Separata de *MATHEMATICAE NOTAE*
UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL
ROSARIO — REPUBLICA ARGENTINA
Volumen I — Año 1962

LA OBRA CIENTIFICA DE BEPPO LEVI

POR

LUIS A. SANTALÓ

Aparece Beppo Levi en el campo de la matemática a fines del siglo pasado, en la Italia iluminada por los resplandores de la generación ilustre de grandes matemáticos que inmediatamente le precedieron: Dini, Arzelá y Volterra en el análisis; Beltrami y Bianchi en la geometría diferencial; Cremona, Veronese y Corrado Segre en la geometría algebraica; Peano en la lógica matemática, para no citar más que algunos de los más prominentes. Es bajo la influencia, directa o indirecta, de estos maestros, que otra generación no menos insigne de matemáticos sigue dando brillo al pensamiento italiano finisecular: Levi-Civita, Enriques, Castelnuovo, Severi, Beppo Levi. Se ha dicho que la matemática, para florecer, necesita del abono que sedimenta la confluencia de tendencias diversas. La exclusividad la asfixia; la uniformidad la destruye. En este sentido, el clima no podía ser más propicio. Todas las ramas de la matemática estaban representadas de manera excelente, y no menos lo fueron los frutos.

En el momento en que Beppo Levi terminó sus estudios de licenciatura, la geometría algebraica, iniciada por Cremona, estaba en su apogeo. La síntesis de la tradición algebraica de la Italia renacentista (Tartaglia, Cardano, Bombelli) con la proverbial intuición geométrica de todos los pueblos bañados por el Mediterráneo, estaba produciendo frutos insospechados. Es natural, pues, que las lecciones de Corrado Segre, llenas de novedades y promesas, prendieran en el ánimo del joven estudioso y hacia la geometría algebraica dirigiera sus primeros esfuerzos.

Fue primero su tesis doctoral sobre la variedad de las cuerdas de una curva algebraica, donde ya demuestra su ingenio y profundidad, y casi simultáneamente, en 1897-98, publica dos memorias famosas sobre la resolución de las singularidades puntuales de las superficies algebraicas. Con ellas Beppo Levi pasa a ser conocido como matemático de primera fila: resuelve un problema en el que habían fracasado o llegado tan sólo a resultados parciales, Halphen, del Pezzo y otros matemáticos de fama. No hay trabajo que trate de las singularidades de las superficies algebraicas en que el nombre de Beppo Levi no aparezca como pionero en tan ardua y difícil cuestión. Durante cuatro o cinco años, Beppo Levi se dedica a la geometría algebraica, complementando en varias notas sus resultados fundamentales y tratando otros problemas más o menos vinculados con los mismos (1).

A principios del siglo actual, entre 1902 y 1906, aparece en el campo de la matemática el promisorio filón de las funciones reales. Borel y Lebesgue, prosiguiendo y complementando la obra genial de Cantor sobre los conjuntos, introducen la teoría de la medida y nuevos conceptos de integral. Beppo Levi, con su inquietud constante para "entender", para "buscar la luz interior que dan las teorías a quien las crea" —para decirlo con sus mismas palabras— es de los primeros en enrolarse en la nueva corriente. Y así empieza su obra como analista.

Estudia las propiedades de las funciones derivadas y entre sus resultados se encuentra un teorema devenido clásico: el número de puntos angulosos de una función continua es numerable (2). En la teoría de la integral de Lebesgue, que es tal vez el primero en introducir en Italia, da en 1906 otro teorema cuya paternidad le es también universalmente reconocida: para toda sucesión monótona de funciones, si es convergente, el límite de su integral (en el sentido de Lebesgue) es igual a la integral del límite.

De la misma época son dos memorias famosas sobre el "principio de Dirichlet", en las cuales la aplicación de las nuevas ideas le permite resolver de manera muy general y nueva el problema de la existencia, tradicionalmente difícil. En esta memoria introduce los espacios de funciones de clase L^2 cuyas derivadas son también de clase L^2, espacios que cuarenta años después, fenómeno común

(1) Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften, III *C* 6 *a* (pág. 641), III *C* 7 nº 24 (pág. 881).

(2) Encyklopädie der Math. Wiss. II *C* 9 *l* (pág. 1096-97).

en la matemática, resucitan con bríos en la escuela francesa y son conocidos actualmente como "espacios de Beppo Levi" ([3]).

Dentro del campo del análisis ha quedado también conocida por el nombre de su autor la llamada "desigualdad de Beppo Levi" que puede expresarse así ([4]) : Si M es un subespacio del espacio euclidiano R y x es un vector de R que dista d de M, para dos vectores cualesquiera y_1, y_2 de M vale la desigualdad

$$|y_1 - y_2| \leqslant \sqrt{|x - y_1|^2 - d^2} + \sqrt{|x - y_2|^2 - d^2}$$

Tal vez porque la teoría de funciones reales significó una revisión de los fundamentos, en la misma época Beppo Levi se ocupa de la teoría de conjuntos, fundamentos de la geometría, geometrías finitas y otros temas de fundamentación matemática. El famoso "postulado de Zermelo" se encuentra ya explícito en un trabajo de Levi ([5]) prioridad reconocida por varios autores ([6]).

([3]) Ver, por ejemplo, DENY LIONS, *Les espaces du type de Beppo Levi*, Annales de l'Institut Fourier, vol. V, 1953-54, p. 305-370.

([4]) Puede verse, por ejemplo, en M. A. NEUMARK, *Normierte Algebren*, Berlin, 1959, pág. 99.

([5]) *Intorno alla teoria degli aggregati*, Rend. R. Ist. Lombardo di Sc. e Lett. (2), vol. 35, 1902.

([6]) Por ejemplo A. A. FRAENKEL en *Foundations of Set Theory*, pág. 47, dice "En 1902 Beppo Levi al tratar el teorema según el cual el conjunto suma de un conjunto disjunto t de conjuntos no vacíos tiene un número cardinal mayor o igual que el cardinal de t, observa que su demostración depende de la posibilidad de seleccionar un elemento en cada elemento de t" y en una nota al pie de la pág. 48 añade: "De acuerdo con una carta de F. Bernstein, alrededor de 1901, en ocasión en que G. Cantor y F. Bernstein intentaban construir una correspondencia biunívoca entre el continuo y el conjunto de todos los órdenes numerales (que tiene el cardinal del continuo), Beppo Levi propuso vencer la dificultad que encontraban introduciendo el principio de elección, que formuló de manera general".

E. W. BETH en *The foundations of Mathematics*, pág. 376, dice: "En 1904, E. Zermelo consiguió probar el teorema de la buena ordenación (que afirma la existencia de una buena ordenación para cualquier conjunto). En su demostración usa el axioma de elección sobre el cual Erhard Schmidt le había llamado la atención. En 1890 este axioma había sido ya indicado y aplicado incidentalmente por G. Peano, pero tan sólo en 1902 Beppo Levi señaló que se trata de un principio de demostración independiente".

W. SIERPINSKI en *Cardinal and Ordinal algebras*, pág. 109, dice "En 1902, es decir, pocos años antes que E. Zermelo anunciara el axioma de elec-

Al entrar en la segunda década del siglo, en parte por las condiciones derivadas de la primera gran guerra mundial y en parte por la inquietud constante de Beppo Levi para extender su campo de acción y buscar nuevos horizontes, abandonando los terrenos en que tan profundos surcos dejara a su paso, tiene lugar un paréntesis en su producción científica. Durante el mismo, sin embargo, publica un libro en el que condensa su experiencia de profesor y su visión de futuro de la matemática. Se titula *Introduzione all'Analisi Matematica* (1916). Libro poco conocido, tal vez debido al momento en que apareció, poco propenso a la especulación abstracta, pero de importante significado. Se trata de un libro poco común en su época, concebido desde el punto de vista de lo que varios años más tarde se llamó el Algebra Moderna. Se hace el análisis algebraico para un cuerpo general. Dice en el prólogo:

"Contra la tradición de tratar en el álgebra elemental exclusivamente los números reales y complejos, lo que obliga a empezar con fatigosas páginas sobre la noción de número real y sus operaciones, he preferido empezar con la noción general de "campo numérico". Considero a los polinomios no como funciones racionales enteras, sino como símbolos que definen un particular campo numérico. Se hace el lugar debido a la noción de "módulo" de elementos. Muy pronto se introduce la noción de número complejo con cualquier número de unidades..., creo que con todo ello la mayor generalidad conduce a una mayor simplicidad y rigor".

La idea de espacio vectorial, la discusión de los sistemas de ecuaciones lineales como representantes de subespacios lineales, anillos de matrices y otros muchos conceptos que si bien flotaban en el ambiente eran tan sólo utilizados de manera esporádica, aparecen por primera vez sistematizados y utilizados en una exposición conjunta de carácter didáctico. En este sentido, el *Analisi Matemática* de Levi es un verdadero precursor de la hoy clásica *Moderne Algebra* de van der Waerden (1930).

En el tercer decenio del siglo, la matemática presenta pocas novedades. En cambio la física entra en el torbellino de la mecánica

---

ción, Beppo Levi observó que en general no se puede demostrar que la suma S de conjuntos no vacíos disjuntos formando un conjunto Z de conjuntos, tiene potencia igual o mayor que Z y que ello se puede demostrar en todos los casos en que se pueda distinguir un elemento en cada uno de los conjuntos que constituyen Z".

ondulatoria. El espíritu de Beppo Levi, ávido de novedades, entra en resonancia y se dedica a analizar sus fundamentos y consecuencias. Publica al respecto algunas notas y dos hermosos libritos: *Nuove teorie della Meccanica quantistica* y *Fondamenti della logica e fondamenti della meccanica quantistica* (Anuari scientifico-industriale, A-63 y A-64, 1926 y 1927 respectivamente). De esta época data su interés por la física, que no había de perder en toda su vida, publicando de cuando en cuando contribuciones al respecto.

En 1937 publica otro libro, de título parecido al antes mencionado, a saber, *Analisi Matematica Algebraica e Infinitesimale*, pero de contenido muy diferente. Es un libro de corte clásico, pero cuyo abundante contenido, dentro del tamaño, lo hacen un ejemplo de precisión y concisión.

En 1939 Beppo Levi se traslada a la Argentina. Comienza la etapa de su labor como organizador y sembrador de ideas en terreno virgen, pero ávido de producir. Funda *Mathematicae Notae*, revista a la que dedica todos sus afanes y cuidados y en cuyos diecisiete volúmenes aparecidos hasta su fallecimiento hay que buscar prácticamente toda su producción de sus años en Rosario. Producción variada, en la que salta de un capítulo a otro de la matemática y de temas de estricta especialización a consideraciones globales de índole filosófica o de unificación del pensamiento. A este último respecto es muy interesante, por reflejar toda la filosofía que encierra la matemática según Levi, su libro *Leyendo a Euclides* (1947).

Fue una vida completa: trabajó hasta los últimos meses. Siempre con su portafolio, con memorias para leer y manuscritos con los problemas en que estaba trabajando. Mente inquieta, de ideas claras. Su ideal era encontrar palabras que expresaran sus ideas fielmente, tal como él las concebía. Nunca estaba conforme con la redacción de sus escritos, que rompía y volvía a escribir varias veces hasta darles la forma precisa y exacta que siempre tuvieron. A este respecto cabría recordar las frases atribuídas a Lope de Vega, prodigio de improvisadores refiriéndose posiblemente a él mismo: "Yo conocí a un poeta de maravilloso natural, y borraba tanto que sólo él entendía sus escritos, y era imposible copiarlos; y ríete, Laurencio, de poeta que no borra".

Fue, en cuanto a su producción matemática, revolucionario en su juventud y conservador en los últimos años. No veía con gusto la matemática moderna que él mismo había contribuído a crear. En su opinión la matemática no debe escapar de la naturaleza: debe ser una ciencia natural y los problemas deben proceder de la misma. De aquí su evolución hacia la física y aún hacia la técnica, tan marcada en sus últimos años.

Para resumir en pocas, pero explícitas palabras, lo que fue Beppo Levi en su aspecto científico, como cultor eximio de la ciencia matemática, tal vez no haya manera más elocuente ni más exacta que decir que su vida fue la fiel consecuencia de unas palabras que él mismo dijo y escribió hace años, al asumir la dirección del Instituto de Matemáticas de Rosario: "Y yo pienso que, para la ciencia, hay que temer como una enfermedad el ir buscando una justificación fuera de sí misma, así como hay que temer en el hombre la pregunta del fin, del ¿para qué? de la vida. Ustedes saben cuanta filosofía desesperada se halla en el fondo de esta pregunta; y sin embargo se vive por el amor a la vida, por el amor a los hijos, por el amor a la humanidad. Así es para la ciencia: las teorías valen por la luz interior que han dado a quien las creó, valen por la luz que dan todavía a quien las estudia. No importa que esta luz pueda derivar de una pregunta del entendimiento puro o de una de la ciencia aplicada. El fin de la vida es la vida digna y el fin de la ciencia es la ciencia digna; mas el juicio de la dignidad sale sólo de nuestra conciencia; por lo cual están igualmente lejanas de la verdad ambas fórmulas: la de la ciencia para la práctica y la de la ciencia para la ciencia".

La obra de Beppo Levi queda para la matemática. Pero el hombre, con sus enseñanzas, con su ejemplo de trabajo y perseverancia, con, si se quiere, sus contradicciones tan frecuentes por su gusto en adoptar las posiciones extremas para así mejor hacer resaltar su bien definido pensamiento, desaparece.

Quienes lo hemos conocido íntimamente, quienes hemos tenido el honor y el placer de trabajar con él durante largos años, guardaremos siempre junto con el recuerdo de la obra que queda para admirar, la nostalgia de la persona y del maestro en quien siempre encontramos el consejo prudente, la orientación precisa y la palabra alentadora.