SUPERFICIES DESARROLLABLES QUE PASAN POR UNA LINEA

por LUIS A. SANTALÓ SORS

Una recta que se mueve según una determinada ley apoyándose sobre una línea cualquiera, engendra una superficie reglada. Nuestro objeto es ver en qué caso esta superficie será desarrollable y una vez establecida la condición general para ello, aplicarla a la obtención de algunos casos particulares. La mayoría de los resultados a que se llega son conocidos; es únicamente la exposición de conjunto y la generalización de algunos de ellos lo que creemos original y de posible interés.

Sea $\overline{r} = \overline{r}(s)$ la ecuación vectorial de la línea en la cual se toma el arco s como parámetro. Representemos por $\overline{t}, \overline{n}, \overline{b}$ a los vectores unitarios dirigidos según la tangente, normal y binormal, respectivamente, y que son naturalmente funciones de s. La ecuación de una recta que corta a la línea en el punto $\overline{r_o} = \overline{r}(s_o)$ y que forma con las aristas del triedro fundamental unos ángulos cuyos cosenos son λ, μ, ν es

$$\overline{a}(u) = \overline{r}_0 + (\lambda\, \overline{t}_0 + \mu\, \overline{n}_0 + \nu\, \overline{b}_0)\, u$$

y al variar s_o esta recta engendrará una superficie reglada de ecuación:

$$\overline{a}(u, s) = \overline{r}(s) + (\lambda\, \overline{t} + \mu\, \overline{n} + \nu\, \overline{b})\, u$$

En el segundo miembro, tanto los vectores $\overline{r}, \overline{t}, \overline{n}, \overline{b}$ como los escalares λ, μ, ν son funciones de s.

La condición para que esta superficie sea desarrollable es que la normal a lo largo de una generatriz tenga dirección constante. Como en cada punto es ya perpendicular a dicha generatriz, bastará que para todo u lo sea a

$$\overline{t} = \frac{\partial\, \overline{a}\,(s, 0)}{\partial s},$$

es decir, que el vector (*)

$$\frac{\partial \bar{a}(s, u)}{\partial s} \times \frac{\partial \bar{a}(s, u)}{\partial u}$$

tenga su componente según el eje $\bar{t}$ independiente de u.

Se tiene, derivando y aplicando las fórmulas de Frenet,

$$\bar{a}_s = \bar{t} + \left[(\lambda' - \varkappa \mu) \bar{t} + (\mu' + \varkappa \lambda - \nu \tau) \bar{n} + (\nu' + \mu \tau) \bar{b}\right] u$$

$$\bar{a}_u = \lambda \bar{t} + \mu \bar{n} + \nu \bar{b}$$

donde $\varkappa$ y τ son la curvatura y torsión de $\bar{r}(s)$ respectivamente.

La componente, según el eje $\bar{t}$ del producto vectorial indicado, es:

$$(\nu \mu' - \mu \nu' + \nu \lambda \varkappa - \nu^2 \tau - \mu^2 \tau) u$$

y para que sea independiente de u debe ser nula. Recordando que λ, μ, ν son cosenos directores de una recta referida a un triedro trirrectángulo y que, por tanto, están enlazados por la relación $\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1$, resulta que las condiciones que deben cumplir para que la recta $\bar{a}(u)$ engendre una superficie desarrollable son

$$\begin{aligned} \nu \mu' - \mu \nu' + \nu \lambda \varkappa - \tau + \lambda^2 \tau &= 0 \\ \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 - 1 &= 0 \end{aligned} \qquad [1]$$

De aquí se deduce que de las tres funciones $\lambda(s)$, $\mu(s)$, $\nu(s)$ podemos dar una de ellas completamente arbitraria (con la única condición de ser su módulo menor que la unidad). En los casos en que este valor arbitrario atribuído a una de ellas no haga desaparecer el carácter diferencial de la primera ecuación, podremos todavía asignar a las otras dos valores iniciales cualesquiera con la única restricción de la segunda ecuación de [1].

Vamos a estudiar algunos casos particulares notables.

I. $\lambda = 0$. Si imponemos la condición de que la recta generatriz esté constantemente en el plano normal a la curva, los otros dos cosenos μ y ν estarán ligados por las ecuaciones

$$\nu \mu' - \mu \nu' - \tau = 0$$

$$\mu^2 + \nu^2 - 1 = 0$$

(*) Indicaremos siempre por $\times$ el producto vectorial y por un punto el escalar.

De la segunda se deduce:

$$\nu = \pm \sqrt{1 - \mu^2} \qquad \mu\,\mu' + \nu\,\nu' = 0 \qquad \nu' = \mp \frac{\mu\,\mu'}{\sqrt{1 - \mu^2}}$$

con lo cual la primera ecuación conduce a

$$\frac{d\mu}{\pm \sqrt{1 - \mu^2}} = \tau\, ds \quad , \quad \text{arc sen}\, \mu = \int_{s_0}^{s} \tau\, ds + C$$

o sea, llamando θ al ángulo que forma la generatriz $\overline{a}(u)$ con la binormal, será

$$\theta = \int_{s_0}^{s} \tau\, ds + \theta_0 \qquad [2]$$

es decir, hay infinitas de estas superficies desarrollables (una para cada valor inicial θ_0) que son las llamadas *evolutas* de la curva primitiva. Otra cualquiera de ellas será

$$\varphi = \int_{s_0}^{s} \tau\, ds + \varphi_0$$

de donde

$$\theta - \varphi = \theta_0 - \varphi_0$$

que prueba la conocida propiedad de que el ángulo bajo el que se cortan dos de estas superficies se conserva constante a lo largo de la línea directriz.

Si $\tau = 0$ es $\theta = \theta_0$, es decir, las únicas superficies desarrollables que contienen una línea plana y cuya generatriz se encuentra constantemente en el plano normal a la misma, son aquellas cuyo cono director es de revolución.

De la fórmula [2] se deduce que si la línea es cerrada la condición para que sus evolutas sean también cerradas es que

$$\oint \tau\, ds = k\pi$$

Esto ocurre en toda línea de curvatura cerrada de una superficie, puesto que las normales a lo largo de la misma forman una desarrollable que cierra; luego en toda línea de esta clase se cumple la condición anterior de tener su *torsión total* igual a un múltiplo de π.

II. $\mu = 0$. Es el caso en que la recta generatriz está constantemente en el plano rectificante. Se tiene

$$\nu \lambda \varkappa - \tau + \lambda^2 \tau = 0$$
$$\lambda^2 + \nu^2 - 1 = 0$$

sistema que se resuelve sin dificultad reduciéndolo a una ecuación bicuadrada y que nos da las soluciones:

a) $\lambda^2 = 1$, $\nu^2 = 0$ que corresponde a la superficie *tangencial* de la línea.

b) $\lambda^2 = \dfrac{\tau^2}{\tau^2 + \varkappa^2}$, $\nu^2 = \dfrac{\varkappa^2}{\tau^2 + \varkappa^2}$ que corresponde a una recta que tiene en cada punto la dirección del vector de giro de Darboux $\overline{\delta} = \tau\overline{t} + \varkappa\overline{b}$ y engendra la superficie llamada *rectificante*.

Luego las únicas superficies desarrollables cuya generatriz se conserva constante en el plano rectificante son la tangencial y la rectificante.

III. $\nu = 0$. En este caso, la generatriz no se mueve del plano osculador a la curva. Las ecuaciones [1] se reducen a

$$\lambda^2 - 1 = 0$$
$$\lambda^2 + \mu^2 - 1 = 0$$

cuya única solución es $\lambda = 1$, $\mu = 0$. Es decir, excepto la tangencial, no hay ninguna superficie desarrollable que pasando por una línea tenga su generatriz constante en el plano osculador a la misma.

IV. Otro caso interesante es aquel en que λ, μ, ν se conservan constantes. Vamos a ver la condición para que, debiendo ser la superficie desarrollable, esto sea posible. La primera ecuación [1] se reduce a

$$\nu \lambda \varkappa - \tau + \lambda^2 \tau = 0$$

de donde

$$\nu = \frac{1 - \lambda^2}{\lambda} \cdot \frac{\tau}{\varkappa} \qquad [3]$$

Prescindiendo del caso trivial $\lambda = 1$ (superficie tangencial), para que siendo λ constante también lo sea ν es, pues, condición necesaria y suficiente que

$$\frac{\tau}{\varkappa} = \text{constante}$$

que es a su vez la condición necesaria y suficiente para que la línea dada sea de *igual pendiente*. Luego, para que una recta, distinta de la tangente, inmóvil respecto del triedro fundamental de una línea engendre una superficie desarrollable al desplazarse éste, es necesario que dicha línea sea de igual pendiente. Recíprocamente, cada punto de una línea de igual pendiente es vértice de un cono inmóvil respecto el triedro fundamental, cuyas generatrices están determinadas por cumplir la condición [3] y las cuales engendran, al moverse el punto sobre la línea, superficies desarrollables (*).

V. Otra condición que puede imponerse a los cosenos directores es $\mu = k\nu$, siendo k una constante. Las ecuaciones [1] dan en este caso

$$\nu \lambda \varkappa - \tau + \lambda^2 \tau = 0$$
$$\lambda^2 + (1 + k^2)\nu^2 - 1 = 0$$

de las cuales se deduce:

$$\frac{\nu}{\lambda} = \frac{1}{1 + k^2} \cdot \frac{\varkappa}{\tau} \qquad [4]$$

Es decir: para que la superficie engendrada por una recta que se conserva en un plano que pasa por la tangente y fijo respecto el triedro fundamental sea desarrollable, es preciso que los cosenos de los ángulos que en cada momento forma con la binormal y la tangente estén ligados por la relación [4]. Recíprocamente, supuesta satisfecha esta condición, y si además en cada punto es $\mu = k\nu$, es fácil ver que la superficie es desarrollable, luego la condición dada es también suficiente.

VI. Si la línea dada es una recta, son nulas la curvatura y la torsión. Tomando por normal y binormal rectas perpendiculares cualesquiera, pero de direcciones fijas, la primera ecuación [1] se reduce a

$$\nu \mu' - \mu \nu' = 0$$

(*) Este notable resultado que aquí aparece tan sencillamente, fué obtenido por primera vez por *P. Appell*: Arch. Math. Phys. Bd. 64, 1879.

de donde

$$\mu = C\nu$$

es decir, la recta móvil se encuentra siempre en un mismo plano que pasa por la recta primitiva. Luego, excepto el plano, todas las superficies engendradas por una recta que desliza sobre otra son alabeadas. Lo cual directamente es evidente.

También es interesante ver, de entre todas las superficies desarrollables que pasan por una línea, cuales son aquellas que la contienen como línea asintótica, o geodésica o de curvatura.

Para que sea *asintótica* su plano osculador debe ser constantemente tangente a la superficie; luego la generatriz de ésta debe estar siempre en dicho plano y en estas condiciones ($\nu = 0$); ya hemos visto que no hay otra superficie desarrollable que la *tangencial.*

Si se impone la condición de que la superficie desarrollable contenga a la línea como *geodésica,* la misma definición de estas líneas nos dice que la generatriz correspondiente a cada punto debe estar situada en el plano rectificante, y, por tanto, la superficie *rectificante,* exceptuada la tangencial, es la única desarrollable que pasando por una línea la contiene como *geodésica.*

La condición para que sea de *curvatura,* siendo la superficie desarrollable, es que la línea dada corte ortogonalmente a las generatrices y por lo tanto las únicas superficies que cumplen esta condición son las *evolutas.*

Volviendo al sistema primero y fundamental [1], puede presentarse el problema de encontrar las superficies desarrollables que contienen la línea $\overline{r}(s)$ y a n rectas que se apoyan en la misma en los puntos s_1, s_2, s_3, ... s_n definidas en ellos por sus cosenos directores

$$\lambda_i = \lambda(S_i) \ , \ \mu_i = \mu(S_i) \ , \ \nu_i = \nu(S_i)$$

($i = 1, 2, 3, \ldots n$) respectivamente.

Hagamos $\mu = \nu z$, con lo cual la ecuación [1] se transforma en

$$\nu^2 z' + \nu \varkappa \sqrt{1 - \nu^2(1 + z^2)} - \tau \nu^2 (1 + z^2) = 0 \qquad [5]$$

y de aquí se puede despejar

$$\begin{aligned} \nu &= F(\varkappa, \tau, z, z') \\ \mu &= F(\varkappa, \tau, z, z') \cdot z \end{aligned} \qquad [6]$$

siendo

$$F(\kappa, \tau, z, z') = \frac{\kappa}{\pm\sqrt{[\tau(1+z^2) - z']^2 + \kappa^2(1+z^2)}}$$

Debiéndose cumplir las condiciones

$$\begin{aligned} \nu_i &= F(\kappa_i, \tau_i, z_i, z'_i) \\ \mu_i &= F(\kappa_i, \tau_i, z_i, z'_i) \cdot z_i \end{aligned} \qquad [7]$$

tendremos n de estos sistemas, los cuales nos darán los valores de

$$z_i = z(s_i), \; z'_i = z'(s_i) \quad (i = 1, 2, 3, \ldots\ldots n).$$

De la función $z(s)$ se conocen, pues, n valores con sus correspondientes de la derivada. Según esto, tomando en un plano como abscisas los valores de s y como ordenadas los de $z(s)$, el problema de hacer pasar una superficie desarrollable por la línea y rectas dadas, equivale a determinar curvas que pasen por n puntos y tengan en ellos tangentes dadas. El número de soluciones es, por lo tanto, ilimitado.

En el caso de la línea recta, $\kappa = 0$, $\tau = 0$, la ecuación [5] nos da $z' = 0$, $z = \text{Cte.}$; luego para que el problema sea posible, las rectas que se apoyan en la dada deben estar en un mismo plano, como ya habíamos visto.