SOBRE LAS GEODESICAS DEL UNIVERSO DE GODEL-SYNGE

L. A. SANTALÓ
Académico Correspondiente
Universidad Nacional del Litoral (República Argentina)

1. Introducción

En 1949 Gödel [4] introdujo un nuevo tipo de universo relativista con características especiales, en particular la de presentar una rotación de la materia, lo que podría contribuir a explicar la forma en espiral de muchas nebulosas. Más propiedades de su universo fueron dadas poco después por el mismo Gödel [5] y relacionado con el mismo puede verse también el trabajo posterior de J. P. Wright [8].

El universo de Gödel es un espacio de Riemann cuyo elemento de arco puede escribirse en la forma

$$ds^2 = (d\xi_0 + e^{\xi_1} d\xi_2)^2 - d\xi_1^2 - \frac{1}{2} e^{2\xi_1} d\xi_2^2 - d\xi_3^2 \tag{1.1}$$

el cual puede comprobarse que satisface a las ecuaciones de la gravitación de Einstein con término cosmológico y densidad de materia constante.

En 1960, Synge, en su libro sobre la Relatividad General [7], estudia espacios de Riemann un poco más generales, definidos por un elemento de arco de la forma

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}\, dx_\alpha\, dx_\beta + g_{AB}\, dx_A\, dx_B \tag{1.2}$$

donde los índices griegos y los latinos mayúsculos van sumados, respectivamente, para los valores

$$\alpha, \beta, \gamma, \ldots = 1, 2, \quad A, B, C, \ldots = 3, 4. \tag{1.3}$$

Aunque en un principio Synge supuso que las $g_{\alpha\beta}$ podían ser funciones de x_3, x_4, para que los cálculos resulten practicables, hace en seguida las siguientes hipótesis:

HIPÓTESIS *a*).—*Las* $g_{\alpha\beta}$ *son solamente funciones de* x_4.

HIPÓTESIS *b*).—*Las* g_{AB} *son constantes.*

Estas hipótesis y las *c*), *d*) que veremos más adelante conducen a suponer que la primera forma cuadrática de (1.2) tiene signatura 0 y por tanto, para que (1.2) tenga signatura hiperbólica se puede tomar

$$g_{AB} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{1.4}$$

Las componentes no nulas del tensor fundamental contravariante resultan ser

$$g^{11} = \frac{g_{22}}{\Delta}, \quad g^{12} = -\frac{g_{12}}{\Delta}, \tag{1.5}$$

$$g^{22} = \frac{g_{11}}{\Delta}, \quad g^{33} = -1, \quad g^{44} = -1$$

siendo

$$\Delta = g_{11}\, g_{22} - g^2_{12}. \tag{1.6}$$

Llamaremos a los espacios cuyo elemento de arco es de la forma (1.2) con las hipótesis *a*), *b*) anteriores, universos de Gödel-Synge. El caso de Gödel corresponde al tensor

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & e^{x_4} \\ e^{x_4} & \frac{1}{2}\, e^{2\,x_4} \end{pmatrix}, \quad g^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -1 & 2\, e^{-x_4} \\ 2\, e^{-x_4} & -2\, e^{-2\,x_4} \end{pmatrix} \tag{1.7}$$

que da lugar a la forma (1.1) con sólo poner

$$x_1 = \xi_0, \quad x_2 = \xi_2, \quad x_3 = \xi_3, \quad x_4 = \xi_1.$$

S. Chandrasekhar y J. P. Wright [2] en 1961 encontraron que las ecuaciones de las geodésicas del universo de Gödel pueden ser integradas por cuadraturas, dando la forma explícita de sus ecuaciones paramétricas en función del arco.

Nuestro objeto es hacer un estudio análogo para las ecuaciones de las geodésicas del universo de Gödel-Synge. Veremos que para poder integrar las ecuaciones de dichas geodésicas hay que imponer a las $g_{\alpha\beta}$ sucesivas hipótesis c), d) que reducen el universo al tipo

$$ds^2 = dx^2_1 + 2h\,dx_1\,dx_2 + \frac{1}{2}h^2\,dx^2_2 - dx^2_3 - dx^2_4 \tag{1.8}$$

o sea

$$ds^2 = (dx_1 + h\,dx_2)^2 - \frac{1}{2}h^2\,dx^2_2 - dx^2_3 - dx^2_4 \tag{1.9}$$

siendo $h = h(x_4)$ una función de x_4. Esta forma (1.8) o (1.9) es muy parecida a la de Gödel (la cual corresponde a $h = e^{x_4}$), de manera que las sucesivas hipótesis a), b), c), d) hechas de manera natural para poder hacer manejables los cálculos necesarios, pueden considerarse como una justificación del elemento de arco de Gödel, a primera vista bastante artificial.

Daremos también (núm. 3) algunas propiedades de estos universos de Gödel-Synge, en particular su sumersión en el espacio pseudoeuclidiano de 10 dimensiones y signatura (5,5), de la cual se deduce inmediatamente la existencia de curvas de tiempo cerradas y, por tanto, que son universos no causales.

Finalmente, aplicaremos los resultados al caso particular de Gödel, encontrando de nuevo los resultados conocidos de Chandrasekhar-Wright [2].

2. Geodésicas de los universos de Gödel-Synge

Indicando con las notaciones usuales los símbolos de Christoffel de segunda especie y con una coma las derivadas parciales ordinarias, se encuentra fácilmente que para el elemento de arco de Gödel-Synge con las hipótesis *a*), *b*) anteriores, los únicos símbolos no nulos son

$$\left\{ \begin{matrix} 4 \\ \alpha \;\; \beta \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} g_{\alpha\beta,4}, \qquad \left\{ \begin{matrix} \beta \\ \alpha \;\; 4 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} g_{\alpha\gamma,4} g^{\beta\gamma} \tag{2.1}$$

con $\alpha, \beta, \gamma = 1, 2$.

Las ecuaciones de las geodésicas se escriben entonces (indicando por un punto la derivada respecto del arco s)

$$\dot{u}_1 + g_{\alpha\gamma,4} g^{1\gamma} u_\alpha u_4 = 0 \tag{2.2}$$

$$\dot{u}_2 + g_{\alpha\gamma,4} g^{2\gamma} u_\alpha u_4 = 0 \tag{2.3}$$

$$\dot{u}_3 = 0 \tag{2.4}$$

$$\dot{u}_4 + \frac{1}{2} g_{\alpha\beta,4} u_\alpha u_\beta = 0 \tag{2.5}$$

donde hemos puesto

$$u_\alpha = \frac{d x_\alpha}{d s}, \quad u_A = \frac{d x_A}{d s} \tag{2.6}$$

y por tanto se cumple

$$g_{\alpha\beta} u_\alpha u_\beta + g_{AB} u_A u_B = 1. \tag{2.7}$$

Al llegar aquí, para poder tratar este sistema de ecuaciones, eliminando u_1 entre (2.3) y (2.5), parece obligado hacer la nueva hipótesis:

Hipótesis *c*).—g_{11} *es constante, o sea,*

$$g_{11,4} = 0. \tag{2.8}$$

Con esto, el sistema de ecuaciones de las geodésicas se escribe:

$$\dot{u}_1 + g_{12,4}\, g^{12}\, u_1 u_4 + g_{21,4}\, g^{11}\, u_2 u_4 + g_{22,4}\, g^{12}\, u_2 u_4 = 0 \tag{2.9}$$

$$\dot{u}_2 + g_{21,4}\, g^{21}\, u_2 u_4 + g_{12,4}\, g^{22}\, u_1 u_4 + g_{22,4}\, g^{22}\, u_2 u_4 = 0 \tag{2.10}$$

$$\dot{u}_3 = 0 \tag{2.11}$$

$$\dot{u}_4 + g_{12,4}\, u_1 u_2 + \frac{1}{2}\, g_{22,4}\, u_2 u_2 = 0 \tag{2.12}$$

De estas ecuaciones resulta que las curvas en que varía únicamente una de las coordenadas x_1, x_3, x_4 son geodésicas, de acuerdo con un teorema de Eisenhart aplicado al elemento de arco de Gödel-Synge [3, pág. 58].

Consideremos primero las geodésicas con x_4 = constante, o sea $u_4 = 0$. Para ellas la ecuación (2.12) nos dice que si las funciones $g_{12,4}$, $g_{22,4}$ no son idénticamente nulas, debe ser también $u_2 = 0$, o sea, x_2 = constante. Las geodésicas son entonces las curvas x_4 = const., x_2 = const., $x_1 = a_1 s + b_1$, $x_3 = a_3 s + b_3$, con a_1, b_1, a_3, b_3 constantes de integración.

Dejando este caso de lado, podemos suponer que x_4 es variable a lo largo de las geodésicas y será cómodo expresar las ecuaciones de las mismas en función de esta variable como parámetro.

Suponiendo, por tanto, $u_4 \neq 0$, $u_2 \neq 0$, con el objeto de eliminar u_1, multiplicamos (2.10) por $(1/g^{22})\, u_2$ y (2.12) por u_4 y restamos, quedando

$$\dot{u}_4 u_4 - \frac{1}{g^{22}}\, u_2 \dot{u}_2 - \left(g_{21,4} \frac{g^{21}}{g^{22}} + \frac{1}{2}\, g_{22,4} \right) u^2_2 u_4 = 0. \tag{2.13}$$

El primer miembro de esta expresión, salvo el factor 2, es la derivada respecto de s de la expresión

$$u^2_4 - \frac{1}{g^{22}}\, u^2_2$$

puesto que (siendo g_{11} constante) es

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{g^{22}}\right) = \frac{d}{ds}\left(\frac{g_{11} g_{22} - g^2_{12}}{g_{11}}\right) = \frac{1}{g_{11}}\, (g_{11}\, g_{22,4} - 2\, g_{12}\, g_{12,4})\, u_4$$

o bien, siendo $g^{21}/g^{22} = - g_{12}/g_{11}$,

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{g^{22}}\right) = \left(g_{22,4} + 2\,\frac{g^{21}}{g^{22}}\,g_{12,4}\right) u_4 .$$

En consecuencia, la integral de (2.13) da la relación

$$u_4^2 - \frac{1}{g^{22}}\,u_2^2 = \mathrm{B}^2 = \text{constante.} \tag{2.14}$$

Habiendo supuesto g_{11} constante, por un cambio de coordenadas se puede suponer igual a la unidad, o sea, $g_{11} = 1$. Por comodidad, conviene cambiar la notación y vamos a poner

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & h \\ h & g \end{pmatrix}, \quad g^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} g/\Delta & -h/\Delta \\ -h/\Delta & 1/\Delta \end{pmatrix}, \quad \Delta = g - h^2. \tag{2.15}$$

Con esta nueva notación las ecuaciones (2.14) y (2.7) se escriben

$$u_4^2 - (g - h^2)\,u_2^2 = \mathrm{B}^2 \tag{2.16}$$

$$u_1^2 + 2\,h\,u_1\,u_2 + g\,u_2^2 - u_3^2 - u_4^2 = 1. \tag{2.17}$$

Tenemos, además, integrando (2.11)

$$u_3 = \mathrm{C} = \text{constante}, \quad x_3 = \mathrm{C}\,s + c_3. \tag{2.18}$$

La ecuación (2.17), teniendo en cuenta (2.16) y (2.18), se puede escribir

$$(u_1 + h\,u_2)^2 = 1 + \mathrm{B}^2 + \mathrm{C}^2 = \frac{1}{2}\,\mathrm{D}^2 \tag{2.19}$$

donde la nueva constante D la introducimos para seguir la notación de Chandrasekhar-Wright en [2]. De (2.19) se deduce que

$$\mathrm{D}^2 - \mathrm{B}^2 > 0 \tag{2.20}$$

relación que va a ser útil más adelante.

De (2.19) y (2.16) se deduce

$$u_1 = \frac{D}{\sqrt{2}} - h\,u_2 = \frac{D}{\sqrt{2}} - h\left(\frac{u^2_4 - B^2}{g - h^2}\right)^{1/2} \tag{2.21}$$

Indicando con un acento la derivada respecto de x_4, la ecuación (2.12) se escribe

$$\dot{u}_4 + h'\,u_1\,u_2 + \frac{1}{2}\,g'\,u^2_2 = 0 \tag{2.22}$$

o sea, según (2.21)

$$\dot{u}_4 + h'\left(\frac{D}{\sqrt{2}} - h\,u_2\right)u_2 + \frac{1}{2}\,g'\,u^2_2 = 0 \tag{2.23}$$

y aplicando (2.16)

$$\dot{u}_4 + h'\,\frac{D}{\sqrt{2}}\left(\frac{B^2 - u^2_4}{h^2 - g}\right)^{1/2} + \left(\frac{1}{2}\,g' - h\,h'\right)\frac{u^2_4 - B^2}{g - h^2} = 0. \tag{2.24}$$

Poniendo

$$u_4 = B \operatorname{sen} \theta \tag{2.25}$$

queda

$$B \cos\theta\,\dot{\theta} = -\frac{h'\,D}{\sqrt{2}}\,\frac{B}{(h^2 - g)^{1/2}}\cos\theta + \frac{h\,h' - g'/2}{h^2 - g}\,B^2 \cos^2\theta$$

de donde

$$\dot{\theta} = -\left[\frac{h'\,D}{\sqrt{2}\,(h^2 - g)^{1/2}} - \frac{h\,h' - g'/2}{h^2 - g}\,B \cos\theta\right] \tag{2.26}$$

Para poder integrar esta expresión de manera fácil, hacemos la última hipótesis siguiente:

HIPÓTESIS *d*).—*Se cumple la condición* $g = \frac{1}{2} h^2$.

Con esto, el elemento de arco del universo toma la forma (1.8) o (1.9). La relación (2.26) se escribe

$$\dot{\theta} = -\frac{h'}{h}(D - B\cos\theta) = -(D - B\cos\theta)\frac{dh}{h\, u_4\, ds} \tag{2.27}$$

de donde

$$d\theta = -\frac{D - B\cos\theta}{B \operatorname{sen}\theta}\frac{dh}{h} \tag{2.28}$$

y por tanto

$$D - B\cos\theta = \frac{K}{h} \tag{2.29}$$

siendo K una nueva constante de integración.

De (2.25) se deduce entonces

$$u_4 = \sqrt{B^2 - \left(D - \frac{K}{h}\right)^2} \tag{2.30}$$

y por tanto

$$\int_0^{x_4} \frac{dx_4}{\sqrt{B^2 - \left(D - \frac{K}{h}\right)^2}} = s - s_0. \tag{2.31}$$

Obsérvese que B, D, K son constantes y $h = h(x_4)$ es la función que define el elemento de arco (1.8) o (1.9). La constante K depende de $u_4(0)$, pues según (2.29) es

$$K = h(0)\left(D - \sqrt{B^2 - u^2_4(0)}\right) \tag{2.32}$$

Para hallar x_1 aplicamos (2.21), que según la hipótesis *d)* se escribe

$$u_1 = \frac{D}{\sqrt{2}} - \sqrt{2}\,h\left(\frac{B^2 - u^2_4}{h^2}\right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(D - 2\,B\cos\theta) \tag{2.33}$$

y según (2.29)

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{2\,K}{h} - D\right) \tag{2.34}$$

y por tanto, aplicando (2.31)

$$\frac{d\,x_1}{d\,x_4} = \frac{d\,x_1}{d\,s} : \frac{d\,x_4}{d\,s} = u_1\,\frac{d\,s}{d\,x_4} = \frac{\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\dfrac{2\,K}{h} - D\right)}{\sqrt{B^2 - \left(D - \dfrac{K}{h}\right)^2}}$$

de donde

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{x_4} \frac{\left(\dfrac{2\,K}{h} - D\right)}{\sqrt{B^2 - \left(D - \dfrac{K}{h}\right)^2}}\,d\,x_4. \tag{2.35}$$

Para x_2, según (2.16) y la hipótesis *d)*, tenemos

$$u^2_2 = \frac{1}{h^2 - g}\,(B^2 - u^2_4) = \frac{2}{h^2}\,(B^2 - u^2_4) \tag{2.36}$$

de donde

$$u_2 = \frac{\sqrt{2}}{h}\,B\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{h}\left(D - \frac{K}{h}\right) \tag{2.37}$$

De aquí, siendo $u_2 = d\,x_2/d\,s = (d\,x_2/d\,x_4)\,(d\,x_4/d\,s)$, aplicando (2.31) resulta

$$x_2 = \sqrt{2}\int_0^{x_4} \frac{\left(D - \frac{K}{h}\right)}{h\sqrt{B^2 - \left(D - \frac{K}{h}\right)^2}}\,d\,x_4. \tag{2.38}$$

Finalmente, para x_3, de (2.18) y (2.31) se deduce

$$x_3 = C\int_0^{x_4} \frac{d\,x_4}{\sqrt{B^2 - \left(D - \frac{K}{h}\right)^2}} \tag{2.39}$$

Hemos obtenido así x_1, x_2, x_3 como funciones de x_4. Se supone que para $x_4 = 0$, es $x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = 0$. Si se quieren, como hacen Chandrasekhar-Wright [2], las ecuaciones de las geodésicas en la forma $x_i = x_i(s)$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ debemos integrar primero (2.31) para tener $x_4 = x_4(s)$ y luego sustituir en las expresiones anteriores.

Geodésicas de longitud nula.—Suponiendo que x_4 no es constante y que puede tomarse como parámetro, la condición para que la curva $x_i = x_i(x_4)$ $(i = 1, 2, 3)$ sea geodésica de longitud nula es que sea

$$x_1'^2 + 2\,h\,x'_1\,x'_2 + \frac{1}{2}\,h^2\,x_2'^2 - x_3'^2 - 1 = 0 \tag{2.40}$$

donde los acentos indican derivadas respecto de x_4.

Teniendo en cuenta las ecuaciones (2.35), (2.38), (2.39), la ecuación (2.40) conduce a la condición

$$\frac{D^2}{2} - B^2 - C^2 = 0. \tag{2.41}$$

Esta es la condición que deben cumplir las constantes de integración que figuran en (2.31), (2.35), (2.38) y (2.39) para que ellas representen geodésicas de longitud nula. Obsérvese que para esto basta sustituir en (2.39) la constante C por su valor deducido de (2.41). Para el caso del universo de Gödel, estas geodésicas de longitud nula han sido estudiadas por M. Abdiel-Megied y G. Dautcourt [1].

3. La sumersión del universo de Gödel-Synge en un espacio pseudoeuclidiano

El elemento de arco

$$ds^2 = (d\,x_1 + h\,d\,x_2)^2 - \frac{1}{2}\,h^2\,d\,x_2^2 - d\,x_3^2 - d\,x_4^2 \tag{3.1}$$

puede sumergirse en el espacio pseudoeuclidiano de 10 dimensiones con la métrica

$$ds^2 = \sum_1^5 d\,z_i^2 - \sum_6^{10} d\,z_i^2 \tag{3.2}$$

mediante las fórmulas

$$\begin{aligned}
&z_1 = x_1, \quad z_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\,h\cos x_2, \quad z_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\,h\,\mathrm{sen}\,x_2 \\
&z_4 = \sqrt{2h}\cos\frac{1}{2}(x_1 + x_2), \quad z_5 = \sqrt{2h}\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{2}(x_1 + x_2), \\
&z_6 = x_3, \quad z_7 = x_4, \quad z_8 = \frac{1}{\sqrt{2}}\,h, \\
&z_9 = \sqrt{2h}\cos\frac{1}{2}(x_1 - x_2), \quad z_{10} = \sqrt{2h}\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{2}(x_1 - x_2)
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Para el universo de Gödel ($h = \exp(x_4)$) esta sumersión se encuentra en P. Rosen [6].

Observemos que las curvas en que varía únicamente x_2, según

(3.3), son curvas cerradas, y según (3.1) son curvas de tiempo (o sea, $d s^2 > 0$). Por tanto: *en el universo* (3.1), *en particular, en el universo de Gödel, las curvas en que varía únicamente* x_2 *son curvas de tiempo cerradas. Se trata, por tanto, de un universo no causal.*

Según un criterio de Eisenhart [3, pág. 58] puesto que el coeficiente de $d x^2_2$ en (3.1) no es constante, estas curvas cerradas en que varía únicamente x_2 no son todas geodésicas. Para ver si alguna de ellas puede serlo, veamos de satisfacer a las ecuaciones (2.9), ..., (2.12) para $x_1 =$ cte., $x_3 =$ cte., $x_4 =$ cte., o sea, para $u_1 = u_3 = u_4 = 0$. Las ecuaciones (2.9) y (2.11) se satisfacen idénticamente; la ecuación (2.10) nos dice que $x_2 = a s + b$ y la última (2.12) da la condición $g_{22,4} = 0$, o sea, $h h' = 0$. Si esta condición no se cumple, como en el caso de Gödel, no existen curvas en las que varíe únicamente x_2 y que sean geodésicas.

4. Las geodésicas del universo de Gödel

Vamos a aplicar los resultados anteriores al caso del universo de Gödel, para ver cómo ellos contienen a los resultados de Chandrasekhar-Wright [2].

Para el universo de Gödel es

$$h = e^{x_4} \tag{4.1}$$

y con este valor de h debemos calcular las integrales (2.31), (2.35), (2.38) y (2.39). Poniendo

$$y = \frac{1}{h} = e^{-x_4}, \quad d x_4 = -\frac{d y}{y} \tag{4.2}$$

y suponiendo que para $x_4 = 0$ es $s = 0$ (2.31) se escribe

$$s = -\int_1^y \frac{d y}{y \sqrt{-K^2 y^2 + 2 D K y + B^2 - D^2}} \tag{4.3}$$

Siendo $B^2 - D^2 < 0$ (según (2.20)) y $\Delta = -4\,K^2\,B^2 < 0$ esta integral vale

$$
s = -\frac{1}{\sqrt{D^2 - B^2}} \text{ arc sen } \frac{D\,K\,y + B^2 - D^2}{K\,B\,y} + \tag{4.4}
$$

$$
+ \frac{1}{\sqrt{D^2 - B^2}} \text{ arc sen } \frac{D\,K + B^2 - D^2}{K\,B}
$$

Introduciendo el nuevo parámetro σ por la ecuación

$$
s - \frac{1}{\sqrt{D^2 - B^2}} \text{ arc sen } \frac{D\,K + B^2 - D^2}{K\,B} = \frac{1}{\sqrt{D^2 - B^2}} \left(2\,\sigma + \frac{\pi}{2} \right) \tag{4.5}
$$

de (4.4) se deduce

$$
\cos 2\,\sigma = \frac{D\,K\,y + B^2 - D^2}{K\,B\,y} \tag{4.6}
$$

de donde

$$
y = \frac{D^2 - B^2}{K\,(D + B\cos 2\,\sigma)} = \frac{(D^2 - B^2)\,(1 + \tan^2\sigma)}{K\,(D + B + (D - B)\tan^2\sigma)} \tag{4.7}
$$

que se puede escribir

$$
y = \frac{D - B}{K} \; \frac{1 + \tan^2\sigma}{1 + \alpha\tan^2\sigma} \tag{4.8}
$$

donde hemos puesto

$$
\alpha = \frac{D - B}{D + B}\,. \tag{4.9}
$$

Según (4.1) y (4.2) la expresión (4.8) se puede escribir

$$
x_4 = \log \frac{1 + \alpha\tan^2\sigma}{1 + \tan^2\sigma} + \log \frac{K}{D - B} \tag{4.10}
$$

La constante K depende de $u_4(0)$ según (2.32). Chandrasekhar-Wright [2] se limitan al caso $u_4(0) = 0$, o sea, a geodésicas normales a las curvas x_4 (en el origen). En este caso es $K = D - B$ y desaparece en (4.10) la constante aditiva. Obsérvese, además, que el origen $x_4 = 0$ no corresponde a $\sigma = 0$; ello ocurre únicamente, según (4.5), si $DK + B^2 - D^2 = -KB$, o sea, $K = D - B$ y, por tanto, si $u_4(0) = 0$.

Vamos a calcular ahora x_1. La integral (2.35) se escribe en este caso

$$(4.11)\quad x_1 = -\sqrt{2}\int^{y} \frac{K\,dy}{\sqrt{-K^2y^2 + 2DKy + B^2 - D^2}} - \frac{D}{\sqrt{2}}\,s =$$

$$= \sqrt{2}K\left\{+\frac{1}{K}\operatorname{arc\,sen}\frac{D-Ky}{B} - \frac{1}{K}\operatorname{arc\,sen}\frac{D-K}{B}\right\} - \frac{D}{\sqrt{2}}\,s$$

o bien, según (4.8) y (4.9)

$$(4.12)\quad x_1 = -\frac{D}{\sqrt{2}}\,s + \sqrt{2}\left\{\operatorname{arc\,sen}\frac{D\cos 2\sigma + B}{D + B\cos 2\sigma} - \operatorname{arc\,sen}\frac{D-K}{B}\right\} =$$

$$= -\frac{D}{\sqrt{2}}\,s - \sqrt{2}\operatorname{arc\,sen}\frac{D-K}{B} + \sqrt{2}\operatorname{arc\,tan}\frac{B + D\cos 2\sigma}{\sqrt{D^2 - B^2}\operatorname{sen} 2\sigma} =$$

$$= -\frac{D}{\sqrt{2}}\,s - \sqrt{2}\operatorname{arc\,sen}\frac{D-K}{B} + \sqrt{2}\operatorname{arc\,tan}\frac{B + D + (B-D)\tan^2\sigma}{2\sqrt{D^2 - B^2}\tan\sigma}$$

o sea,

$$(4.13)\quad x_1 = \frac{-D}{\sqrt{2}}\,s - \sqrt{2}\operatorname{arc\,sen}\frac{D-K}{B} + \sqrt{2}\operatorname{arc\,tan}\frac{1 - \alpha\tan^2\sigma}{2\sqrt{\alpha}\tan\sigma}$$

Para el caso $K = D - B$, que es el caso considerado por Chandrasekhar-Wright, según (4.5) es $s = 2\sigma/\sqrt{D^2 - B^2}$ y por tanto

$$(4.14)\quad x_1 = -\frac{\sqrt{2}D}{\sqrt{D^2 - B^2}}\,\sigma - \sqrt{2}\,\frac{\pi}{2} + \sqrt{2}\operatorname{arc\,tan}\frac{1 - \alpha\tan^2\sigma}{2\sqrt{\alpha}\tan\sigma} =$$

$$= -\frac{\sqrt{2}D}{\sqrt{D^2 - B^2}}\,\sigma - 2\sqrt{2}\operatorname{arc\,tan}(\sqrt{\alpha}\tan\sigma)$$

puesto que

$$\operatorname{arc\,tan} \frac{2\sqrt{\alpha}\tan\sigma}{1-\alpha\tan^2\sigma} = 2\operatorname{arc\,tan}(\sqrt{\alpha}\tan\sigma).$$

Para el cálculo de x_2 tenemos

$$x_2 = \sqrt{2}\int_0^{x_4} \frac{(D-K/h)}{h\sqrt{B^2-(D-K/h)^2}}\,dx_4 = \tag{4.15}$$

$$= -\sqrt{2}\int_1^{y} \frac{(D-Ky)\,dy}{\sqrt{-Ky^2+2DKy+B^2-D^2}}$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{K}\sqrt{-K^2y^2+2DKy+B^2-D^2} + \frac{\sqrt{2}}{K}\sqrt{-K^2+2DK+B^2-D^2}$$

y por tanto, siendo, según (2.25) y (2.29)

$$u_4 = B\,\mathrm{sen}\,\theta = B\sqrt{1-B^{-2}(D-Ky)^2}$$

resulta

$$x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{K}\,u_4(y) + c_2 \tag{4.16}$$

siendo c_2 una constante.

Pero

$$u_4(y) = \frac{dx_4}{d\sigma}\,\frac{d\sigma}{ds} = \frac{d}{d\sigma}\left(\log\frac{1+\alpha\tan^2\sigma}{1+\tan^2\sigma}\right)\frac{d\sigma}{ds}$$

$$= \frac{(\alpha-1)\tan\sigma}{1+\alpha\tan^2\sigma}\sqrt{D^2-B^2}$$

de donde

$$x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{K}\,\frac{(\alpha-1)\tan\sigma}{1+\alpha\tan^2\sigma}\sqrt{D^2-B^2} + c_2. \tag{4.17}$$

Si se supone, como hacen Chandrasekhar-Wright [2], $u_4(0) = 0$, es $K = D - B$, $\alpha - 1 = -2B/(D + B)$ y por tanto

$$x_2 = \frac{2\sqrt{2}\,B}{\sqrt{D^2 - B^2}} \, \frac{\tan \sigma}{1 + \alpha \tan^2 \sigma} + c_2 \tag{4.18}$$

de acuerdo con estos autores.

Finalmente, para x_3, según (2.39) y (4.5) se tiene

$$x_3 = \frac{2C}{\sqrt{D^2 - B^2}} \, \sigma + c_3. \tag{4.19}$$

5. El universo de Gödel en coordenadas cilíndricas

Gödel [1] ha obtenido algunas de las propiedades de su universo escribiendo el elemento de arco en coordenadas cilíndricas r, ϕ, t, z, relacionadas con las x_1, x_2, x_3, x_4 por las ecuaciones

$$e^{x_4} = \cosh r + \operatorname{senh} 2r \cos \phi$$

$$x_2 e^{x_4} = \sqrt{2} \operatorname{senh} 2r \operatorname{sen} \phi$$

$$\phi + \frac{1}{\sqrt{2}} (x_1 - 2t) = 2 \operatorname{arc} \tan (e^{-2r} \tan (\phi/2))$$

$$x_3 = 2z$$

Según Gödel [1], mediante r, ϕ, t, z el elemento de arco (1.1) toma la forma

$$ds^2 = 4 (dt^2 - dr^2 - dz^2 + (\operatorname{senh}^4 r - \operatorname{senh}^2 r)\, d\phi^2 + 2\sqrt{2} \operatorname{senh}^2 r \, d\phi \, dt). \tag{5.1}$$

Para ver nuevamente si existen curvas de tiempo cerradas, que no son las mismas encontradas anteriormente, observemos que el elemento de arco (5.1) puede sumergirse en el espacio pseudoeuclidano de 10 dimensiones cuyo elemento de aro arco tiene la forma (3.2) mediante las funciones (salvo el factor 4, que no es esencial),

$$
\begin{aligned}
& z_1 = t, \quad z_2 = f\cos\phi, \quad z_3 = f\,\mathrm{sen}\,\phi, \\
& z_4 = (2\sqrt{2})^{1/2}\,\mathrm{senh}\,r\cos\frac{1}{2}(\phi+t), \\
& z_5 = (2\sqrt{2})^{1/2}\,\mathrm{senh}\,r\,\mathrm{sen}\frac{1}{2}(\phi+t), \\
(5.2)\qquad & z_6 = f, \quad z_7 = r, \quad z_8 = z, \\
& z_9 = (2\sqrt{2})^{1/2}\,\mathrm{senh}\,r\cos\frac{1}{2}(\phi-t), \\
& z_{10} = (2\sqrt{2})^{1/2}\,\mathrm{senh}\,r\,\mathrm{sen}\frac{1}{2}(\phi-t),
\end{aligned}
$$

siendo $f^2 = \mathrm{senh}^4 r - \mathrm{senh}^2 r$.

Las curvas en que varía únicamente ϕ son evidentemente curvas cerradas, pues las z_i son funciones periódicas respecto de ϕ. Además, si el valor constante de r cumple la condición

$$
(5.3)\qquad \mathrm{senh}\,r > 1,
$$

son curvas de tiempo y si cumplen $\mathrm{senh}\,r = 1$ son curvas de longitud nula. Por tanto, *en el universo de Gödel, con el elemento de arco expresado en la forma* (5.1), *las curvas en que únicamente varía* ϕ *y cumplen la condición* (5.3) *son curvas de tiempo cerradas de longitud* $2\pi\,\mathrm{senh}\,r\,(\mathrm{senh}^2 r - 1)^{1/2}$.

Según el criterio de Eisenhart [3, pág. 58], las curvas en que varían únicamente t, r o z son curvas geodésicas. Las curvas en que varía únicamente ϕ no son todas geodésicas, pero puede haber alguna que lo sea. Para encontrarlas vamos a proceder directamente. Poniendo

$$
(5.4)\qquad \xi_1 = r, \quad \xi_2 = t, \quad \xi_3 = z, \quad \xi_4 = \phi
$$

las componentes no nulas del tensor g_{ij} correspondiente al elemento de arco (5.1) son

$$
\begin{aligned}
& g_{11} = -1, \quad g_{22} = 1, \quad g_{24} = \sqrt{2}\,\mathrm{senh}^2 r, \quad g_{33} = -1 \\
& g_{44} = \mathrm{senh}^4 r - \mathrm{senh}^2 r
\end{aligned}
$$

y las componentes contravariantes no nulas son

$$g^{11} = -1, \quad g^{22} = (1 - \operatorname{senh}^2 r)/\cosh^2 r, \quad g^{24} = \sqrt{2}/\cosh^2 r$$
$$g^{33} = -1, \quad g^{44} = -(\operatorname{senh}^2 r \cosh^2 r)^{-1}.$$

Para que la curva en que sólo varía ϕ sea geodésica, debe ser

$$\left\{ {1 \atop 4\ \ 4} \right\} = (2 \operatorname{senh}^3 r - \operatorname{senh} r) \cosh r = 0$$

y por tanto

$$\text{(5.5)} \qquad \operatorname{senh} r = \frac{1}{\sqrt{2}} .$$

Al variar ϕ, con este valor de r, se tiene una curva geodésica cerrada, la cual, sin embargo, no es curva de tiempo, puesto que para ella es $d s^2 < 0$.

Podemos buscar ahora las geodésicas contenidas en la superficie r = const., z = const. en que solamente varían $\xi_2 = t$, $\xi_4 = \phi$. Al escribir las ecuaciones de las geodésicas bajo estas condiciones resulta como única ecuación no idéntica

$$\left\{ {1 \atop 2\ \ 2} \right\} \dot{t}^2 + 2 \left\{ {1 \atop 4\ \ 2} \right\} \dot{t}\, \dot{\phi} + \left\{ {1 \atop 4\ \ 4} \right\} \dot{\phi}\, \dot{\phi} = 0$$

que equivale (suponiendo que para $\phi = 0$ debe ser $t = 0$) a la ecuación

$$\text{(5.6)} \qquad t = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{2} - \operatorname{senh}^2 r \right) \phi.$$

Para esta geodésica, sustituyendo en (5.1) resulta

$$\text{(5.7)} \qquad d s^2 = \left(1 - \frac{1}{2} \cosh^2 2 r \right) d \phi^2$$

y por tanto será una geodésica de tiempo solamente si

$$\cosh^2 2r < 2, \quad \text{equivalente a} \quad \operatorname{senh} r < \frac{1}{\sqrt{2}} . \tag{5.8}$$

Se observa que para $\operatorname{senh} r = 1/2$ se tiene nuevamente la geodésica cerrada anterior, sobre la cual únicamente varía ϕ, pero que es una geodésica de espacio. Las demás geodésicas (5.6) no son cerradas: para $\operatorname{senh} r < 1/\sqrt{2}$ el tiempo t crece con ϕ y para $\operatorname{senh} r > 1/\sqrt{2}$, t decrece al crecer ϕ. Por tanto, para que al aumentar ϕ en 2π se pueda llegar a un punto de la curva t que sea anterior a $t = 0$, debe ser $\operatorname{senh} r > 1/\sqrt{2}$ y en consecuencia la geodésica es de género espacio, puesto que $\cosh^2 2r > 2$. Es decir, por este método no se puede influenciar el pasado (de acuerdo con una observación de Chandrasekhar-Wright [2]).

Bibliografía

[1] Abdel-Megied, M. - Dautcourt, G.: *Zur Struktur des Lichtkegels im Gödel Kosmos.* «Mathematische Nachrichten», **54**, 1972, 33-39.

[2] Chandrasekhar, S. - Wright, J. P.: *The geodesics in Gödel's Universe.* «Proc. Nat. Acad. Sc. Washington», 47, 1961, 341-347.

[3] Eisenhart, L. P.: *Riemannian Geometry.* Princeton University Press, 1949.

[4] Gödel, K.: *An example of a new type of cosmological solutions of Eeinstein's field equations of gravitation.* «Reviews of Modern Physics», 21, 1949, 447-450.

[5] — — *Rotating Universes in General Relativity.* «Proc. International Congress of Math. Cambridge», 1950, vol. 1, 1952, 175-181.

[6] Rosen, J.: *Embedding of various relativistic Riemannian spaces in pseudo-euclidean spaces.* «Reviews of Modern Physics», 37, 1965, 204-214.

[7] Synge, J. L.: *Relativity, The General Theory.* North-Holland Publ. Co. Amsterdam 1960.

[8] Wright, J. P.: *Solution of Einstein's field equations for a rotating, stationary and dust-filled universe.* «J. Mathematical Physics», 30, 1965, 356-358.

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales.
Universidad de Buenos Aires (Argentina)