Reg. 4.914

501
P92

PROCEEDINGS
OF THE
INTERNATIONAL CONGRESS
OF
MATHEMATICIANS
1954

Amsterdam

September 2—September 9

VOLUME II

ERVEN P. NOORDHOFF N.V., GRONINGEN
NORTH-HOLLAND PUBLISHING CO., AMSTERDAM
1954

A Rafael

F.

ON THE KINEMATIC FORMULA IN SPACES OF CONSTANT CURVATURE

LUIS A. SANTALÓ

Let Q_0, Q_1 be two compact orientable hypersurfaces imbedded in a space of constant curvature K of n ($\geqq 2$) dimensions. Let $M_i^{(\alpha)}$ ($i = 0, 1, \ldots, n-1$) be the integrated mean curvatures of Q_α ($\alpha = 1, 2$), i.e. if $S_i^{(\alpha)}$ are the *i-th* elementary symmetric functions of the $n-1$ principal curvatures of Q_α, we denote

$$M_i^{(\alpha)} = \binom{n-1}{i}^{-1} \int_{Q_\alpha} S_i^{(\alpha)} dA_\alpha$$

where dA_α is the element of area of Q_α. Let Q_0 be fixed and Q_1 be moving, and let dQ_1 be the kinematic density of Q_1. Let χ_α, $\chi(Q_0 \cap Q_1)$ be the Euler-Poincaré characteristic of Q_α and $Q_0 \cap Q_1$ respectively ($= 1$ if they are topological spheres). Then, the kinematic formula (the "principal formula" of the integral geometry) in spaces of constant curvature K is the following:

$$\int \chi(Q_0 \cap Q_1) dQ_1 = O_1 O_2 \ldots O_{n-1} \left(-\frac{2\varepsilon_n}{O_n} K^{n/2} V_0 V_1 + V_1 \chi_0 + V_0 \chi_1 \right) +$$

$$O_1 O_2 \ldots O_{n-2} \frac{1}{n} \sum_{h=0}^{n-2} \binom{n}{h+1} M_h^{(0)} M_{n-2-h}^{(1)} +$$

$$2 O_1 O_2 \ldots O_{n-2} \sum_{s=0}^{n-4} \frac{O_{n-s}}{O_s} M_s^{(0)} \left\{ \sum_{t=[(s-\varepsilon_n)/2]+1}^{(n-3-\varepsilon_n)/2} c_{stn} M_{2t+\varepsilon_n-s-1}^{(1)} \right\}$$

where V_0, V_1 are the volumes bounded by Q_0, Q_1, and

$$O_i = 2\pi^{(i+1)/2} / \Gamma((i+1)/2), \quad \varepsilon_n = \tfrac{1}{2}(1 + (-1)^n)$$

$$c_{stn} = \binom{n-1}{2t+\varepsilon_n} \binom{2t+\varepsilon_n}{s} \frac{O_{n+s-2t-\varepsilon_n+1}}{O_{2t+1+\varepsilon_n-s} O_{n-2t-\varepsilon_n} O_{n-2t-1-\varepsilon_n}} K^{(n-2t-1-\varepsilon_n)/2}.$$

The integration is extended over all positions of Q_1. For $K = 0$ this formula gives that of Blaschke-Chern (Am. J. Math. **74**, 227—236, 1952).

The formula contains a great deal of particular cases:

a. If Q_1 is a geodesic hypersphere of radius ϱ, we have $M_i^{(1)} = O_{n-1} K^{i+1-n} \sin^{n-1-i} \sqrt{K}\varrho \cos^i \sqrt{K}\varrho$ and the formula gives, after division by $O_1 O_2 \ldots O_{n-1}$, the volume of the parallel body to Q_0 at distance ϱ (generalized Stainer's formula).

b. If $K = 1$, to the body bounded by Q_0 corresponds the "dual" body Q_0^* bounded by the hypersurface parallel to Q_0 at distance $\pi/2$. The volume of

Q_0^* results

$$V_0^* = \tfrac{1}{2}\, O_n - (1-\varepsilon_n) V_0 - \sum_{i=1}^{(n-1+\varepsilon_n)/2} \binom{n-1}{2i-1} \frac{O_n}{O_{n-2i}\, O_{2i-1}} M_{n-2i}^{(0)}.$$

c. If Q_1 degenerates in a linear variety of dimension r ($> O$), if we denote by dL_r the density for such linear spaces, the formula gives

$$\int \chi(Q_0 \cap L_r)\, dL_r = \frac{O_{n-2}\, O_{n-3} \ldots O_{n-r}}{O_1 O_2 \ldots O_r} \Bigg\{ \varepsilon_r K^{r/2} O_{n-1} V_0 +$$

$$+ \sum_{i=\varepsilon_r}^{(r-1+\varepsilon_r)/2} \binom{r-1}{2i-\varepsilon_r} \frac{O_r\, O_{r-1}\, O_{n-2i+\varepsilon_r}}{O_{2i-\varepsilon_r}\, O_{r-2i-1+\varepsilon_r}\, O_{r-2i+\varepsilon_r}} K^{(r-2i-1+\varepsilon_r)/2} M_{2i-\varepsilon_r}^{(0)} \Bigg\}$$

where the integral is extended over all L_r of the space.

COCHABAMBA 780 DEP. 11,
BUENOS AIRES (ARGENTINA).

PROJEKTIV-GEOMETRISCHE SÄTZE ÜBER LINEARE PARTIELLE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN 2. ORDNUNG

ROBERT M. F. SAUER

Die homogene lineare Differentialgleichung 2. Ordnung, welche die gesuchte Funktion $f(x, y)$ nicht explizit enthält ($\alpha f_{xx} + 2\beta f_{xy} + \gamma f_{yy} + \varrho f_x + \sigma f_y = 0$) lässt sich stets auf die Normalform $L[f] \equiv af_{xx} + 2bf_{xy} + cf_{yy} = 0$ bringen. Für die Lösungen $f(x, y)$ dieser Differentialgleichung $L[f] = 0$ mit $f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 \neq 0$ und die durch Legendre-Transformation ($\xi = f_x$, $\eta = f_y$, $\varphi(\xi, \eta) = x\xi + y\eta - f$, $x = \varphi_\xi$, $y = \varphi_\eta$) zugeordneten Lösungen der quasilinearen Differentialgleichung $\Lambda[\varphi] \equiv a\varphi_{\eta\eta} - 2b\varphi_{\eta\xi} + c\varphi_{\xi\xi} = 0$ gelten folgende geometrische Sätze:

1) Die Flächen f und φ sind dual-projektiv aufeinander bezogen. Ihre Punkte und Tangentialebenen entsprechen sich im Polarsystem des Paraboloids $2f = x^2 + y^2$. Infolgedessen bildet sich jedes konjugierte Kurvennetz und jede Asymptotenlinie der einen Fläche wieder in ein konjugiertes Kurvennetz und eine Asymptotenlinie der anderen Fläche ab.

2) Die Grundrisse entsprechender konjugierter Kurvennetze der Flächen f und φ sind reziprok-orthogonale Netze in den Ebenen $f = 0$ und $\varphi = 0$. Die Grundrisse der Asymptotenliniennetze sind gegenläufig-orthogonale Netze.

3) Im hyperbolischen Bereich $ac - b^2 < 0$ sind die Integralflächen f der Differentialgleichung $L[f] = 0$ diejenigen Flächen, für welche das Charakteristikennetz $a\,dy^2 - 2b\,dy\,dx + c\,dx^2 = 0$ der x, y-Ebene Grundriss eines konjugierten Kurvennetzes ist.