representa todos los círculos de radio D con el centro en el eje y .

Otras desigualdades isoperimétricas se obtienen observando que se puede escribir también la identidad

$$F - LD + \pi D^2 = \frac{D^2}{4F} \left[\left(L - \frac{2F}{D} \right)^2 - (L^2 - 4\pi F) \right]$$

y por tanto, según (6.7), debe ser

$$L^2 - 4\pi F \geq \left(L - \frac{2F}{D} \right)^2 \quad (6.10)$$

que es otra desigualdad isoperimétrica, válida para cualquier D comprendido entre D_m y D_M . En particular escribiendo la desigualdad anterior para D_m y D_M , se tiene

$$L^2 - 4\pi F \geq \left(L - \frac{2F}{D_m} \right)^2, \quad L^2 - 4\pi F \geq \left(\frac{2F}{D_m} - L \right)^2.$$

Sumando estas desigualdades miembro a miembro y aplicando (6.8) al segundo miembro, resulta

$$L^2 - 4\pi F \geq F^2 \left(\frac{1}{D_m} - \frac{1}{D_M} \right)^2 \quad (6.11)$$

Por las mismas razones que para (6.9) el signo de igualdad en (6.10) o en (6.11) vale únicamente para el caso de ser C un círculo.

7. Lugar geométrico de los puntos que son centros de círculos de radio dado que contienen un óvalo C . Sean, como antes,

ρ_m y ρ_M los valores mínimo y máximo, respectivamente, del radio de curvatura ρ de C . En la hipótesis de ser $h > \rho_M$, que-remos hallar *el área llenada por los puntos que son centros de círculos de radio h que contienen a C en su interior.*

Por cada punto A de C tracemos la normal y tomemos hacia el interior de C un segmento AO de longitud h . El círculo de centro O y radio h será tangente a C en A y siendo $h > \rho_M$, es sabido y es fácil demostrar que contiene a C en su interior. Al variar A sobre C , el punto O describe la curva paralela interior de C a distancia h , curva que siendo $h > \rho_M$ hemos visto que es convexa y cuya área, según (1.7), vale

$$\phi = F - Lh + \pi h^2. \quad (7.1)$$

Vamos a demostrar que esta área es precisamente la buscada. En primer lugar se observa que si dos puntos son centros de círculos de radio h que contienen a una curva convexa C , cualquier punto del segmento que une los dos puntos es también centro de un círculo del mismo radio h que contiene a C . Por tanto, siendo la curva de área ϕ convexa y siendo todos sus puntos centros de círculos de radio h que contienen a C , todos sus puntos interiores gozarán de la misma propiedad. Falta demostrar que cualquier punto O_1 que sea centro de un círculo de radio h que contiene a C , está contenido en ϕ . En efecto, si este círculo de radio h y centro O_1 es tangente a C , uniendo O_1 con el punto de contacto A_1 se tiene que $O_1A_1 = h$ es normal a C y por tanto O_1 forma parte de la curva que limita ϕ . Si el círculo de radio h y centro O_1 no es tangente a C , tracemos por O_1 una recta cualquiera; moviendo O_1 sobre esta recta en uno y otro sentido, a ambos lados se encontrará un punto que será centro de un círculo de radio h tangente a C . Estos dos puntos pertenecen a la curva paralela a C a distancia h y por ser esta curva convexa, el punto O_1 será interior a ella.

Se tiene por tanto demostrado que: *el lugar geométrico de los puntos del plano que son centros de círculos de radio $h > \rho_M$ que contienen al óvalo C , está limitado por la curva convexa paralela interior de C a distancia h y su área vale $F - Lh + \pi h^2$.*

8. *Unas acotaciones superiores del déficit isoperimétrico.*
Siendo L la longitud de una curva convexa cerrada C y F el

área que ella limita, a la diferencia $L^2 - 4\pi F$, que hemos visto es siempre ≥ 0 , se le llama «déficit isoperimétrico» de la curva C . Vamos a obtener algunas expresiones que acotan superiormente este «déficit».

Para $h \leq \rho_m$, la curva paralela interior a C a distancia h , es convexa y su área está dada por la expresión (7.1). Como para $h=0$, es $\phi = F \geq 0$, por continuidad y siempre con la condición $h \leq \rho_m$, será también $\phi \geq 0$ y por tanto

$$F - L\rho_m + \pi\rho_m^2 \geq 0. \quad (8.1)$$

Análogamente, para $h \geq \rho_m$, el área (7.1) que acabamos de ver es igual al área cubierta por los puntos que son centros de círculos de radio h que contienen a C , es también ≥ 0 . Por tanto

$$F - L\rho_m + \pi\rho_m^2 \geq 0. \quad (8.2)$$

Observando la identidad

$$F - L\rho + \pi\rho^2 = \frac{\rho^2}{4F} \left[\left(L - \frac{2F}{\rho} \right)^2 - (L^2 - 4\pi F) \right],$$

las desigualdades (8.2) y (8.1) se pueden escribir

$$L^2 - 4\pi F \leq \left(L - \frac{2F}{\rho_m} \right)^2, \quad L^2 - 4\pi F \leq \left(\frac{2F}{\rho_m} - L \right)^2 \quad (8.3)$$

que son dos acotaciones superiores del déficit isoperimétrico.

Colocando un círculo de radio ρ_m tangente a C en cualquier punto, de un mismo lado de la tangente, el círculo contendrá a C y por tanto $2\pi\rho_m \geq L$, de donde

$$L - \frac{2F}{\rho_m} \geq L - \frac{4\pi F}{L}$$

expresión que, según la desigualdad isoperimétrica, es ≥ 0 .

Análogamente, colocando tangente a C en cualquier punto un círculo de radio ρ_m de un mismo lado de la tangente, el círculo queda totalmente interior a C y por tanto $L \geq 2\pi\rho_m$, lo

cual, teniendo en cuenta la desigualdad isoperimétrica, nos dice que

$$\frac{2F}{\rho_m} - L \geq 0.$$

Según esto, multiplicando las desigualdades (8.3) y teniendo en cuenta que la media geométrica es siempre igual o menor que la media aritmética, resulta

$$L^2 - 4\pi F \leq F^2 \left(\frac{1}{\rho_m} - \frac{1}{\rho_M} \right)^2$$

que es otra desigualdad que limita superiormente el déficit isoperimétrico.

Todavía se pueden obtener otras acotaciones, observando la identidad

$$F - L\rho + \pi\rho^2 = \frac{1}{4\pi} [(L - 2\pi\rho)^2 - (L^2 - 4\pi F)].$$

De aquí se deduce, según (8.1) y (8.2)

$$L^2 - 4\pi F \leq (L - 2\pi\rho_m)^2, \quad L^2 - 4\pi F \leq (2\pi\rho_M - L)^2.$$

Multiplicando miembro a miembro estas desigualdades y aplicando al segundo miembro que la media geométrica es igual o menor que la media aritmética resulta

$$L^2 - 4\pi F \leq \pi^2 (\rho_M - \rho_m)^2$$

lo cual es una conocida desigualdad de O. Bottema⁽⁶⁾.

Luis A. Santaló

BOSARIO, INSTITUTO DE MATEMÁTICA.

(6) O. BOTTEMA, *Eine obere Grenze für das isoperimetrische Defizit ebenen Kurve*, Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. Tomo 36, 1933, pág. 442-446.

Ver también BONNESEN-FENCHEL, loc. cit., pág. 83.