UNOS PROBLEMAS DE COMBINATORIA

El problema propuesto en esta Revista en el número 8-9 es susceptible de generalización y da lugar, además, a otros curiosos e interesantes problemas de combinatoria. El ejercicio decía:

Dados m *elementos, calcular cuántos grupos distintos, compuestos de* n *pares de elementos consecutivos, se pueden formar.*

Sean los m elementos $a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots, a_m$. Prescindamos de los n primeros y con los $m - n$ restantes hacemos todas las combinaciones posibles n a n en número, por lo tanto, de

$$\binom{m-n}{n}$$

Vamos a demostrar que a cada combinación de éstas se puede hacer corresponder un grupo de n pares de elementos consecutivos y recíprocamente. Basta para ello hacer corresponder a la combinación $a_{i_1} a_{i_2} \ldots\ldots a_{i_n}$ ordenada en orden de subíndices crecientes, el grupo

$$a_{i_1-n}, a_{i_1-(n-1)}; a_{i_2-(n-1)}, a_{i_2-(n-2)}; \ldots\ldots; a_{i_{n-1}-2}, a_{i_{n-1}};$$

$$a_{i_n-1}, a_{i_n}$$

Evidentemente el proceso es invertible, es decir, dado uno de estos grupos ordenando los pares en orden de subíndices crecientes e increcentándolos convenientemente, encontraremos una de las combinaciones $\binom{m-n}{n}$. Luego el número buscado es

$$N_2^m = C_{m-n}^n = \binom{m-n}{n}$$

Este problema se puede generalizar. Supongamos que lo que se pide es cuantos grupos distintos compuestos de n *ternas* de elementos consecutivos se pueden formar con los m elemetos dados.

Para seguir un procedimiento análogo al anterior, prescindmos de los $2n$ primeros elementos y con los $m - 2n$ restantes hagamos todas las combinaciones C_{m-2n}^n. A cada una de ellas $a_{i_1} a_{i_2} a_{i_3} \ldots\ldots a_{i_n}$ se hace corresponder el grupo de ternas

$$a_{i_1-2n}, a_{i_1-(2n-1)}, a_{i_1-(2n-2)}; a_{i_2-(2n-2)}, a_{i_2-(2n-3)}, a_{i_2-(2n-4)};$$

$$\ldots\ldots; a_{i_{n-1}-4}, a_{i_{n-1}-3}, a_{i_{n-1}-2}; a_{i_n-2}, a_{i_n-1}, a_{i_n}.$$

y recíprocamente para cada grupo de ternas, incrementando convenientemente los subíndices encontraremos una de las C_{m-2n}^n combinaciones. Por tanto

$$N_3^m = \binom{m-2n}{n}$$

El procedimiento de demostración es general. De manera que si el problema fuese averiguar de cuántas maneras distintas se pueden tomar n grupos de r elementos consecutivos cada uno, de entre m elementos dados, la respuesta sería

$$N_r^m = \binom{m-(r-1)\,n}{n}$$

***

Vamos a ver ahora algunas otras formas en que pueden ser enunciados los problemas anteriores.

Sean los m elementos dados puntos equidistantes situados sobre una misma recta. Ellos determinarán $m - 1$ segmentos consecutivos iguales y un par de elementos consecutivos determina el segmento que los tiene por extremos. Luego el problema primero equivale al siguiente:

Dados m *segmentos consecutivos e iguales, ¿de cuántas maneras se pueden tomar* n *de ellos de manera que no se tomen dos consecutivos?*

La solución será

$$N_2^{m+1} = \binom{m+1-n}{n}$$

Otra forma del mismo problema es:

En una fila de m *butacas tienen que sentarse* n *personas de manera que no estén dos consecutivas. ¿De cuántas maneras pueden hacerlo?* Se supone, naturalmente, que no se hace distinción entre las personas. La solución será la misma N_2^{m+1} de antes.

El problema de los grupos de ternas equivale al siguiente:

¿De cuántas maneras pueden sentarse n *parejas en una fila de* m *butacas de manera que no estén dos consecutivas?* La solución será

$$N_3^{m+1} = \binom{m+1-2n}{n}$$

En general:

¿De cuántas maneras pueden sentarse n *grupos de* r *personas en una fila de* m *butacas de manera que los grupos estén separados unos de otros por una butaca vacía por lo menos?* La solución será como es fácil ver,

$$N_{r+1}^{m+1} = \binom{m+1-r\,n}{n}$$

L. A. SANTALÓ.

COMO BU

El fin de la
za». Es de dim
en una sola hoj
Las consid
vademécum pu
1. La conti
la cultura gene
miento con la r
2. Esta fo
enseñanza deb
delos a imitar;
apropiados, los
3. Los ma
sobre el proces
problema.
El vademéc
sugestivas, de
problema. Es u
cos. Trátase, s
densado en fra
Para justificar
para hacer ver
mas particulare
es fácil de pres
ella limitarse a
el papel de alg
la solución.
El vademéc
se le coloca en
alumno encuen
ejemplos aprop
los trazos que