APLICACIONES DE LA MATEMATICA EN LA ESCUELA ELEMENTAL Y MEDIA (1a. parte)

per Luís A. Santaló (Buenos Aires)

1 Introducción

Hace tan solo veintiún años del seminario de Royaumont (1959), punto de partida de la reforma de la enseñanza de la matemática y es admirable ver como ella se extendió por todos los paises con la velocidad arrolladora a que nos tiene acostumbrados nuestro siglo. Con mayor o menor intensidad, con una interpretación más o menos exacta de lo que pretendían sus promotores, la entonces llamada matemática moderna se ha ido introduciendo en todas partes y en todos los niveles educativos. Prueba de su triunfo es que actualmente cada vez se habla menos de *matemática moderna*: al decir simplemente *matemática* se sobrentiende lo que hace una década se llamaba matemática moderna y si hace falta establecer la distinción, se habla de *matemática clásica* o *matemática tradicional* para indicar aquella matemática que no es la de hoy. El adjetivo, que restringe el alcance, ha cambiado de lugar.

En el nivel secundario, a través de debates, algunos muy constructivos, otros de poco sentido, la reforma se ha introducido de manera general. En el nivel primario la reforma es mas difícil y son necesarios mayores recaudos. A pesar de los pocos años de aplicación, la nueva matemática y las nuevas tendencias didácticas y metodológicas ya han tenido, si no en el tiempo, por lo menos en la extensión, vasta experiencia para poder pensar en el ajuste de sus pretensiones. Para ello va a ser útil comparar la enseñanza tradicional con la que ahora se recomienda. Dejando de lado prejuicios subjetivos, debemos tener en cuenta que, como ocurre en todas las revoluciones, ni todo lo anterior era tan malo que no quede nada rescatable, ni todo lo posterior tan bueno que no necessite modificación. Basta que el gradiente sea positivo, de modo que las ventajas logradas superen a las desventajas para que pueda hablarse de un balance favorable.

En la mayoria de los paises, la enseñanza tradicional de la matemática presentaba siempre una discontinuidad de objetivos al pasar de la escuela elemental a la escuela media. En la escuela elemental la matemática se consideraba como una disciplina *informativa*: el alumno tenia que aprender la operatoria esencial con los números enteros y fraccionarios y las fórmulas de áreas y volúmenes de las figuras geométricas elementales. Al pasar a la escuela media, bruscamente, se pasaba a la matemática como disciplina *formativa*: los alumnos se encontraban con la axiomática, demostraciones de teoremas y definiciones que eran, o pretendían ser, precisas y rigurosas.

La enseñanza elemental cuyo fin es el cálculo numérico y la descripción de las figuras geométricas, es relativamente fácil de impartir. Como el alumno aprende mas fácilmente a memorizar que a razonar y las reglas del cálculo pueden y en gran parte deben memorizarse, no se necesitaban maestros excelentes para que los resultados fueran aceptables y aún buenos. Queda desde luego la duda de si los mismos resultados podrian haberse obtenido con una enseñanza que, al mismo tiempo que preparase al alumno para que supiera calcular, *le instruyera en las habilidades propias del razonamiento deductivo y desarrollaba* su mentalidad matemática. Cabe la duda, también, de si el aprendizaje memorístico de las operaciones elementales no perjudica al alumno para su posterior formación matemática. Hay cualidades intelectuales que si no se desarrollan a su debido tiempo, pueden perderse para siempre. De todas maneras, dejando de lado una excelencia difícil de conseguir, no cabe duda de que el objetivo esencial de que el alumno saliera de la escuela primaria manejando las herramientas matemáticas que necesitaba en su vida diaria, se cumplia casi siempre en gran parte. Pensando que la escuela primaria era y sigue siendo la única obligatoria en casi todos los paises y que, por tanto, la mayoria de los alumnos no han de seguir estudios posteriores complementarios, tal vez dicha enseñanza, tal como ha sido siempre, no sea demasiado criticable. Si encima de calcular se enseña a razonar, mucho mejor, pero hay que tener cuidado que los buenos propósitos de un prurito *formativo* no perjudiquen el aprendizaje del cálculo que necesita todo ciudadano para sus actividades elementales en la vida.

La matemática de la escuela media, en cambio, si se pretende que sea esencialmente formativa, en el sentido de desarrollar en el alumno el razonamiento deductivo, es mucho mas difícil de llevar a cabo. Se necesitan, para ello, muy buenos profesores, capaces y dedicados a su profesión, con profundo espíritu observador, para ir analizando sobre la marcha, las reacciones de la clase, que no serán las mismas para todos los alumnos, y que sin embargo deberá tener en cuenta para ir progresando en las sucesivas etapas del razonamiento lógico que trata de desarrollar. Los alumnos, en general, sea por propia naturaleza o como resultado de la educación primaria, suelen huir del razonamiento para refugiarse en la memoria. La memorización de axiomas o demostraciones de teoremas es mucho mas fácil que su comprensión real y si el profesor no actúa para corregir esta tendencia, el resultado es un aprendizaje memorístico de definiciones y deducciones lógicas no comprendidas, lo cual no solamente es inútil, sino que transforma en *deformante* el carácter *formativo* que se pretendía desarrollar. Aprender de memoria la división de números decimales, puede no ser formativo, pero es evidentemente útil para los quehaceres de la vida común. Pero aprender de memoria la definición del número entero como par de números naturales y una relación de equivalencia, o los axiomas de grupo sin comprender el porquè de todo ello, no solamente carece de valor formativo, sino que es completamente inútil.

Por este motivo se ha dicho muchas veces que la enseñanza de la matemática en la escuela elemental ha sido buena, puesto que en ella se aprendían muchas cosas, y que la enseñanza de la matemática en la escuela media ha sido mala o por lo menos deficiente, porque los alumnos aprendían muy poco que fuera para ellos a la vez nuevo y útil. Podía ocurrir, incluso, que los alumnos olvidaran durante la escuela secundaria gran parte de las cosas *útiles* que habían aprendido en la escuela primaria.

Naturalmente que esto es una valoración superficial y equivocada si, como siempre se pretendió, durante el ciclo medio el alumno educaba su sentido crítico y ejercitaba el razonamiento lógico. Cuando durante todas las edades media y moderna y en algunos paises hasta principios del presente siglo, se usaban los Elementos de Euclides o ligeras variantes de los mismos para enseñar geometría, no se pretendía enseñar la manera práctica de calcular àreas c volúmenes o medir magnitudes, sino que se pretendía ejercitar la capacidad deductiva y enseñar a comprender la importancia de un sistema axiomático. La idea era buena y los resultados pueden haberlo sido también en manos de muy buenos educadores. Pero en manos de profesores comunes, sobrecargados de alumnos y de horas de clase, sospechamos que el resultado debió ser desastroso. Basta recordar el absurdo de que la piedra de toque para evaluar la capacidad matemática de un alumno fuera durante siglos el famoso *pons asinorum* o puente de los asnos, proposición I, 8 de los **Elementos** en la cual se demuestra que en un triángulo a ángulos iguales se oponen lados iguales, proposición de cierta importancia para el matemático investigador en los fundamentos de la geometría, pero trivial e insubstancial para adolescentes en periodo de formación, ávidos de aprender cosas nuevas que despertaran su interés y les vinculara la escuela con la vida.

La situación puede repetirse en la época actual. En las nuevas tendencias se ha volcado el énfasis hacia la parte conceptual. Como una reacción a la rigidez de la matemática clásica que habia endurecido su contenido, presentándolo como un conjunto árido e inflexible de teoremas y ejercicios estereotipados, las tendencias modernas preconizan una mayor fluidez, mostrando a la matemática como un conjunto de conocimientos cambiantes, capaces de adaptarse a situaciones muy diversas y con facultad para crear nuevos modelos si la vida exterior o la imaginación de cada uno lo aconsejan. La matemática de los programas clásicos parecía aplastar toda imaginación novedosa, impregnada como estaba de un escolasticismo que impedia toda excursión fuera de la ortodoxia tradicional. La matemática moderna, de acuerdo con la vida actual, de la cual no es más que una de tantas facetas, rompió con todo prejuicio e invadió muchos campos antes prohibidos a la matemática.

Pero una cosa es la intención de los matemáticos de primera fila, que ven claro la necesidad de esta nueva matemática basada en amplias estructuras y adaptable a muchas situaciones, y otra cosa es dejar esta matemática heterodoxa, a veces cismática, en manos poco expertas que pueden llegar, por un lado, a confundir los medios con los fines y creer que al llegar a las definiciones ya se ha conquistado algo, y por otro lado, a sobrevalorar las posibilidades de la nueva matemática, que en muchos aspectos son inmensas, pero siempre limitadas.

Los maestros o profesores de excepción están por encima de cualquier programa o tendencia educativa. La matemática actual es para ellos un excelente campo para llevar al alumno por regiones cambiantes y atractivas, que seguramente despertarán su interés. No hay duda de que bien conducida y oportunamente dosificada y administrada, la nueva matemática puede rendir, y la experiencia prueba que rinde, muy buenos resultados en cualquier ciclo de la enseñanza. Pero para el profesor promedio, que por falta de conocimientos o de habilidad didáctica o por exceso de ocupaciones no puede dedicar a sus clases el tiempo de preparación y evaluación necesarios, la gran maleabilidad de la matemática de hoy puede ser perjudicial y puede ocurrir que los alumnos, sobre no aprender técnicas operatorias, por ser consideradas fuera de moda, olviden el razonamiento por no comprender la esencia de los axiomas, definiciones, notaciones y teoremas que se les obliga a aprender, sin que al mismo tiempo vislumbren a dónde se quiere llegar y que tipo de problemas podrá resolver, que antes no podía, con los nuevos conceptos.

Para evitar este peligro de una enseñanza libresca, apartada de la realidad y del mundo que rodea al alumno, creemos que es fundamental acompañar la enseñanza de la matemática con aplicaciones. Incluso, si ello es posible, las aplicaciones deberían contener la teoría misma, formando una sola unidad y un puente que uniera la matemática con la vida y la escuela con el mundo.

2 Aplicaciones de la matemática.

La clave de toda didáctica consiste en despertar el interés de los alumnos. Se aprenden bien las cosas que interesan y el esfuerzo para ello no se considera carga sino deporte.

Es curioso que existan alumnos sin ninguna capacidad matemática, a juzgar por las calificaciones de su profesor, que sin embargo son excelentes jugadores en juegos de naipes, ajedrez o en adivinanzas y entretenimientos en que la agilidad mental y el razonamiento lógico juegan un importante papel. Ello es una prueba evidente de que su escaso rendimiento en las clases de matemáticas no es debido a falta de capacidad, sino a falta de interés. Hay que buscar una metodología que despierte este interés y una manera de hacerlo es mostrarle las aplicaciones de la matemática como un juego y la matemática misma como una herramienta esencial para vencer en el mismo, o sea, para resolverlo.

La solución de problemas, por otra parte, es el fin primordial de la matemática. En una conferencia pronunciada en 1968 en St. Agustin, Trinidad, decía el profesor G. Pólya: *Está bien justificado que todos los textos de matemática, comenzando por el papiro Rhind (siglo XVII antes de nuestra era) contengan problemas. Los problemas pueden incluso ser considerados como la parte mas esencial de un libro y la resolución de problemas por los alumnos como la parte mas esencial de su educación matemática.*

Al decir que la enseñaoza de la matemática debe tener como parte esencial la resolución de problemas, hay que entender esta palabra en sentido amplio, incluyendo los problemas curiosos de las recreaciones matemáticas, los problemas que surgen de las adquisiciones teóricas y los problemas corrientes de la vida diaria. Los problemas tienen tres ventajas esenciales:

a) Interesan al alumno. Puede ocurrir que no todos los alumnos se interesen por los mismos problemas, pero es difícil encontrar alumnos que no se interesen por ninguno. Una de las dificultades de la enseñanza colectiva es que no todos los alumnos tienen la misma vocación ni persiguen los mismos fines. Las condiciones congénitas y el ambiente familiar motivan una gran variedad de maneras de ser. Pero si no es posible interesar a todos los alumnos con los mismos problemas, hay que buscar para cada uno de ellos, o para cada grupo de alumnos afines, los problemas apropiados a su temperamento y capacidad.

b) Desarrollan las cualidades que constituyen los objetivos esenciales de la educación matemática: ordenación de datos, método deductivo, razonamiento lógico, capacidad de síntesis, creación de modelos.

c) Una vez despertado en el alumno el interés por el problema, pedirá él mismo se le enseñen las herramientas matemáticas necesarias para poder resolverlo o generalizarlo a situaciones mas complejas o mas reales. Practicará con interés la calculatoria exigida por el problema, si ya la conoce, y estudiará con gusto la calculatoria nueva que le sea necesaria.

La matemática es razonamiento lógico y herramienta técnica para conducir y ejercitar este razonamiento. Ambas cosas tienen por fin resolver problemas y mostrar claramente este fin para justificar los medios es una buena táctica educativa. A veces se dice que la resolución de problemas pertenece a la *matemática aplicada*. No es exactamente así, puesto que el sentido que tiene la matemática aplicada es tratar problemas prácticos o útiles de la vida diaria. No es fácil definir que quiere decir *útil*, puesto que el mas obstracto y puro de los problemas puede tener la utilidad de divertir al solucionista o permitir el avance o cambio de rumbo de una teoría. Lo importante es que el problema despierte el interés del alumno y de que a través del mismo aprenda conceptos y técnicas matemáticas que le puedan ser útiles posteriormente en una gran variedad de situaciones. Los temas de interés pueden variar con el tiempo y el lugar, así como con la edad del alumno. Si circunstancias ambientales del momento focalizan el interés en determinados temas (deportivos, económicos, sociales, recreativos) a ellos hay que acudir, por que lo importante no es tanto el problema concreto y particular, sino la matemática que el alumno aprende y ejercita a través del mismo.

La selección de problemas que posean la doble cualidad de interesar al alumno y al mismo tiempo hacerle ejercitar la operatoria y el pensamiento matemático, no es cosa fácil. Para la mayoría de los alumnos hay que buscar temas vinculados con la vida diaria y con el ambiente que le rodea, para mostrarle que la matemática está vinculada con estos factores y no es pura abstracción del mundo de las ideas. Un inconveniente grave es el tiempo de que se dispone para los problemas. Como el profesar tiene un programa que cumplir, lo cual puede ser discutible si se toma con demasiada rigidez y exclusividad, pero que es una realidad ineludible, pues cada año de estudios supone un cierto avance en los conocimientos y habilidades matemáticas del alumno, no dispone del tiempo que el desarrollo de ciertos problemas necesita. La enseñanza tradicional ha ido seleccionando colecciones de problemas y ejercicios estereotipados que se adaptan bien por su duración y grado de dificultad a cada momento de la enseñanza. Los problemas reales se han simplificado y esquematizado de manera que puedan suministrarse a los alumnos en dosis atomizadas muy perfectas, pero que por falta de conexión no dan muchas veces la idea global ni tienen la forma con la que en verdad se presentan en la práctica.

Por otra parte los problemas *en bruto* tomados directamente de la vida real son complejos, formados por varios problemas parciales, y su solución, que en la mayoría de los casos solamente podrá ser aproximada, exige tiempo y la colaboración de varios alumnos. Sin embargo, estos son los problemas que interesan y educan.

Una solución puede ser sustituir la ejercitación atomizada por problemas mas extensos que exijan el manejo de la operatoria conocida y obliguen a poner a prueba todas las habilidades matemáticas del alumno. Estos problemas pueden ser tratados por grupos de alumnos, formando equipos, en horas extraescolares y discutidos en clase periódicamente, por ejemplo un dia por semana. Ello se vincula con el método de los proyectos que vamos a mencionar.

3 El método de los proyectos.

Para la enseñanza de la Biología, el profesor Osvaldo Frota Pessoa de la Universidad de Sao Paulo (Brasil) ha introducido el método de los proyectos, fácilmente generalizable a todas las ciencias experimentales y también adaptable a la enseñanza de la matemática (ver O. Frota-Pessoa, **Aportes a la Enseñanza de la Biología**, Informe de la segunda Conferencia Interamericana sobre la Enseñanza de la Biología, Asunción, Paraguay, 3 al 7 de julio de 1972. Publicado por el Departamento de Asuntos Científicos de la OEA, Programa Regional de Desarrollo Científico y Tecnológico, Washington, 1974).

En el campo de la matemática, el método fué preconizado por J. Dewey en los Estados Unidos a principios de siglo, siendo luego seguido por varios educadores (Kilpatrik, Stevenson, Snedden y otros varios).

Un *proyecto* consiste en un tema amplio, que presente interés para quienes lo van a realizar y cuyo desarrollo exija el uso y la práctica de la herramienta matemática asequible a los mismos, mas la que van aprendiendo a través del proyecto. En matemática es mas difícil encontrar proyectos amplios que en las disciplinas experimentales, pero se puede pensar en proyectos menores o miniproyectos, que signifiquen algo más que los clásicos ejercicios o problemas que se resuelven individualmente y en el tiempo breve de una clase o de un examen. Tampoco pensamos que toda la enseñanza pueda girar entorno de uno o varios proyectos. Gran parte del tiempo se necesita para *informar* sobre el método, la operatoria y las posibilidades de la matemática. La ejercitación simple e inmediata que debe seguir a todo nuevo concepto adquirido, tampoco debe abandonarse. Pero es muy importante que estos nuevos conceptos sean motivados y luego ejercitados con problemas de la vida real, problemas que no se presentan nunca de manera tan perfecta y esquematizada para que puedan tratarse inmediatamente aplicando una fórmula o haciendo, a ciegas, determinadas operaciones. Planteado un problema, es tan instructivo como su solución, la búsqueda de los datos necesarios para que ella sea factible; en los proyectos, los alumnos deben encargarse de buscar los datos necesarios y seleccionar los mas convenientes o los más confiables. Por otra parte, en el desarrollo de un problema real surgirán detalles y complementos que los alumnos descubrirán por si mismos y para cuya solución tendrán que acudir a textos, enciclopedias o al profesor, con gran rendimiento para el aprendizaje, cualquiera que sea la alternativa seguida.

Vamos a exponer a continuación algunos ejemplos de proyectos o miniproyectos. Consideramos que ellos deben ser tratados por grupos de alumnos, reunidos por afinidad de temperamento y vocación. El tratamiento se hará como tarea extraescolar y solamente alguna hora a la semana se dedicará la clase a discutir la marcha de los distintos pro yectos, exponiendo cada equipo sus problemas, sus dificultades y sus resultados. El profesor, sin embargo, irá siguiendo continuamente la marcha de los proyectos y hará referencia a los mismos en las clases ordinarias cada vez que se presente la oportunidad.

Los proyectos que mencionamos se refieren a aplicaciones que llamamos modernas en el sentido de que difícilmente se encuentran tratadas en la enseñanza tradicional. No son, tal vez, aplicaciones de la matemática actual, puesto que en alguna de ellas se utiliza exclusivamente la matemática clásica, pero así y todo el espíritu de salir del aula para buscar datos, hacer comparaciones, deducir consecuencias y dsicutir resultados sobre hechos de la vida real, es uno de los aspectos que intenta desarrollar en la enseñanza la moderna matemática o la moderna didáctica de la matemática.

4 Bolsa de cuerpos y figuras geométricas

Sobre todo en la escuela primaria conviene tener a mano una bolsa de cuerpos y figuras geométricas de madera o cartulina, de formas y tamaño variados, para su estudio. Los alumnos pueden, cada año, incrementar la bolsa aportando nuevos cuerpos construídos por ellos mismos o conseguidos en algún lugar. La figura indica algunos de ellos.

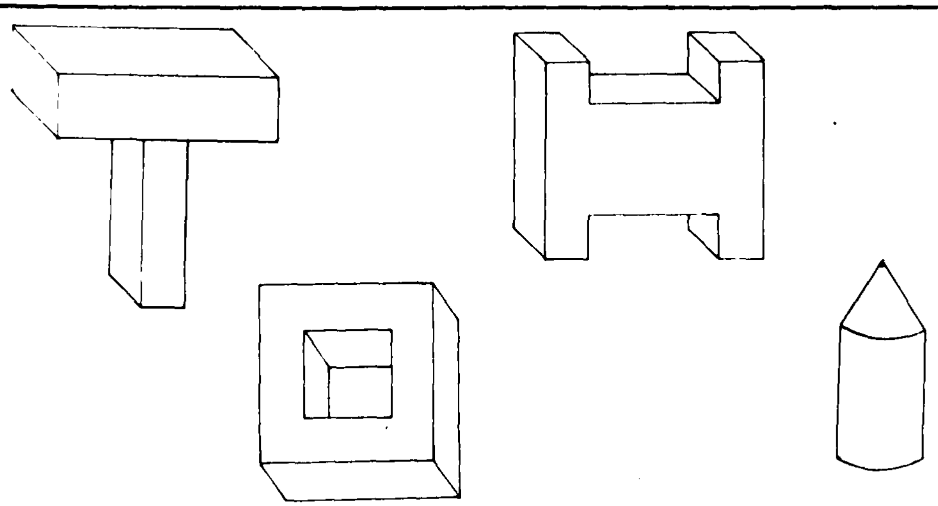


FIGURA 1

El proyecto consiste en calcular, anotar y comparar caraterísticas de estos cuerpos. Los alumnos deberán ellos mismos medir los datos necesarios para poder calcular: a) el área total; b) el volumen; c) el número de vértices v, aristas a y caras c; d) el valor de v-a-c; e) otros datos que se les ocurran a los alumnos. Por ejemplo el peso, para compararlo entre los que tienen igual volumen. Para el cálculo de las áreas y los volúmenes no es necesario partir siempre de los mismos datos; unos alumnos elegirán unos y otros alumnos otros: constatar que se llega siempre al mismo resultado y observar cuales han sido las medidas mínimas necesarias.

La bolsa contiene también figuras planas recortadas en cartulina. Los ejercicios son muy variados. He aquí uno interesante: Se pide construir las siguientes figuras de manera que tengan todas el mismo perímetro L : cuadrado, triángulo equilátero, triángulo rectángulo isósceles, rectángulo con dos lados de longitud doble de los otros dos, rombo de ángulo 30°, 45°, 60°, trapecio de base menor igual a la mitad de la base mayor, triángulo isósceles de base igual a la altura, otras figuras poligonales. Calcular luego las áreas de estas figuras y compararlas entre sí. Según la preparación de los alumnos éstos problemas se resuelven experimentalmente, con un hilo de longitud L y midiendo el área en papel milimetrado, o bien cuando se dispone de las herramientas necesarias, se procede por cálculo exacto, comparando luego con el resultado experimental.

Para la escuela primaria, interesantes ensayos de *geometría física* han sido realizados en el IMECC (Instituto de Matemática, Estadística y Computación de Campinas, Sao Paulo, Brasil, 1974) como puede verse en los fascículos publicados de *Geometría Experimental* como parte del proyecto *Novos Materiais para o ensino de Matematica*.

5 Mosaicos o Teselados.

Un proyecto para alumnos que tengan afición al dibujo y cierto temperamento artístico puede ser el dibujo, análisis y descubrimiento de mosaicos o teselados del plano.

Se llama mosaico o teselado a todo cubrimiento del plano mediante figuras congruentes entre sí, de manera tal que todo punto del plano pertenezca a una figura y estas figuras, llamadas dominios fundamentales del teselado, no tengan puntos interiores comunes.

Si los dominios fundamentales deben ser polígonos regulares, se tienen los teselados elementales de cuadrados, triángulos equiláteros y exágonos regulares.

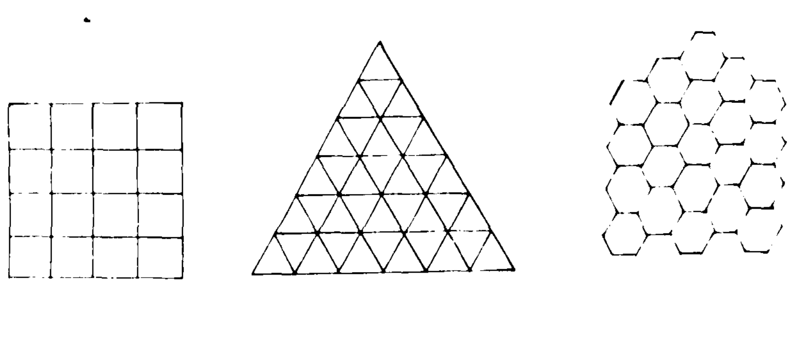


FIGURA 2

Si no se impone la condición de que sean polígonos regulares congruentes, existe una gran variedad de reselados, muchos de ellos usados para pavimentar los pisos de las viviendas o como adornos especiales de ciertos murales. El estudio de los posibles teselados y su clasificación según las simetrías que presentan, no es un problema fácil, aunque bien conocido. Se vincula con los posibles cristales de las substancias químicas y por esto pueden deducirse de los llamados crupos cristalográficos (cuyo número es 17). El estudio desde un punto de vista relativamente elemental puede verse en los libros de H.S.M. COSETER, *Introduction to Geometry*, J. Willey, New York, 1961, y H.W. GUGGENHEIMER, *Plane Geometry and Groups*, Holden Day, San Francisco, 1967. Aquí nos interesa solamente mostrar algunos ejemplos para que los alumnos interesados, trabajando en equipo, se dediquen a buscar o descubrir otros por sí mismos.

A partir de la red de puntos formados por los vértices del teselado de triángulos equiláteros, uniéndolos convenientemente, resaltan los teselados (a) y (b) de la figura 3. También puede obtenerse el teselado (c). A partir de los vértices del teselado de cuadrados se obtienen los teselados (d) y (e). Si a estos teselados se les agregan adornos convenientes se pueden obtener cuadros, como el (f), que pueden relacionarse con los del pintor holandés M.C. ESCHER (1898-1972). Ver *Le Monde de M.C. Escher*, CHENE, 1972, y el artículo de E.R. Ranucci, *Master of Tessellations: M.C. Escher*, The Mathem. Teacher, vol. 67, 1974, 299-306. Para la construcción de teselados con dibujos al estilo de Escher se puede ver el artículo de J.L. Teeters, *How to draw tessellations of the Escher type*, The Mathem. Teacher, 67, 1974, 307-310, y el de P. Butzbach, *Le secret d'Escher*, L'Escaire, 4, 1980, 49-66.

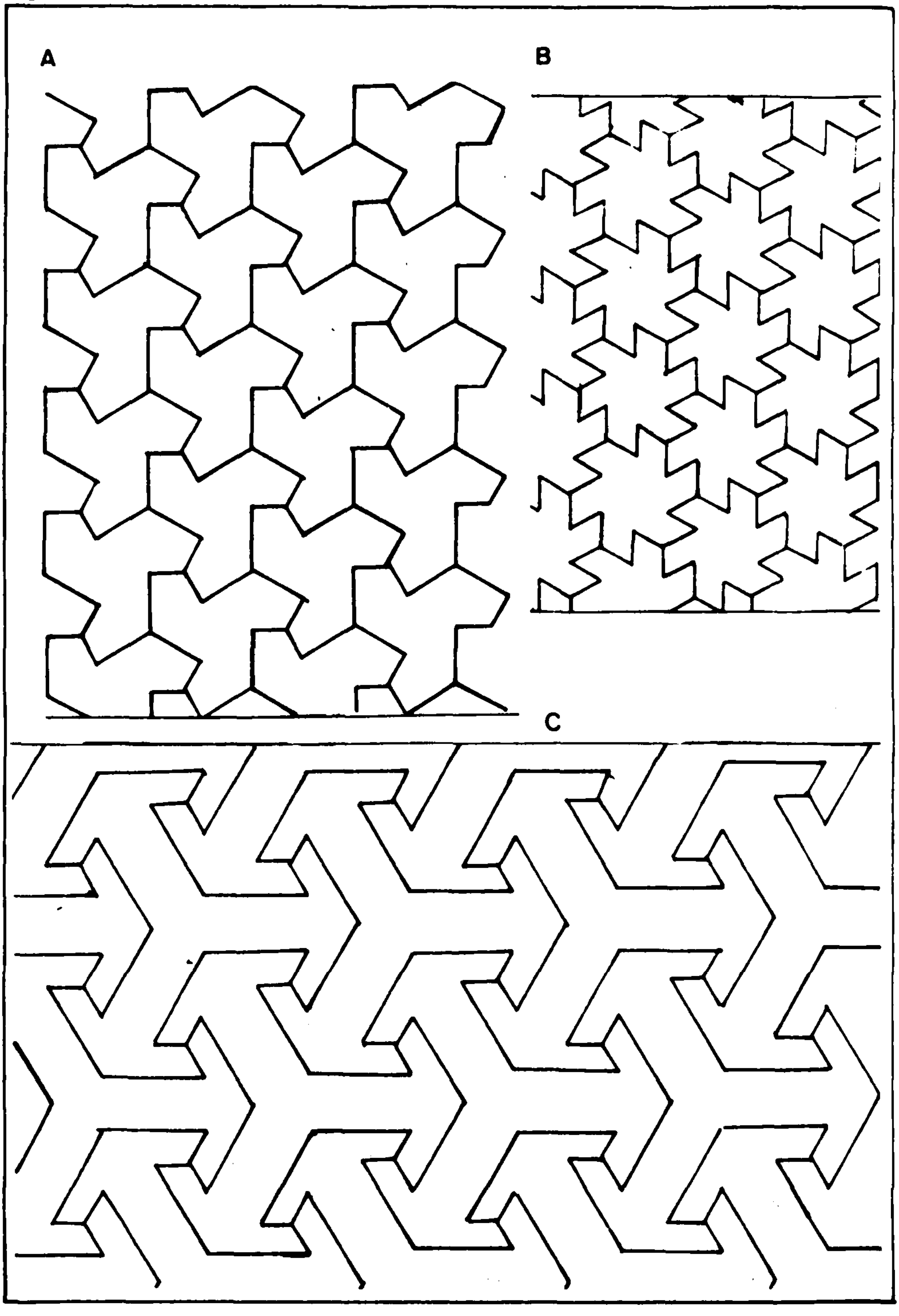
La importancia de discutir, comparar, y encontrar teselaciones por parte de los alumnos, es doble. En primer lugar, para el alumno predispuesto, puede ser una fuente de inspiración artística y al mismo tiempo, al estudiar o intentar descubrir nuevas posibilidades agudizará el pensamiento matemático. En segundo lugar, puede proponerse a los alumnos la búsqueda de simetrías en los teselados, para distinguir cuales son esencialmente diferentes y cuales difieren únicamente en agrupaciones distintas de los mismos dominios fundamentales. Por ejemplo, en la figura (a) se observan rotaciones de 120º que dejan invariante el teselado; en la figura (b) estas rotaciones son unas de 60º y otras de 120º y en la (c) son nuevamente de 120º. Ambas figuras presentan ciertas traslaciones que superponen el teselado consigo mismos. Las figuras (d), (e) presentan simetrías respecto de ciertos centros y la figura (e) posee centros y ejes de simetrías. Buscar estas simetrías y rotaciones que dejan invariante el teselado es un ejercicio útil como introducción a la teoría de grupos finitos.

Muchos teselados que se encuentran en edificios y monumentos históricos se prestan al análisis geométrico de sus propiedades de simetría y a su clasificación según las mismas. Los alumnos del equipo deben encargarse de reunir dibujos de teselaciones diversas, consultando libros de arte o enciclopedias o visitando museos y también deben idear teselaciones propias que después podrán colorear para darles mayor vistosidad.

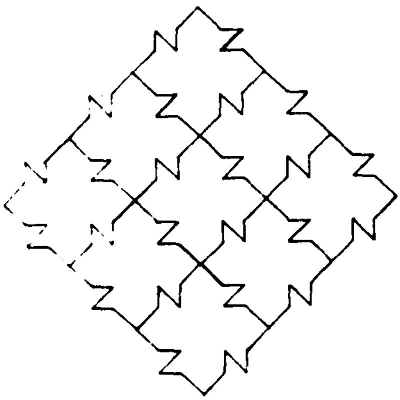
Aparte del interés geométrico y artístico, se pueden aprovechar los dibujos reunidos para calcular áreas, número de dominios fundamentales que serian necesarios para pavimentar una determinada sala, número de colores necesarios para colorear el teselado (referencia al problema de los 4 colores), superposición de teselados. Considerando los contornos de los dominios fundamentales, cada teselado da lugar a un grafo y como tal se pueden estudiar los problemas de distancia mínima entre dos puntos (siguiendo los contornos del teselado), número de caminos mínimos entre dos puntos, etc.

En un artículo de Sonia Forseth y Andria Troutman *Using mathematical structures to generate artistic designs*, Math. Teacher, vol. 67, 1974, 393-398) se propone vincular el

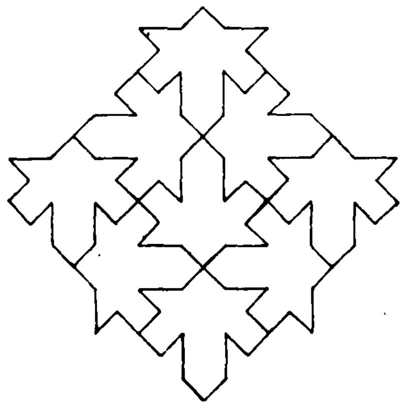
FIGURA 3



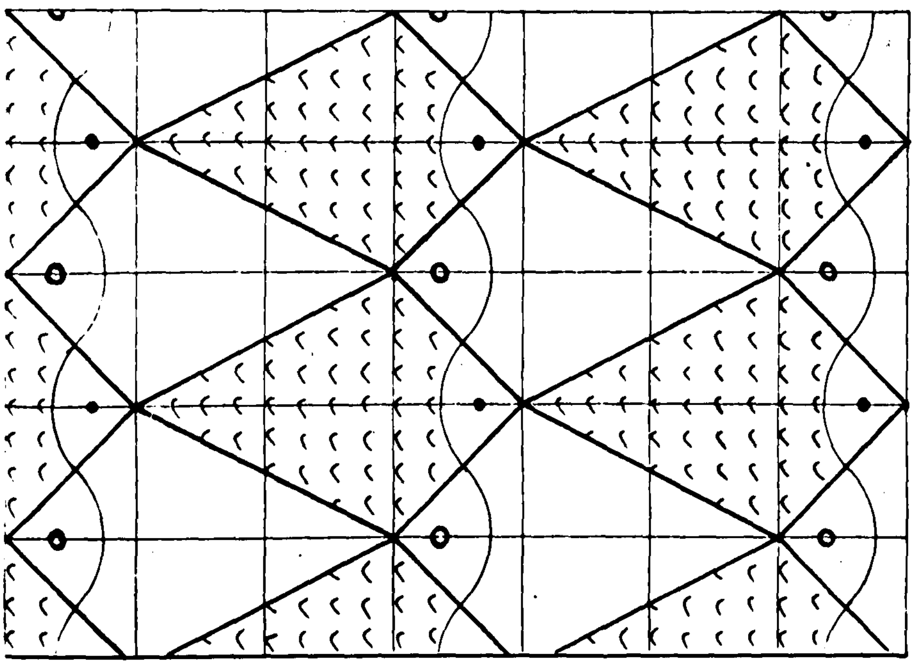
D



E



F



teselado de cuadrados (se puede extender a los demás) con la tabla de multiplicación de un cuerpo finito de la siguiente manera. Se toma la tabla de multiplicar del cuerpo, sea por ejemplo el de los enteros módulo 5, y a cada número 1,2,3,4,5 se le asigna un color o una figura geométrica. Se toma el teselado de 5 x 5 cuadrados (o dominios fundamentales) y al cuadrado de la fila x y columna y se le asigna el color o la figura correspondiente al producto x.y (mod. 5). La operación se puede extender a todo el plano. Tomando distintos cuerpos se pueden comparar los valores estéticos de los teselados correspondientes.

6 Geometría de la Escuela

Uno de los objetivos de la matemática es conocer el mundo exterior y para ello hay que medirlo, para representarlo por números, y relacionar sus partes entre sí, para ordenarlo. Un proyecto interesante es el *análisis geométrico de la escuela*. Por ello entendemos, entre otras cosas que los mismos alumnos descubrirán:

a) Hacer el plano de la escuela. Hace falta una cinta métrica y conocer como reducir longitudes a una determinada escala. Los ángulos son en general rectos, pero si no lo son, habrá que medirlos de alguna manera y los alumnos tendrán que ingeniarse para ello (se puede medir la longitud de un arco de circunferencia subtendido por el ángulo o construir a escala un triángulo que tenga un lado igual al buscado y los lados proporcionales). A partir del plano, calcular el área de las distintas partes y luego el número de metros cuadrados de patio, aula y pasillo por alumno.

b) Hallar el volumen de las aulas. Se presenta la dificultad de la altura. Podrá hacerse con un palo suficientemente largo, si se encuentra, o con un globo de los que se venden en los parques o se regalan de propaganda en ciertos almacenes, o midiendo al ángulo de una visual con la horizontal y procediendo por semejanza o con una tabla de funciones trigonométricas (el método dependerá de la edad de los alumnos).

Conocido el volumen del aula, se calcula el número de metros cúbicos por alumno y, sabiendo que el aire tiene el 21 o/o de oxígeno, la cantidad de oxígeno por alumno.

c) Medir el área de las ventanas en las diferentes aulas.¿Hay una relación constante entre el área total de las ventanas y el volumen del aula? Si hay aulas con mayor superficie relativa de ventanas ¿dependerá del piso en que se encuentre el aula o la orientación de la pared que contiene las ventanas o de si éstas dan a la calle, a un patio o a un pasillo?

d) Si la escuela tiene escaleras aparecen problemas interesantes. Medir la altura de los escalones; ¿varía de una escalera a otra? Comparar con las escaleras de las casas de los alumnos. Medir la altura y la amplitud de los escalones y dibujar a escala la escalera. Medir la pendiente o ángulo de subida. ¿Entre que límites varía de una escalera a otra?