CIENCIA Y TECNOLOGIA

DEPARTAMENTO DE ASUNTOS CULTURALES — SECCION CIENCIA Y TECNOLOGIA

UNION PANAMERICANA • WASHINGTON 6, D. C.

Número 12 Volumen IV Enero-Marzo 1954

ASPECTOS MODERNOS EN EL CAMPO DE LA GEOMETRIA

Prof. Dr. Luis A. Santaló
Facultad de Ciencias Fisicomatemáticas
Eva Perón, Argentina

La matemática es la ciencia que evoluciona y progresa con más libertad. No necesita ir acompañada de un paralelo progreso técnico o industrial, como puede ocurrir con la física, con la química o con otras ciencias, como la medicina, que se nutren de estas últimas fuentes. La matemática es una ciencia que se contiene a sí misma: ella se plantea sus problemas, ella se los resuelve, ella se los discute. Libre de todo veredicto experimental y sin otro juez que los mismos matemáticos, avanza por donde estos quieren y por los caminos donde los matemáticos de cada época la conducen y llevan.

En cada momento de la historia, faltos de perspectiva, los matemáticos no pueden saber si el camino elegido es efectivamente el que conduce a un mayor progreso real o si se trata de una dirección equivocada, de una línea de nivel o de un camino de retroceso. Sin embargo, es un hecho afortunado que en general el camino aceptado por la mayoría de los matemáticos considerados como prominentes en un determinado momento, es el que a la larga resulta ser el que debía haberse tomado. Las desviaciones suelen ser momentáneas y rápidamente corregidas por una minoría de inteligencias claras que vuelven a encauzar la caravana de las investigaciones matemáticas por su verdadera senda. Las cabezas directrices, sin embargo, no ejercen otra presión que señalar el camino con el ejemplo. Cada uno queda libre de seguirlo o no; todas las tendencias son igualmente respetadas mientras se ajusten, naturalmente, a las reglas del correcto razonar matemático.

Es muy natural que en cada época, los distintos matemáticos tengan opiniones diferentes sobre el valor de los problemas candentes que preocupan a los distintos centros de producción matemática. Es muy probable, por ejemplo, que en los principios del cálculo infinitesimal hubiera quienes sostuvieran que la "verdadera" matemática la constituían los problemas de construcción de cónicas o la resolución de ecuaciones algebraicas. Como es muy lógico que actualmente, frente a la gran avalancha de la llamada matemática moderna, haya quienes sostengan que la "única" matemática es la clásica de la teoría de números o la de las ecuaciones diferenciales de la física.

Todas las opiniones son respetables y, mientras se trabaje, cada uno debe hacerlo en la dirección que su gusto personal le aconseje. Todo aporte es útil. Todo grano de arena juega su papel en la construcción del gran edificio matemático.

Sin embargo, dado el caso de jóvenes que sintiesen el deseo de trabajar en matemáticas sin haberse todavia formado un criterio acerca de la dirección a tomar, les aconsejaríamos que tomasen partido por la matemática moderna, por la matemática de "moda" en el momento presente. Principalmente porque en ella encontrarán abundantes colegas con quienes entenderse, con quienes comparar y contrastar ideas. Nada mas peligroso que la soledad en la investigación científica. Las ideas se van seleccionando, los trabajos se van puliendo, su importancia va escalando peldaños, a medida que se van sometiendo al juicio crítico de los demás, y este juicio será tanto mas severo y en consecuencia tanto mas útil, cuantos mas especialistas haya en la materia elegida.

Puede ser de utilidad, en consecuencia, tener una visión panorámica de los distintos aspectos que presenta la matemática moderna, con sus escuelas y sus problemas. Limitándonos a la Geometría y aún forzosamente desde un punto de vista especial, veamos las principales ramificaciones que sobresalen en el momento presente.

Geometría algebraica. Durante el segundo y tercer decenio del siglo actual se dió forma y se inició como cuerpo de doctrina la llamada álgebra moderna, por obra principalmente de Emmy Noether y E. Artin. Se trata de dar la máxima generalidad y al mismo tiempo delimitar con precisión, el campo de validez de las teorías algebraicas.

Inmediatamente (van der Waerden, Zarisky, A. Weil) apareció el problema de aplicar esta nueva concepción a la geometría algebraica clásica edificada por los geómetras italianos de finales del siglo pasado y principios del actual (Enriques, Castelnuovo, Beppo Levi, Severi, ...). Empezó así, y sigue todavía, la depuración de los principios básicos y el análisis preciso de hasta dónde eran válidas las demostraciones. Nacieron con ello nuevos problemas, se completaron muchos puntos, se concretó bien donde radicaban ciertas dificultades. En esta tendencia la geometría algebraica fué perdiendo su sabor geométrico, para ganar en pureza algebraica.

Dentro de la geometría algebraica moderna hay otra dirección, naturalmente vinculada con la anterior, que nacida también a fines del siglo pasado con Poincaré y Picard, ha sido modernizada principalmente por Lefschetz y luego por Hodge y otros. Se trata del estudio global o topológico de las variedades algebraicas, rama vinculada por un lado con la topología y por otro con las llamadas formas diferenciales exteriores e integrales armónicas, de gran utilidad en muchas ramas de la matemática moderna.

Geometría de los números. Si la geometría algebraica vincula la geometría con el álgebra, la geometría de los números la vincula con la aritmética. Nació con los trabajos fundamentales de Minkowski a principios de siglo y ha tenido un fuerte renacimiento en los últimos años debido principalmente a la escuela inglesa de Mähler, Rogers, Davenport y otros varios.

Se trata de deducir propiedades de los números enteros, (en especial de las ecuaciones e inecuaciones diofánticas), a partir del número de puntos de coordenadas enteras que ciertas figuras pueden contener. Aparte su aplicación aritmética, la teoría presenta muchos problemas de exclusivo interés geométrico. La técnica usada exige muy pocos conocimientos previos, pero la falta de métodos generales obliga a ingeniosas variantes para cada problema particular.

Geometría diferencial. Toda la geometría diferencial clásica se dedicaba casi exclusivamente a problemas "locales" o "en pequeño" de las superficies o variedades. Se suponía, por ejemplo, que un mismo sistema de coordenadas valía para todos los puntos de la región que se quería estudiar. La geometría diferencial moderna, en cambio, presta la máxima atención a los problemas de conjunto o "en grande" de las variedades. Un resultado muy importante en esta dirección, por ejemplo, fué el obtenido por Alleondoerfer-Weil-Chern, en 1943, al generalizar a n dimensiones la clásica fórmula de Gauss-Bonnet de la teoría de superficies. Otros problemas interesantes se relacionan con el número de geodésicas cerradas que pueden existir sobre una variedad dada, o bien con la posibilidad de sumergir una variedad dada en un espacio euclidiano de mas dimensiones.

No se sabe, por ejemplo, si todo espacio de Riemann, considerado en su totalidad, es sumergible en un espacio euclidiano de cierto número de dimensiones, problema que "en pequeño", para regiones suficientemente limitadas del espacio, no tiene gran dificultad. Otro ejemplo: del conocimiento de una propiedad de una variedad para cada punto de la misma, ¿qué puede decirse de la "forma" global de la variedad?.

Para este tipo de problemas han resultado muy útiles los métodos elaborados por E. Cartan, referentes al triedro móvil y a las formas diferenciales exteriores. Ellos han permitido trazar un puente de unión entre la geometría diferencial y la topología de las variedades diferenciables. En los últimos 15 años muy notables resultados han sido ya obtenidos en esta dirección por Bochner, Lichnerowicz, Chern, Hodge y otros varios.

Otra tendencia muy distinta, pero también de aspectos promisorios en la geometría diferencial moderna es la que trata de ver hasta donde se puede llegar con un mínimo de hipótesis iniciales. Por ejemplo, el estudio de los espacios métricos, en los cuales se define únicamente la "distancia" por ciertos postulados muy generales, ha dado lugar a la " geometría de distancias", iniciada por Menger en 1928 y brillantemente continuada por Blumenthal. Añadiendo ciertas condiciones de diferenciabilidad se tiene la geometría de los espacios de Finsler, cuyo estudio directo, con un mínimo de hipótesis, ha dado lugar a una serie de importantes trabajos de Busemann.

Topología. La topología es tal vez la rama que ha evolucionado con mas esplendor en los últimos años. Aparte la llamada topología de las variedades o topología analítica, que ha seguido su progreso siguiendo las líneas clásicas, aparecen dos aspectos de gran interés: la topología algebraica y la topología de los espacios fibrados.

La topología algebraica ha tendido cada vez mas al formalismo, llegándose a crear todo un mecanismo operatorio que sus autores principales (Eilenberg, Mac Lane, Steenrod, Spanier, ...) comparan con una nueva geometría analítica. Es decir, se pretende crear un instrumento general para resolver los problemas de la topología combinatoria, de manera en cierto modo análoga a cómo la geometría analítica de Descartes sirvió para resolver los problemas de la geometría.

Mucho mas geométrica es la segunda dirección, la de la topología de los espacios fibrados, que vincula estrechamente la topología con la geometría diferencial. Por ejemplo, es bien sabido que dada la superficie de una esfera no se puede dar en cada uno de sus puntos un vector de manera tal que todos ellos formen un campo continuo sin puntos singulares. El estudio del teorema análogo para mas dimensiones, para variedades de distinta conexión topológica y para multivectores en lugar de vectores, constituyen ejemplos típicos de problemas sobre espacios fibrados. Stiefel, Whitney, Ehresmann, Chern, Steenrod, Hirsch,..., son los principales impulsores de esta nueva e interesante disciplina.

Geometría de los cuerpos convexos y geometría integral. Desde Arquímedes se vió que la geometría de los cuerpos convexos, tanto al considerarlos como tales cuerpos, como al considerar sólo la superficie que los limita, presenta particularidades de interés. Actualmente esta geometría forma por sí sola un cuerpo de doctrina a la que llegan, en busca de interesantes aplicaciones, muchas ramificaciones de las mas diversas disciplinas matemáticas. El cálculo de variaciones, la teoría de ecuaciones integrales, la teoría de funciones reales, son ejemplos de teorías que muchas veces han necesitado de las propiedades de los cuerpos convexos para probar sus métodos o para orientar sus clasificaciones.

Modernamente la geometría de los cuerpos convexos se ha visto relacionada con la teoría de los grupos de Lie por medio de la llamada geometría integral (Blaschke, 1935). Se trata de medir conjuntos de variedades lineales (rectas, planos, hiperplanos) que cortan a un dado cuerpo convexo, medida a la que se pide que sea invariante respecto a un cierto grupo de transformaciones. De estas medidas muchas veces ha sido posible deducir propiedades curiosas que no parecen fáciles de probar por otros métodos.

Quedarían otros capítulos por mencionar, pero no pretendemos hacer un análisis completo, sino mas bien señalar algunas de las tendencias actualmente mas de "moda" en el campo de la geometría. Todas ellas pertenecen a una u otra de las dos direcciones que más fuertemente imprimen su huella en toda la matemática moderna: por un lado el afán de mayor generalidad, junto con una mayor precisión en los fundamentos y en el alcance de los resultados; por otro, el interés por los problemas "globales" o "en grande", los cuales hacen ver la necesidad de nuevos instrumentos que permitan enfocar estos problemas de una manera sistemática.

Los resultados obtenidos en las nuevas disciplinas, así como la importancia de los problemas que en ellas se plantean, no son insignificantes. Ciertamente que, como ocurre siempre en épocas de elaboración, del gran número de memorias, notas y trabajos que se publican anualmente, sólo un pequeño número pasarán por el tamiz selectivo que el tiempo va tejiendo y afinando año tras año.

Pero esto no puede servir de desaliento, ni ser motivo para creer que estamos en época de decadencia. Mientras haya problemas, mientras se trabaje en teorías que presenten día a día nuevas cuestiones para resolver y en las cuales los matemáticos puedan agudizar su ingenio, la vida de la matemática estará asegurada. Temamos, mas bien, el peligro de que algún día se creyese que ya todo ha sido resuelto: ese sí que sería de duelo para nuestra ciencia.